

Cromodinamica Quantistica

Flaviano Morone

FLAVIANO MORONE - CROMODINAMICA QUANTISTICA

Contents

1	Teoria dei gruppi	5
1.1	Gruppi continui	6
1.2	Spinori	8
1.3	$SU(3)$	11
2	Modello a quark	15
2.1	Mesoni	15
3	Teorema di Wigner-Eckart	19
3.1	Applicazione del teorema di Wigner-Eckart	20
4	Lagrangiana pione-nucleone	23
4.1	Evidenza del colore	25
4.1.1	Δ^{++}	25
4.1.2	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	25
5	Teoria di gauge	27
5.1	Regole di Feynman	29
5.2	Rapporto inclusivo e liberta asintotica	30
5.3	Equazioni del gruppo di rinormalizzazione	37
6	Deep Inelastic scattering $e^-p \rightarrow e^-X$	39
6.1	Variabili di Bjorken	40
6.2	Sezione d'urto	41
6.3	Modello a partoni naive - scaling di Bjorken	44
6.4	Spin dei quark	46
7	Modello a partoni - correzioni QCD al deep inelastic scattering	53
8	Rottura spontanea di simmetria	65
8.1	Teorema di Goldstone	66
9	Modello σ di Gell-Mann e Levy	69
9.1	σ -Model	70
10	Technicolor	77
10.1	Modello semplice senza scalari	80

10.2	Technicolor	84
10.2.1	Modello a un doppietto	86
10.2.2	Modello a una famiglia	86
10.3	Masse dei fermioni leggeri e interazioni di Fermi	87
10.3.1	Interazioni di Fermi a 4 campi	87

FLAVIANO MORONE - CROMODINAMICA QUANTISTICA

Chapter 1

Teoria dei gruppi

Definizione. Un gruppo è un insieme di oggetti g , chiamati elementi del gruppo G , che possono essere moltiplicati per definire un prodotto che soddisfa le proprietà seguenti

1. Se $g_1, g_2 \in G \rightarrow g_1 \cdot g_2 \in G$.
2. Esiste l'identità $e \in G : e \cdot g = g \cdot e = g$.
3. $\forall g \in G$ esiste $g^{-1} : g^{-1} \cdot g = e$.
4. Vale la proprietà **associativa** $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

Rappresentazione. Si dice **rappresentazione** del gruppo G ogni mappa

$$g \rightarrow U(g) \quad (1.1)$$

tra gli elementi del gruppo e un insieme di **operatori lineari** agenti su uno spazio vettoriale V che realizzano l'operazione del gruppo quando vengono moltiplicati tra loro

$$U(g)U(h) = U(g \cdot h) . \quad (1.2)$$

Inoltre valgono:

$$\begin{aligned} U(e) &= I , \\ U(g^{-1}) &= U^{-1}(g) . \end{aligned} \quad (1.3)$$

- Due rappresentazioni sono **equivalenti** se esiste una trasformazione di similitudine: $U_2(g) = SU_1(g)S^{-1}$ con la stessa S per ogni g .
- Si dice **dimensione della rappresentazione** la dimensione dello spazio vettoriale su cui agisce.
- Una rappresentazione del gruppo G si dice **riducibile** se esiste un **sottospazio V invariante** sotto l'azione di ogni operatore della rappresentazione. Si dice **completamente riducibile** se lo spazio può essere scomposto in sottospazi che non vengono trasformati l'uno nell'altro sotto l'azione degli operatori della rappresentazione.

- Le matrici di una rappresentazione completamente riducibile (RCR) sono equivalenti a matrici diagonali a blocchi. Una RCR può essere decomposta in una somma diretta di rappresentazioni **irriducibili**.

Dato il vettore $|\phi\rangle$ che trasforma sotto la rappresentazione $U(g)$ del gruppo

$$\phi'_i = \sum_j U_{ij}(g)\phi_j, \quad (1.4)$$

allora, se le componenti di $|\phi\rangle$ possono essere separate in somme dirette di sottospazi vettoriali

$$|\phi\rangle = |\psi^1\rangle \oplus |\psi^2\rangle \oplus \dots \oplus |\psi^n\rangle \quad (1.5)$$

che vengono mappati in loro stessi dalla trasformazione

$$\psi'^a_i = \sum_j U_{ij}^a(g)\psi_j^a, \quad (1.6)$$

la rappresentazione viene detta **riducibile**:

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1^1 \\ \psi_1^2 \\ \vdots \\ \psi_n^1 \\ \psi_n^1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \psi'^\alpha_i = \sum_b U_i^{\alpha\beta}(g)\psi_i^\beta, \quad (1.7)$$

allora

$$U(g) = U_1(g) \oplus U_2(g) \oplus \dots \oplus U_n(g) = \begin{pmatrix} U_1(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2(g) & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & U_n(g) \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

1.1 Gruppi continui

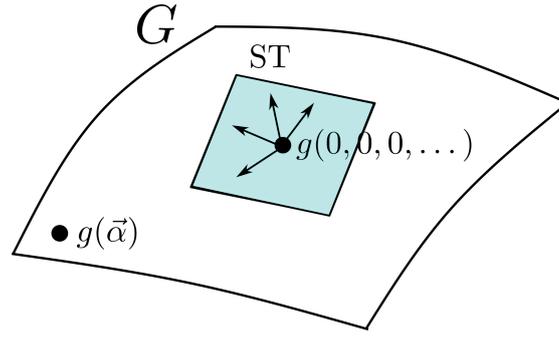
Essi sono gruppi i cui elementi dipendono da uno o più parametri reali

$$g = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = g(\alpha), \quad (1.9)$$

in modo da formare sul gruppo una struttura di **varietà differenziabile**, cosicchè si può definire sul gruppo una nozione di derivata e uno **spazio tangente** che trasforma un intorno dell'elemento **neutro** in uno spazio vettoriale.

Consideriamo una parametrizzazione degli elementi del gruppo tale che $g(0, 0, \dots, 0) = e$. Passando ad una **rappresentazione** possiamo trasferire agli operatori del gruppo la stessa parametrizzazione:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &\rightarrow U(g(\alpha)) = U(\alpha), \\ U(g(0)) &= U(0) = I. \end{aligned} \quad (1.10)$$



Possiamo sviluppare $U(g)$ intorno all'identità:

$$U(\alpha) = I + i\alpha_j T^j + o(\alpha) . \quad (1.11)$$

Gli operatori T^j sono i **generatori** del gruppo e agiscono su uno spazio vettoriale (lo spazio **tangente**).

A partire da una trasformazione **infinitesima** possiamo generare una qualsiasi trasformazione **finita** componendo infinite trasformazioni infinitesime. Chiamando $U(d\alpha) = I + i d\alpha_j T^j$ la trasformazione infinitesima con $\alpha_j = N d\alpha_j = \text{cost}$, la trasformazione finita sarà:

$$U(\alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + i \frac{\alpha_j}{N} T^j \right)^N = e^{i\alpha_j T^j} . \quad (1.12)$$

Possiamo, quindi, generare elementi finiti del gruppo a partire dai suoi generatori.

La rappresentazione data dall'equazione (1.12) è chiamata **rappresentazione esponenziale**. Nel caso di trasformazioni **unitarie** $U^\dagger U = I$. Ma

$$U^\dagger(\alpha) = e^{-i\alpha_j T^{j\dagger}} \rightarrow U^\dagger U = e^{-i\alpha_j T^{j\dagger}} e^{i\alpha_j T^j} = I \rightarrow T^{j\dagger} = T^j , \quad (1.13)$$

cioè i generatori di trasformazioni unitarie sono **hermitiani**.

Se richiediamo che $\det(U) = 1$:

$$\det(U) = e^{\text{tr} \ln U} = e^{\text{tr}(i\alpha_j T^j)} = e^{i\alpha_j \text{tr} T^j} = 1 \rightarrow \text{tr} T^j = 0 . \quad (1.14)$$

Un gruppo compatto unitario si può rappresentare in termini di operatori unitari:

$$\begin{aligned} U(\alpha) &= e^{i\alpha_j T^j} , \\ |\phi'\rangle &= e^{i\alpha_j T^j} |\phi\rangle , \\ \hat{O}' &= e^{-i\alpha_j T^j} \hat{O} e^{i\alpha_j T^j} = U^\dagger \hat{O} U . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Consideriamo la **trasformazione infinitesima**:

$$U^\dagger(\alpha) U^\dagger(\beta) U(\alpha) U(\beta) = 1 + \alpha_j \beta_k [T^j, T^k] + \dots \quad (1.16)$$

Il risultato della trasformazione è ancora un elemento del gruppo e quindi lo possiamo scrivere come

$$U^\dagger(\alpha) U^\dagger(\beta) U(\alpha) U(\beta) = 1 + i\alpha_j \beta_k f_{jki} T^i + \dots , \quad (1.17)$$

da cui otteniamo

$$\boxed{[T^j, T^k] = \imath f_{jki} T^i}, \quad (1.18)$$

dove f_{ijk} sono le **costanti di struttura**.

Definendo $(K^i)_{jk} = -\imath f_{ijk}$ possiamo verificare che

$$[K^i, K^j] = \imath f_{ijk} K^k. \quad (1.19)$$

I generatori K^i sono i generatori della **rappresentazione aggiunta**.

La dimensione della rappresentazione aggiunta è uguale al numero di generatori linearmente indipendenti. Possiamo trasformare la rappresentazione aggiunta in uno spazio di Hilbert dotandolo del **prodotto scalare**:

$$\langle K^i, K^j \rangle = \text{tr}(K^i K^j) = \lambda \delta_{ij}. \quad (1.20)$$

In questa base le costanti di struttura sono completamente antisimmetriche.

- **GRUPPO ORTOGONALE** $O(N)$. Gli elementi devono obbedire alla condizione $O^T O = I$. Ha $N(N-1)/2$ elementi indipendenti.
- **GRUPPO UNITARIO** $U(N)$. Gli elementi devono obbedire alla condizione $U^\dagger U = I$. Ha N^2 elementi indipendenti.

$$U(N) = U(1) \otimes SU(N). \quad (1.21)$$

- **GRUPPO SPECIALE UNITARIO** $SU(N)$. Gli elementi devono obbedire alla condizione supplementare $\det(U) = 1$. Ha $N^2 - 1$ elementi indipendenti.
- **SU(2)**. Consideriamo il gruppo **unitario** delle matrici $U = e^{\imath \alpha_j \sigma^j}$. Abbiamo $U^\dagger U = I$ and $\det(U) = 1$. Introduciamo il tensore antisimmetrico ϵ_{ij} per cui valgono le seguenti proprietà:

1. $\epsilon_{ik} \epsilon_{kj} = -\delta_{ij} \quad - \imath \epsilon_{ij} = (\sigma_2)_{ij}$
2. $\epsilon_{ij} U_{ik} U_{jl} = \epsilon_{kl} \det(U) = \epsilon_{kl}$
3. $U_{mk}^* \epsilon_{kl} = \epsilon_{ij} U_{mk}^* U_{ik} U_{jl} = \epsilon_{ij} U_{jl} U_{ik} U_{km}^* = \epsilon_{mj} U_{jl}$

$$\begin{aligned} &\rightarrow U_{mk}^* (\sigma_2)_{kl} = (\sigma_2)_{mj} U_{jl} \\ &\rightarrow U^* \sigma_2 = \sigma_2 U^* \\ &\rightarrow \sigma_2 U^* \sigma_2 = U \\ &\rightarrow 2 = \bar{2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.2 Spinori

Spinore con indice in alto:

$$\begin{aligned} \psi^i &= \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \\ \rightarrow \psi^i &= U_j^i \psi^j. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Spinore con indice in basso:

$$\begin{aligned}
\psi_i &= \epsilon_{ij} \psi^j , \\
\psi_1 &= \psi^2 , \\
\psi_2 &= -\psi^1 , \\
\rightarrow \psi'_i &= \epsilon_{ij} \psi'^j = \epsilon_{ij} U_l^j \psi^l = \epsilon_{ij} U_l^j \epsilon^{lk} \psi_k = -(\sigma_2)_{ij} U_l^j (\sigma_2)^{lk} \psi_k = (U^*)^k_i \psi_k , \\
\rightarrow \psi'_i &= \psi_k (U^\dagger)^k_i .
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Consideriamo la quantità $\psi_i \phi^i$ che trasforma come

$$\psi'_i \phi'^i = (U^\dagger)^k_i U_l^i \psi_k \phi^l = \psi_i \phi^i = \text{INVARIANTE} = \phi^1 \psi^2 - \phi^2 \psi^1 , \tag{1.25}$$

corrispondente ad uno stato di **spin totale zero** che è **invariante per rotazioni**. Alla combinazione **antisimmetrica** $\phi^1 \psi^2 - \phi^2 \psi^1$ si può aggiungere la combinazione simmetrica

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \psi^1 \phi^1 & \frac{1}{2}(\psi^2 \phi^1 + \psi^1 \phi^2) \\ \frac{1}{2}(\psi^2 \phi^1 + \psi^1 \phi^2) & \psi^2 \phi^2 \end{pmatrix} , \tag{1.26}$$

che trasforma come un vettore, ossia come uno stato di **spin totale 1**:

$$\boxed{2 \otimes 2 = 1 \oplus 3} . \tag{1.27}$$

Per la **rappresentazione coniugata**:

$$(\psi^{i*})' = (U^*)^i_j \psi^{j*} = \psi^{j*} (U^\dagger)^j_i , \tag{1.28}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\phi_i &\sim \psi^{i*} , \\
\psi_i^* &\sim \phi^i ,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

dove il simbolo " \sim " sta per "trasforma come". Costruiamo il prodotto dei due spinori $\phi^i \psi^{j*} = T^{ij}$. La traccia $\epsilon_{ij} T^{ij} = T^i_i$ trasforma come uno scalare:

$$\phi^{i'} \psi_i^{*'} = U^i_k (U^*)^l_i \phi^k \psi_l^* = \phi^i \psi_i^* . \tag{1.30}$$

La parte simmetrica $\theta^{ij} = T^{ij} + T^{ji}$ trasforma come un vettore $\theta^{ij'} = T^{ij'} + T^{j'i} = U^i_k \theta^{kl} (U^\dagger)^j_l$. Dunque avremo:

$$\boxed{2 \otimes \bar{2} = 1 \oplus 3} . \tag{1.31}$$

Consideriamo un prodotto di n rappresentazioni di spin $\frac{1}{2}$, ovvero consideriamo lo spinore di rango n :

$$T^{i_1 \dots i_n} = \psi^{i_1} \dots \psi^{i_n} . \tag{1.32}$$

Simmetrizziamo rispetto a tutti gli indici e chiamiamo $T^{\{i_1 \dots i_n\}}$ il tensore simmetrizzato. Poiché $i_1 \dots i_n$ possono assumere solo due valori, il numero di componenti indipendenti corrisponde a quante volte compare l'indice $i = 1$ e a quante volte compare l'indice $i = 2$. Partendo con tutti gli indici uguali a 1 e cambiandone uno alla volta avremo in totale $n + 1$ componenti indipendenti, corrispondente ad

uno stato di spin totale $s = \frac{n}{2}$. Contraendo con ϵ_{ij} e simmettizzando rispetto alle componenti rimanenti otteniamo uno spinore di rango $n-2$ corrispondente ad uno stato di spin totale $s = \frac{n}{2} - 1$:

$$T^{\{i_1 \dots i_{n-2}\}} = \epsilon_{ij} T^{ij\{i_1 \dots i_{n-2}\}} = T_j^{j\{i_1 \dots i_{n-2}\}} . \quad (1.33)$$

Quindi un tensore a n indici che ha 2^n componenti può essere decomposto in multipletti di spin totale $\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \dots$. Quando consideriamo il prodotto di più rappresentazioni, una stessa rappresentazione irriducibile può entrare più volte nella somma diretta. Contiamo appunto quante volte una stessa rappresentazione irriducibile entra nella somma diretta.

Simmettizzando rispetto a tutti gli indici il tensore di partenza, si ottiene uno stato di spin totale $\frac{n}{2}$ (supponiamo n pari) in **1 solo modo**. Contraendo rispetto ad una coppia di indici e simmettizzando, si ottiene uno stato con spin totale $\frac{n}{2} - 1$ e, continuando a contrarre, stati di spin totale $\frac{n}{2} - 2, \dots, \frac{n}{2} - m, \dots$. Vogliamo determinare in quanti modi uno stato di spin totale s si può costruire a partire da un sistema di N particelle di spin $\frac{1}{2}$. Questo ci darà la molteplicità della rappresentazione irriducibile di spin s .

Il valore della proiezione dello spin totale del sistema $M_s = \sum \sigma_z$ può essere realizzato in

$$f_{M_s} = \binom{N}{\frac{N}{2} + M_s} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} + M_s\right)! \left(\frac{N}{2} - M_s\right)!} \quad \text{MODI} , \quad (1.34)$$

cioè a $\frac{N}{2} + M_s$ particelle diamo $\sigma_z = \frac{1}{2}$ a $\frac{N}{2} - M_s$ diamo $\sigma_z = -\frac{1}{2}$.

Uno stato con proiezione dello spin totale M_s può avere spin totale $s = |M_s|, |M_s + 1|, \dots, \frac{N}{2}$. Quindi il numero di modi possibili di avere proiezione M_s è uguale al numero di modi possibili di avere spin totale $s = |M_s|, |M_s + 1|, \dots, \frac{N}{2}$. Chiamando $g(s)$ il numero di modi possibili di avere spin totale s avremo

$$f(M_s) = g(s = |M_s|) + g(s = |M_s + 1|) + \dots + g\left(s = \frac{N}{2}\right) , \quad (1.35)$$

o anche

$$f(M_s + 1) = g(s = |M_s + 1|) + g(s = |M_s + 2|) + \dots + g\left(s = \frac{N}{2}\right) . \quad (1.36)$$

Sottraendo la prima e la seconda

$$g(s = |M_s|) = f(M_s) + f(M_s + 1) , \quad (1.37)$$

cioè il numero di modi possibili di avere spin totale s da N particelle a spin $\frac{1}{2}$ è

$$\begin{aligned} g(s) = f(s) - f(s + 1) &= \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} + s\right)! \left(\frac{N}{2} - s\right)!} - \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} + s + 1\right)! \left(\frac{N}{2} - s - 1\right)!} = \\ &= \frac{N!(2s + 1)}{\left(\frac{N}{2} + s + 1\right)! \left(\frac{N}{2} - s\right)!} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Quindi la molteplicità della rappresentazione di spin s è

$$\frac{N!(2s+1)}{\left(\frac{N}{2}+s+1\right)!\left(\frac{N}{2}-s\right)!} . \quad (1.39)$$

Consideriamo ad esempio il prodotto

$$2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2 , \quad (1.40)$$

cui corrisponde il tensore di rango 6: T^{ijklmn} . Abbiamo una rappresentazione di spin 3 con molteplicità $g(3) = 1$; una di spin 2 con $g(2) = 5$; una di spin 1 con $g(1) = 9$; e una di spin 0 con $g(0) = 5$. Allora

$$2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2 \otimes 2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 7 \quad (1.41)$$

1.3 $SU(3)$

Definiamo **2 tipi di indici** per gli stati relativi alle rappresentazioni fondamentali 3 e $\bar{3}$:

$$\begin{aligned} |^i\rangle &\rightarrow |^i\rangle' = U^i_j |^j\rangle , \\ |_i\rangle &\rightarrow |_i\rangle' = |_j\rangle (U^\dagger)^j_i . \end{aligned} \quad (1.42)$$

Come nel caso di $SU(2)$ possiamo costruire le rappresentazioni irriducibili dal prodotto tensoriale di n rappresentazioni 3 e m rappresentazioni $\bar{3}$. Consideriamo il prodotto tensoriale $3 \otimes \bar{3}$:

$$u^i v^j = \frac{1}{2}(u^i v^j + u^j v^i) + \frac{1}{2}(u^i v^j - u^j v^i) = \frac{1}{2}(u^i v^j + u^j v^i) + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\epsilon_{klm}u^l v^m . \quad (1.43)$$

Poiché $\epsilon^{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j$, otteniamo

$$\boxed{u^i v^j = S^{ij} + \epsilon^{ijk}\phi_k = S^{ij} + A^{ij}} . \quad (1.44)$$

Abbiamo ridotto il prodotto diretto dei vettori u e v in due rappresentazioni, che non si mescolano rispetto ad una trasformazione del gruppo:

$$\begin{aligned} S^{ij'} &= \frac{1}{2}(u^{i'} v^{j'} + u^{j'} v^{i'}) = \frac{1}{2}(U^i_k U^j_l + U^j_k U^i_l)u^k v^l = \\ &= \frac{1}{2}(U^i_k U^j_l u^k v^l + U^j_l U^i_k u^l v^k) = U^i_k U^j_l S^{kl} , \\ A^{ij'} &= \frac{1}{2}(u^{i'} v^{j'} - u^{j'} v^{i'}) = \frac{1}{2}(U^i_k U^j_l - U^j_k U^i_l)u^k v^l = \\ &= \frac{1}{2}(U^i_k U^j_l u^k v^l - U^j_l U^i_k u^l v^k) = U^i_k U^j_l A^{kl} . \end{aligned} \quad (1.45)$$

Vediamo ora come trasforma il vettore a tre componenti $\phi_k = \epsilon_{klm}u^l v^m$. Consideriamo una trasformazione infinitesima, ovvero l'azione dei generatori sul vettore (ricorda che l'azione del generatore è $T^A|i\rangle = -|j\rangle(T^A)^j_i$):

$$\begin{aligned} \phi'_k &= \epsilon_{klm}u^l v^{m'} = \epsilon_{klm}[\delta_j^l + \iota\alpha_A(T^A)^l_j][\delta_n^m + \iota\alpha_B(T^B)^m_n]u^j v^n = \\ &= \epsilon_{kjm}u^j v^n + \iota\epsilon_{kjm}\alpha_A(T^A)^m_n u^j v^n + \iota\epsilon_{klm}\alpha_A(T^A)^l_j u^j v^n , \end{aligned} \quad (1.46)$$

e quindi

$$\delta\phi_k = i\alpha_A \epsilon_{kjm} [(T^A)^m_n u^j v^n + (T^A)^j_l u^l v^m]. \quad (1.47)$$

Per $k = 1$

$$\begin{aligned} \delta\phi_1 &= [(T^A)^3_1 u^2 v^1 + (T^A)^3_2 u^2 v^2 + (T^A)^3_3 u^2 v^3 + (T^A)^2_1 u^1 v^3 + (T^A)^2_2 u^2 v^3 + (T^A)^2_3 u^3 v^3 - \\ &\quad - (T^A)^2_1 u^3 v^1 - (T^A)^2_2 u^3 v^2 - (T^A)^2_3 u^3 v^3 - (T^A)^3_1 u^1 v^2 - (T^A)^3_2 u^2 v^2 - (T^A)^3_3 u^3 v^2] = \\ &= (T^A)^3_1 (u^2 v^1 - u^1 v^2) + (T^A)^3_3 (u^2 v^3 - u^3 v^2) + (T^A)^2_1 (u^1 v^3 - u^3 v^1) + (T^A)^2_2 (u^2 v^3 - u^3 v^2) = \\ &= [(T^A)^2_2 + (T^A)^3_3] (u^2 v^3 - u^3 v^2) + (T^A)^3_1 (u^2 v^1 - u^1 v^2) + (T^A)^2_1 (u^1 v^3 - u^3 v^1). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Confrontando con

$$\begin{aligned} (T^A)^k_1 \phi_k &= (T^A)^k_1 \epsilon_{klm} u^l v^m = \\ &= (T^A)^1_1 (u^2 v^3 - u^3 v^2) + (T^A)^2_1 (u^3 v^1 - u^1 v^3) + (T^A)^3_1 (u^1 v^2 - u^2 v^1) = \\ &= -[(T^A)^2_2 + (T^A)^3_3] (u^2 v^3 - u^3 v^2) - (T^A)^2_1 (u^1 v^3 - u^3 v^1) - (T^A)^3_1 (u^2 v^1 - u^1 v^2), \end{aligned} \quad (1.49)$$

(poiché $(T^A)^2_2 + (T^A)^3_3 = -(T^A)^1_1$), e quindi

$$\delta\phi_1 = -(T^A)^k_1 \phi_k. \quad (1.50)$$

In generale $\delta\phi_k = -\phi_m (T^A)^m_k$ e dunque ϕ_k trasforma con la rappresentazione coniugata $\bar{3}$ (ricorda che la rappresentazione coniugata ha come generatori $-(T^A)^*$, cioè: $\phi_i^* = e^{-i\alpha_A (T^A)^*_{ij}} \phi_j^*$).

Il tensore simmetrico S^{ij} ha 6 componenti indipendenti e corrisponde ad uno stato della rappresentazione irriducibile 6. Il secondo termine ha 3 componenti indipendenti e trasforma come un vettore della $\bar{3}$. Quindi il prodotto tensoriale $3 \otimes 3$ si decompone in

$$\boxed{3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}}. \quad (1.51)$$

Consideriamo il prodotto tensoriale

$$3 \otimes \bar{3}, \quad (1.52)$$

avente tensori con componenti $u^i v_j$:

$$u^i v_j = \left(u^i v_j - \frac{1}{3} \delta_j^i u^k v_k \right) + \frac{1}{3} \delta_j^i u^k v_k. \quad (1.53)$$

Con un indice alto e uno basso non ci sono proprietà di simmetria da rispettare, dobbiamo solo porre la traccia del tensore a 2 indici uguale a zero: ne risulta un tensore a due indici con traccia nulla avente 8 componenti indipendenti e uno scalare con una sola componente, corrispondente alla rappresentazione di singoletto:

$$\boxed{3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1}. \quad (1.54)$$

I tensori con un numero maggior di indici si decompongono applicando ad ogni coppia di indici **simmetrizzazione** e **antisimmetrizzazione** ed eliminando le tracce prese tra un indice alto e uno basso.

Consideriamo il prodotto tensoriale $3 \otimes 3 \otimes 3$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = \otimes(3 \otimes 3) = 3 = \otimes(6 \oplus \bar{3}) = 3 \otimes 6 \oplus 3 \otimes \bar{3} = 3 \otimes 6 \oplus 8 \oplus 1 . \quad (1.55)$$

Per la $3 \otimes 6$ abbiamo il prodotto tensoriale

$$q^i S^{jk} \quad \text{con} \quad S^{jk} = S^{kj} , \quad (1.56)$$

con

$$\begin{aligned} q^i S^{jk} &= \frac{1}{3}(q^i S^{jk} + q^j S^{ki} + q^k S^{ij}) + \frac{1}{3}(q^i S^{jk} - q^j S^{ki}) + \frac{1}{3}(q^i S^{jk} - q^k S^{ij}) = \\ &= \Sigma^{ijk} + \frac{1}{3}\epsilon^{ijl}\epsilon_{lmn}q^m S^{nk} + \frac{1}{3}\epsilon^{ikl}\epsilon_{lmn}q^m S^{nj} = \\ &= \Sigma^{ijk} + \frac{1}{3}\epsilon^{ijl}T_l^k + \frac{1}{3}\epsilon^{ikl}T_l^j . \end{aligned} \quad (1.57)$$

Scrivo $T_l^k = (T_l^k - \frac{1}{3}\delta_l^k T) = \tilde{T}_l^k + \frac{1}{3}\delta_l^k T$, cosicch 

$$\begin{aligned} q^i S^{jk} &= \Sigma^{ijk} + \frac{1}{3}\epsilon^{ijl}\tilde{T}_l^k + \frac{1}{3}\epsilon^{ikl}\tilde{T}_l^j + \frac{1}{9}\epsilon^{ijl}\delta_l^k T + \frac{1}{9}\epsilon^{ikl}\delta_l^j T , \\ \rightarrow q^i S^{jk} &= \Sigma^{ijk} + \frac{1}{3}\left(\epsilon^{ijl}\tilde{T}_l^k + \epsilon^{ikl}\tilde{T}_l^j\right) , \end{aligned} \quad (1.58)$$

e quindi avremo

$$\boxed{3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8' \oplus 10} . \quad (1.59)$$

FLAVIANO MORONE - CROMODINAMICA QUANTISTICA

Chapter 2

Modello a quark

I **quark** sono fermioni a interazione forte di **spin** $\frac{1}{2}$ e **parità positiva** per convenzione. Gli **antiquark** hanno parità **negativa**. I quark hanno **numero barionico** additivo $\frac{1}{3}$; gli antiquark $-\frac{1}{3}$.

Ricordiamo la formula di Gell-Mann e Nishijima:

$$Q = I_z + \frac{B + (S + C + B' + T)}{2} . \quad (2.1)$$

2.1 Mesoni

Nel modello a quark i mesoni sono stati legati $q\bar{q}'$ di un quark e un antiquark e hanno numero barionico $B = 0$. Se il momento angolare orbitale dello stato $q\bar{q}'$ è ℓ , la parità P è $P = (-1)^{\ell+1}$.

Lo spin del mesone è dato da

$$|\ell - s| < J < |\ell + s| , \quad (2.2)$$

dove $s = 0$ se gli spin dei quark sono **antiparalleli** o $s = 1$ se gli spin dei quark sono **paralleli**.

La coniugazione di carica (C -parità) è definita solo per gli stati $q\bar{q}$ fatti di quark e dello stesso antiquark ed è $C = (-1)^{\ell+s}$.

Consideriamo i primi 3 quark più leggeri

$$\begin{cases} u & M_u \sim 4 \text{ Mev} \\ d & M_d \sim 8 \text{ Mev} \\ s & M_s \sim 100 \text{ Mev} \end{cases} , \quad (2.3)$$

per i quali vale

$$\frac{M_q}{1 \text{ Gev}} \ll 1 . \quad (2.4)$$

Possiamo pensare che questi 3 **sapori** siano approssimativamente degeneri in massa e raggrupparli in un tripletto di $SU(3)$:

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \rightarrow q^{i'} = U^i_j q^j . \quad (2.5)$$

I mesoni ottenuti combinando un quark e un antiquark appartengono alle rappresentazioni irriducibili del prodotto di rappresentazioni $3 \otimes 3$, cioè sono raggruppati in un ottetto e un singoletto ($3 \otimes 3 = 8 \oplus 1$). L'operatore $I_z = \frac{1}{2}\lambda_3$ (3^a componente di **isospin**) è

$$I_z = \frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

e quindi

$$\begin{aligned} I_z \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ I_z \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \\ I_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} &= 0 \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'operatore di **ipercarica** è

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

e

$$[I_z, Y] = 0 \quad (\text{l'algebra ha rango } r = 2). \quad (2.9)$$

Con questa definizione

$$\boxed{Q = I_z + \frac{1}{2}Y}, \quad (2.10)$$

cosicché

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Q \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} &= \left(0 - \frac{1}{6} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

e quindi

$$\boxed{Q_u = \frac{2}{3}, \quad Q_d = -\frac{1}{3}, \quad Q_s = -\frac{1}{3}.} \quad (2.12)$$

Dalla formula di Gell-Mann e Nishijima

$$\boxed{Y = B + S} . \quad (2.13)$$

Torniamo al prodotto $3 \otimes 3 = 8 \oplus 1$. La 8 è un tensore

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u\bar{u} - \frac{1}{3}d\bar{d} - \frac{1}{3}s\bar{s} & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & \frac{2}{3}d\bar{d} - \frac{1}{3}u\bar{u} - \frac{1}{3}s\bar{s} & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & \frac{2}{3}s\bar{s} - \frac{1}{3}u\bar{u} - \frac{1}{3}d\bar{d} \end{pmatrix} . \quad (2.14)$$

Questa matrice può sicuramente essere scritta come

$$\mathcal{P} = C_A \lambda^A , \quad \frac{C_A}{2} = \text{tr}(\mathcal{P} \lambda_A) . \quad (2.15)$$

Ora

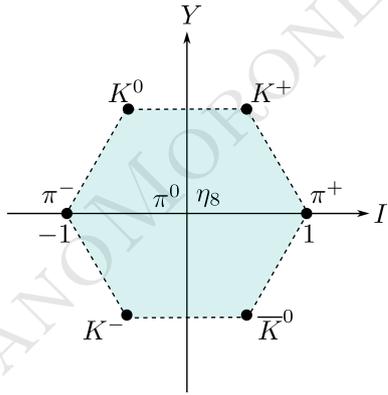
$$\text{tr}(\mathcal{P} \lambda_A) = (\mathcal{P} \lambda_A)^i_i = \mathcal{P}^i_j (\lambda_A)^j_i = q_j (\lambda_A)^j_i q^i = \bar{q} \lambda_A q , \quad (2.16)$$

e quindi

$$C_A = 2\bar{q} \lambda_A q . \quad (2.17)$$

Quindi l'ottetto dei mesoni sarà

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}d + \bar{d}u \\ i(u\bar{d} - d\bar{u}) \\ u\bar{u} - d\bar{d} \\ \bar{u}s + u\bar{s} \\ i(u\bar{s} - \bar{u}s) \\ \bar{d}s + s\bar{d} \\ i(\bar{s}d - \bar{d}s)u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{u}d \\ \bar{d}u \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \bar{u}s \\ u\bar{s} \\ \bar{d}s \\ s\bar{d} \\ \frac{1}{2}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \end{pmatrix} . \quad (2.18)$$



I	Q	Y	nome	contenuto in quark
-1	-1	0	π^-	$\bar{u}d$
1	1	0	π^+	$\bar{d}u$
0	0	0	π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$
-1/2	-1	-1	K^-	$\bar{u}s$
1/2	1	1	K^+	$\bar{s}u$
1/2	0	-1	\bar{K}^0	$\bar{d}s$
-1/2	0	1	K^0	$s\bar{d}$
0	0	0	η_8	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/2$

I multipletti dei mesoni si indicano con J^{PC} . Poiché i quark hanno momento angolare ℓ :

$$\begin{aligned} C &= (-1)^{\ell+s} , \\ P &= (-1)^{\ell+1} , \\ |\ell - s| \leq J \leq |\ell + s| . \end{aligned} \quad (2.19)$$

- Per $\ell = 0$, $s = 0$ si ha l'ottetto dei mesoni **pseudoscalari** (0^{-+}).
- Per $\ell = 0$, $s = 1$ si ha l'ottetto dei mesoni **vettoriali** (1^{--}).
- Per $\ell \neq 0$ si hanno tutte le altre eccitazioni orbitali. (Esistono chiaramente anche eccitazioni radiali).

Nella decomposizione $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ il singoletto è lo stato:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) . \quad (2.20)$$

I **barioni** sono fermioni con numero barionico $B = 1$ e sono stati legati di 3 quark (qqq). I barioni "ordinari" sono fatti di quark u, d, s . Come per i mesoni poniamo u, d, s in un tripletto di $SU(3)$ cosicché i barioni appartengono alle rappresentazioni irriducibili del prodotto $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8' \oplus 1$, con un decupletto, due ottetti e un singoletto.

Chapter 3

Teorema di Wigner-Eckart

Consideriamo il caso di $SU(2)$ e calcoliamo l'elemento di matrice di un operatore tensoriale che trasforma sotto rappresentazioni di spin s di $SU(2)$, O_ℓ^s , con $\ell \in [-s, \dots, s]$. Allora

$$[J_A, O_\ell^s] = O_m^s [J_A]_{m\ell} . \quad (3.1)$$

Consideriamo uno stato della rappresentazione di spin j , $|j, m, \alpha\rangle$. Applicando un operatore tensoriale O_ℓ^s ad uno stato $|j, m, \alpha\rangle$ otteniamo un nuovo stato che per proprietà di trasformazione è indistinguibile dal vettore prodotto tensoriale dei due stati corrispondenti.

Infatti

$$\begin{aligned} J_3 O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle &= [J_3, O_\ell^s] |j, m, \alpha\rangle + O_\ell^s J_3 |j, m, \alpha\rangle = \\ &= O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle [J_3]_{\ell\ell} + O_\ell^s J_3 |j, m, \alpha\rangle m = \\ &= (\ell + m) O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle , \end{aligned} \quad (3.2)$$

cioè

$$O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle \sim |s, \ell\rangle \otimes |j, m\rangle . \quad (3.3)$$

Il teorema pone delle forti limitazioni sugli elementi di matrice degli operatori tensoriali

$$\langle J, m', \beta | O_\ell^s |j, m, \alpha\rangle = \delta_{m', m+\ell} \langle J, \beta | O^s |j, \alpha\rangle \langle J, \ell + m | s, j, \ell, m\rangle , \quad (3.4)$$

dove $\langle J, \beta | O^s |j, \alpha\rangle$ è l'elemento di matrice ridotto. Si può intuire la presenza dei vari termini notando che $O_\ell^s |j, m\rangle \sim |s, \ell\rangle \otimes |j, m\rangle$. Quindi la $\delta_{m', m+\ell}$ è evidente. Il termine $\langle J, m' | s, j, \ell, m\rangle$ è il coefficiente di Clebsch-Gordan. Il termine $\langle J, \beta | O^s |j, \alpha\rangle$, l'elemento di matrice ridotto, non dipende da ℓ e m .

- Estendiamo al caso di $SU(3)$.

Consideriamo un elemento di matrice $\langle u | \hat{W} | v \rangle$ con \hat{W} operatore tensoriale e u e v tensori appartenenti a rappresentazioni irriducibili. Si inizia col decomporre il prodotto tensoriale $w \otimes v$ in rappresentazioni irriducibili dopodiché le componenti irriducibili che non si annullano solo quelle appartenenti alla stessa rappresentazione di u , che si ripetono ogni volta che la rappresentazione irriducibile di u appare nel prodotto tensoriale $w \otimes v$. Dato che l'elemento di matrice deve essere

invariante, esso sarà in generale una combinazione lineare di tracce calcolate per i prodotti di tensori \bar{u}, v, W .

Supponiamo che u, v, W siano tutti appartenenti ad una 8. Allora

$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus 10' \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1, \quad (3.5)$$

e quindi le uniche proiezioni non nulle su $\langle u|$ saranno quelle date dalle due 8. Ci saranno due soli parametri indipendenti negli elementi $\langle u|W|v\rangle$ corrispondenti alle 2 tracce indipendenti $\text{tr}(\bar{u}Wv)$ e $\text{tr}(\bar{u}vW)$, e quindi

$$\langle u|W|v\rangle = \lambda_1 \text{tr}(\bar{u}Wv) + \lambda_2 \text{tr}(\bar{u}vW). \quad (3.6)$$

3.1 Applicazione del teorema di Wigner-Eckart

Supponiamo di suddividere le **interazioni forti** in

- **int. molto forti:** costituiscono la parte prevalente dell'interazione e sono invarianti per l'azione di $SU(3)$;
- **int. medio forti:** non ammettono $SU(3)$ con gruppo di simmetria ma conservano **isospin** e **ipercarica** (generati dalle prime 3 e dall'ultima delle matrici di Gell-Mann. Questo equivale ad assumere che la massa dell'up e del down sono uguali: $m_u = m_d$).

Le interazioni molto forti sono invarianti per trasformazioni di $SU(3)$ applicate a un ottetto di stati barionici B_j^i :

$$B_j^i = \begin{pmatrix} \Sigma_0/\sqrt{2} + \Lambda/\sqrt{6} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\Sigma_0/\sqrt{2} + \Lambda/\sqrt{6} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & 2\Lambda/\sqrt{6} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

La massa di una particella è uguale al valore della sua energia di riposo, quindi può essere calcolata come valor medio dell'hamiltoniana di interazione H_I sullo stato corrispondente alla particella:

$$H_I = H_F + MF, \quad (3.8)$$

dove H_F fornisce il valore maggiore della massa M_0 comune a tutti i **barioni** e H_{MF} dà una correzione alla massa comune, e dunque

$$M_B = \langle B|H_I|B\rangle = M_0 + \langle B|H_{MF}|B\rangle. \quad (3.9)$$

Cerchiamo di intuire la forma di H_{MF} . Consideriamo la lagrangiana del modello a quark

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{q}_f i \not{\partial} q_f - \bar{q} \mathcal{M} q, \quad (3.10)$$

con

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_d & \\ & & m_s \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

che possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_f \bar{q}_f i \not{\partial} q_f - \frac{m_u + m_d + m_s}{3} (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s) - \frac{m_u - m_d}{2} (\bar{u}u - \bar{d}d) - \\ & - \frac{m_u + m_d - 2m_s}{6} (\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s) , \end{aligned} \quad (3.12)$$

ovverosia

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{q}_f i \not{\partial} q_f - m_0 \bar{q}q - \Delta m_{\ell_s} \bar{q} \lambda_8 q . \quad (3.13)$$

Se consideriamo solo l'ultimo termine

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \sum_f \bar{q}_f i \not{\partial} q_f - m_0 \bar{q}q - \Delta m_{\ell_s} \bar{q} \lambda_8 q , \quad (3.14)$$

quindi

$$H_{\text{MF}} = \Delta m_{\ell_s} \bar{q} \lambda_8 q . \quad (3.15)$$

Nel caso dell'ottetto barionico avremo

$$\Delta M = \langle B | H_{\text{MF}} | B \rangle = \langle B | \lambda_8 | B \rangle \tilde{m} , \quad (3.16)$$

dove sia $|B\rangle$ che λ_8 appartengono a rappresentazioni di $SU(3)$ (\tilde{m} è solo per le dimensioni). Per il teorema di Wigner-Eckart

$$\begin{aligned} \langle B | \lambda_8 | B \rangle &= \alpha \text{tr}(\bar{B} \lambda_8 B) + \beta \text{tr}(\bar{B} B \lambda_8) = \\ &= \alpha \frac{(\bar{B} \bar{B})^1_1 + (\bar{B} \bar{B})^2_2 - 2(\bar{B} \bar{B})^3_3}{\sqrt{12}} + \beta \frac{(\bar{B} B)^1_1 + (\bar{B} B)^2_2 - 2(\bar{B} B)^3_3}{\sqrt{12}} . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ora

$$\bar{B} = (B^*)^T = \begin{pmatrix} \left(\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right)^* & (\Sigma^-)^* & (\Xi^-)^* \\ (\Sigma^+)^* & \left(-\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right)^* & (\Xi^0)^* \\ p^* & n^* & \left(\frac{-2\Lambda}{\sqrt{6}} \right)^* \end{pmatrix} , \quad (3.18)$$

e quindi

$$\begin{aligned} (\bar{B} \bar{B})^1_1 &= B^1_j \bar{B}^j_1 = \left| \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 + |\Sigma^+|^2 + |p|^2 , \\ (\bar{B} \bar{B})^2_2 &= B^2_j \bar{B}^j_2 = |\Sigma^-|^2 + \left| -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 + |n|^2 , \\ (\bar{B} \bar{B})^3_3 &= B^3_j \bar{B}^j_3 = |\Xi^-|^2 + |\Xi^0|^2 + \left| \frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \right|^2 , \end{aligned} \quad (3.19)$$

da cui otteniamo

$$\langle B | \lambda_8 | B \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{12}} [|\Sigma|^2 + |N|^2 - |\Lambda|^2 - 2|\Xi|^2] + \frac{\beta}{\sqrt{12}} [|\Sigma|^2 + |\Xi|^2 - |\Lambda|^2 - 2|N|^2] . \quad (3.20)$$

Sostituendo a B uno stato in particolare troviamo

$$\begin{aligned}
\Delta M_N &= \frac{\alpha}{\sqrt{12}} - \frac{2\beta}{\sqrt{12}} \rightarrow M_N = M_0 + \frac{1}{\sqrt{12}}(\alpha - 2\beta) \\
\Delta M_\Sigma &= \frac{\alpha}{\sqrt{12}} + \frac{\beta}{\sqrt{12}} \rightarrow M_\Sigma = M_0 + \frac{1}{\sqrt{12}}(\alpha + \beta) \\
\Delta M_\Lambda &= -\frac{\alpha}{\sqrt{12}} - \frac{\beta}{\sqrt{12}} \rightarrow M_\Lambda = M_0 - \frac{1}{\sqrt{12}}(\alpha + \beta) \\
\Delta M_\Xi &= -\frac{2\alpha}{\sqrt{12}} + \frac{\beta}{\sqrt{12}} \rightarrow M_\Xi = M_0 - \frac{1}{\sqrt{12}}(2\alpha - \beta) ,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned}
M_N + M_\Xi &= 2M_0 + \frac{1}{\sqrt{12}}(-\alpha - \beta) , \\
3M_\Lambda + M_\Sigma &= 4M_0 + \frac{1}{\sqrt{12}}(-2\alpha - 2\beta) ,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

e quindi troviamo la seguente formula

$$\boxed{2(M_N + M_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma} , \tag{3.23}$$

detta **formula di Gell-Mann e Okubo**. Con questa formula possiamo prevedere la massa di un **multipletto di isospin** a partire dagli altri 3. Ad esempio, dati

$$\begin{aligned}
M_\Sigma &= 1190 \text{ MeV} , \\
M_\Xi &= 1320 \text{ MeV} , \\
M_N &= 940 \text{ MeV} ,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

avremo

$$M_\Lambda = \frac{1}{3}[2(M_N + M_\Xi) - M_\Sigma] = 1110 \text{ MeV} , \tag{3.25}$$

mentre il valore sperimentale è 1115 MeV, che rappresenta una differenza minore dell'1%.

Chapter 4

Lagrangiana pione-nucleone

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + \bar{N} i \not{\partial} N - \frac{1}{2} m_\pi^2 \text{tr}(\Sigma^2), \quad (4.1)$$

dove $\Sigma = \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} / 2$. Un'interazione possibile è

$$\mathcal{L}_I = Y(\bar{N} \Sigma N), \quad (4.2)$$

che è invariante di gauge:

$$(\bar{N} \Sigma N)' = \bar{N} U^\dagger U \Sigma U^\dagger U N = \bar{N} \Sigma N, \quad (4.3)$$

ed ha dimensione $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 4$.

Posso aggiungere ancora un termine $\frac{\lambda}{4}(\vec{\pi} \cdot \vec{\pi})^2$, che dimensione 4. Scrivo allora la lagrangiana più generale

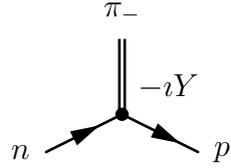
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})(\partial^\mu \vec{\pi}) - \frac{1}{2} m_\pi^2 \vec{\pi}^2 + \bar{N} i \not{\partial} N - m_N \bar{N} N + Y \bar{N} \frac{\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}}{2} N + \frac{\lambda}{4}(\vec{\pi} \cdot \vec{\pi})^2, \quad (4.4)$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} &= \frac{\sigma_+ \pi_- + \sigma_- \pi_+}{2} + \sigma_3 \pi_3 = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2} \frac{(\pi_1 - i\pi_2)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2} \frac{(\pi_1 + i\pi_2)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sigma_3 \pi_3 = \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pi_- + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pi_+ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \pi_0 \end{aligned}, \quad (4.5)$$

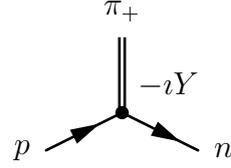
$$\begin{aligned} Y \bar{N} \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} N &= Y(\bar{p} \bar{n}) \left[\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pi_- + \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pi_+ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \pi_0 \right] \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \\ &= Y \left[\sqrt{2} \bar{p} n \pi_- + \sqrt{2} \bar{n} p \pi_+ + \sqrt{2} \frac{(\bar{p} p - \bar{n} n)}{\sqrt{2}} \pi_0 \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Consideriamo il termine $Y \sqrt{2} \bar{p} n \pi_-$



$$\mathcal{A} \propto \left(\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \langle 1, 0 \right| \right. \right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle , \quad (4.7)$$

e il termine $Y \sqrt{2} \bar{n} p \pi_+$



$$\mathcal{A} \propto \left(\left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| \langle 1, 1 \right| \right. \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle , \quad (4.8)$$

cioè l'ampiezza \mathcal{A} è proporzionale al coefficiente di Clebsch-Gordan.

La lagrangiana **pione-nucleone** è invariante per trasformazioni di $SU(2)$. Le correnti conservate sono

$$J_\mu^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^a)} (T^A)^{ab} \phi^b \quad \text{con} \quad \partial^\mu J_\mu^A = 0 , \quad (4.9)$$

e quindi

$$Q^A = \int d^3x J_0^A(\vec{x}, t) = \text{cost} . \quad (4.10)$$

Calcolo

$$[Q^C, \phi^a] = \int d^3x [\pi^\ell (T^C)^{\ell b} \phi^b, \phi^a] = \int d^3x \delta_a^\ell (T^C)^{\ell b} \phi^b \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = (T^C)^{ab} \phi^b . \quad (4.11)$$

Allora

$$\phi^a + \delta \phi^a = \phi^a + i\alpha^A (T^A)^{ab} \phi^b = \phi^a + i\alpha^A [Q^A, \phi^a] , \quad (4.12)$$

e quindi

$$\boxed{\phi' = e^{i\alpha_A Q^A} \phi e^{-i\alpha_A Q^A}} . \quad (4.13)$$

Inoltre

$$[Q^A, Q^B] = i f^{ABC} Q^C , \quad (4.14)$$

cioè, in sostanza, le cariche conservate sono proprio i generatori del gruppo.

Nel caso della lagrangiana pione-nucleone:

$$\begin{aligned} J_\mu^A &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu N^a)} (T_{1/2}^A)^{ab} N^b + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \pi^a)} (T_1^A)^{ab} \pi^b = \\ &= i \bar{N} \gamma_\mu \frac{\sigma^A}{2} N + (\partial_\mu \pi)^a (T^A)^{ab} \pi^b - i \epsilon^{Aab} (\partial_\mu \pi)^a \pi^b , \end{aligned} \quad (4.15)$$

che può essere scritta come

$$\boxed{J_\mu^A = \bar{N} \gamma_\mu \frac{\sigma^A}{2} N + (\pi \times \partial_\mu \pi)^A} . \quad (4.16)$$

4.1 Evidenza del colore

4.1.1 Δ^{++}

Consideriamo la particella Δ^{++} . Dal modello a quark risulta essere formata da 3 quark di sapore u . Questa particella ha spin $\frac{3}{2}$ ed essendo il barione più leggero possiamo assumere che $L = 0$, cioè la funzione d'onda spaziale è simmetrica. Per avere $J = \frac{3}{2}$:

$$\Delta^{++} = u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow . \quad (4.17)$$

Quindi la funzione d'onda di spin è simmetrica, così come quella di sapore:

$$\psi_{\Delta^{++}} = \psi_{\text{spazio}} \psi_{\text{sapore}} \psi_{\text{spin}} , \quad (4.18)$$

ma allora non rispetta la statistica di Fermi, essendo i 3 quark u fermioni identici.

Assegnando a ciascun quark un nuovo numero quantico (**colore**) possiamo costruire una funzione d'onda completamente antisimmetrica:

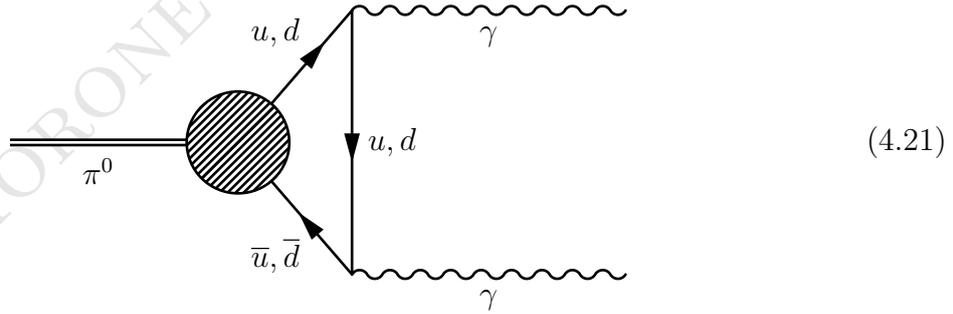
$$\begin{aligned} \Delta^{++} &= \epsilon^{ABC} u_A^\uparrow u_B^\uparrow u_C^\uparrow , \\ \psi_{\Delta^{++}} &= \psi_{\text{spazio}} \psi_{\text{sapore}} \psi_{\text{spin}} \psi_{\text{colore}} \quad \text{complet.antisimmetrica} \end{aligned} \quad (4.19)$$

- Solo i singoletti di colore possono esistere come stati asintotici:

$$\begin{array}{cc} \text{MESONI} & \text{BARIONI} \\ \frac{1}{3} \sum_i \bar{q}_i q_i & \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} q_i q_j q_k . \end{array} \quad (4.20)$$

4.1.2 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

Consideriamo il decadimento del π^0 in 2 fotoni:



L'ampiezza è proporzionale al numero di quark nel loop:

$$\mathcal{A}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \propto \text{numero di quark nel loop} , \quad (4.22)$$

e quindi troviamo il rate di decadimento

$$\Gamma = \frac{m_\pi^3}{32\pi f_\pi^2} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \rightarrow N_c = 3.06 \pm 0.10 . \quad (4.23)$$

FLAVIANO MORONE - CROMODINAMICA QUANTISTICA

Chapter 5

Teoria di gauge

Consideriamo la lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - V(\phi^\dagger \phi)) , \\ V(\phi^\dagger \phi) &= \mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^4 .\end{aligned}\quad (5.1)$$

\mathcal{L} è invariante sotto le trasformazioni globali

$$\begin{cases} \phi' = e^{i\alpha} \phi \\ (\phi^\dagger)' = \phi^\dagger e^{-i\alpha} \end{cases}\quad (5.2)$$

Se $\alpha = \alpha(x)$ allora $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$, cosicché $(D_\mu \phi)' = U(x) D_\mu \phi$.

Consideriamo il caso di un gruppo di trasformazioni non abeliano:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{d_R} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \phi'_i = U_{ij} \phi_j \\ (\phi^\dagger)' = \phi^\dagger U^\dagger_{ji} \end{cases} .\quad (5.3)$$

Scrivo la derivata covariante come

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i G_\mu \phi ,\quad (5.4)$$

e richiedo che valga $(D_\mu \phi)' = U D_\mu \phi$, cioè

$$\begin{aligned}(\partial_\mu \phi' - i G'_\mu \phi') &= U (\partial_\mu \phi - i G_\mu \phi) \\ \rightarrow \partial_\mu [U \phi] - i G'_\mu U \phi &= U \partial_\mu \phi - U i G_\mu \phi \\ \rightarrow (\partial_\mu U) \phi + U \partial_\mu \phi - i G'_\mu U \phi &= U \partial_\mu \phi - i U G_\mu \phi \\ \rightarrow G'_\mu U \phi &= U G_\mu \phi - i (\partial_\mu U) \phi \quad \forall \phi ,\end{aligned}\quad (5.5)$$

e quindi

$$\boxed{G'_\mu = U G_\mu U^\dagger - i (\partial_\mu U) U^\dagger} .\quad (5.6)$$

Consideriamo una trasformazione infinitesima $U = 1 + i\alpha^A T^A$, e dunque

$$G'_\mu = (1 + i\alpha \cdot T) G_\mu (1 - i\alpha \cdot T) + (\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot T = G_\mu + i\alpha [T, G_\mu] + (\partial_\mu \vec{\alpha}) \cdot T + O(\alpha^2) .\quad (5.7)$$

Ponendo $G_\mu = G_\mu^A T^A$ avremo

$$\begin{aligned} (G_\mu^A T^A)' &= G_\mu^A T^A + \imath \alpha_B G^C [T^B, T^C] + \partial_\mu \alpha^A T^A = \\ &= G_\mu^A T^A - \alpha_B G^C f^{BCA} T^A + (\partial_\mu \alpha^A) T^A, \end{aligned} \quad (5.8)$$

e quindi la legge di trasformazione del campo di gauge è

$$\boxed{G_\mu^{A'} = G_\mu^A - f^{ABC} \alpha_B G_\mu^C + \partial_\mu \alpha^A}. \quad (5.9)$$

A partire dai campi di gauge possiamo costruire un altro invariante, che è

$$\text{tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}), \quad (5.10)$$

con

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu - \imath [G_\mu, G_\nu]. \quad (5.11)$$

Dimostro che

$$G'_{\mu\nu} = U G_{\mu\nu} U^\dagger. \quad (5.12)$$

Innanzitutto proviamo che

$$[D_\mu, D_\nu] = \imath G_{\mu\nu}. \quad (5.13)$$

Avremo

$$\begin{aligned} [\partial_\mu - \imath G_\mu, \partial_\nu - \imath G_\nu] &= [\partial_\mu, -\imath G_\nu] + [-\imath G_\mu, \partial_\nu] + [-\imath G_\mu, -\imath G_\nu], \\ [\partial_\mu, -\imath G_\nu] \psi &= -\imath \partial_\mu G_\nu \psi + \imath G_\nu \partial_\mu \psi = -\imath (\partial_\mu G_\nu) \psi, \\ \rightarrow [D_\mu, D_\nu] &= -\imath \partial_\mu G_\nu + \imath \partial_\nu G_\mu - [G_\mu, G_\nu] = \imath G_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ora

$$D'_\mu = \partial_\mu - \imath G'_\mu = \partial_\mu - \imath U G_\mu U^\dagger - (\partial_\mu U) U^\dagger = U D_\mu U^\dagger - (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (5.15)$$

allora

$$\begin{aligned} D'_\mu D'_\nu &= (U D_\mu U^\dagger - (\partial_\mu U) U^\dagger) (U D_\nu U^\dagger - (\partial_\nu U) U^\dagger) = \\ &= U D_\mu D_\nu U^\dagger - U D_\mu U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger - (\partial_\mu U) U^\dagger U D_\nu U^\dagger + (\partial_\mu U) U^\dagger (\partial_\nu U) U^\dagger \\ D'_\nu D'_\mu &= U D_\nu D_\mu U^\dagger - U D_\nu U^\dagger (\partial_\mu U) U^\dagger - (\partial_\nu U) U^\dagger U D_\mu U^\dagger + (\partial_\nu U) U^\dagger (\partial_\mu U) U^\dagger, \end{aligned} \quad (5.16)$$

e quindi

$$D'_\mu D'_\nu - D'_\nu D'_\mu = U (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) U^\dagger, \quad (5.17)$$

da cui

$$\boxed{G'_{\mu\nu} = U G_{\mu\nu} U^\dagger}. \quad (5.18)$$

Quindi il termine $-\frac{1}{2} \text{tr}(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu})$ è invariante di gauge.

Ponendo $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^A T^A = \partial_\mu G_\nu^A T^A - \partial_\nu G_\mu^A T^A - \imath G_\mu^B G_\nu^C \imath f^{BCA} T^A$, troviamo

$$\boxed{G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + f^{ABC} G_\mu^B G_\nu^C}. \quad (5.19)$$

Inoltre

$$\boxed{-\frac{1}{2}\text{tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu}}, \quad (5.20)$$

poiché normalizziamo i generatori come

$$\text{tr}(T^A T^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}. \quad (5.21)$$

Per una trasformazione infinitesima

$$G'_{\mu\nu} = (1 + i\alpha \cdot T)G_{\mu\nu}(1 - i\alpha \cdot T) = G_{\mu\nu} + i\alpha[T, G_{\mu\nu}], \quad (5.22)$$

da cui

$$\boxed{(G_{\mu\nu}^A)' = G_{\mu\nu}^A - f^{ABC}\alpha^B G_{\mu\nu}^C}. \quad (5.23)$$

Per una trasformazione del tipo $U = e^{ig\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{T}}$ avremo

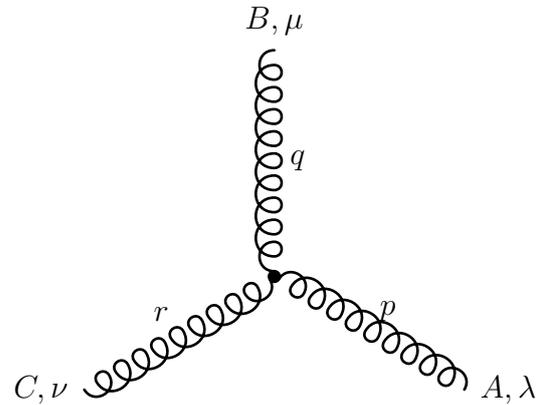
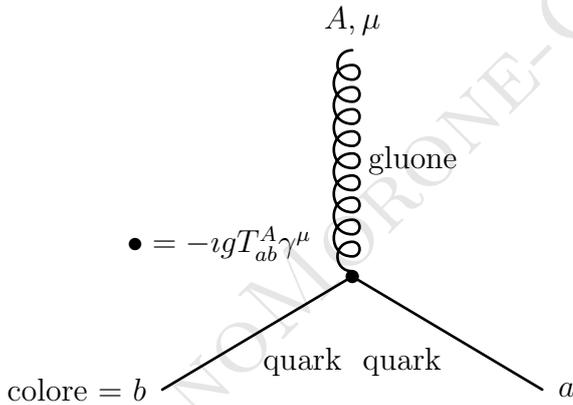
$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - igG_\mu, \\ G_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + gf^{ABC}G_\mu^B G_\nu^C. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Prendendo come gruppo di simmetria $SU(3)$ possiamo scrivere la lagrangiana della QCD

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{q}_f(i\not{D} - m_f)q_f - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu}}, \quad (5.25)$$

dove il primo termine contiene l'interazione **quark-gluone** e il secondo l'interazione tra i **gluoni**.

5.1 Regole di Feynman



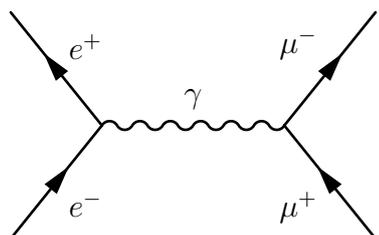
$$\bullet = gf^{ABC}[(p - q)_\nu g_{\lambda\mu} + (q - r)_\lambda g_{\mu\nu} + (r - p)_\mu g_{\nu\lambda}]$$

(5.26)

5.2 Rapporto inclusivo e liberta asintotica

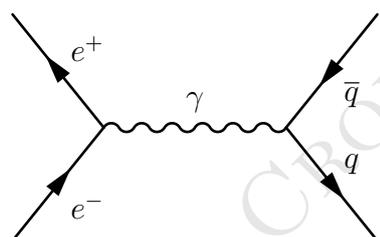
$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} . \quad (5.27)$$

La sezione d'urto per il processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ è:



$$\sigma_{\text{TOT}} = \frac{4}{3} \pi \frac{\alpha^2}{s} = \frac{4}{3} \pi \frac{\alpha^2}{E_{\text{cm}}^2} , \quad (5.28)$$

mentre la sezione d'urto del processo $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ è (all'ordine $O(\alpha_s^0)$):

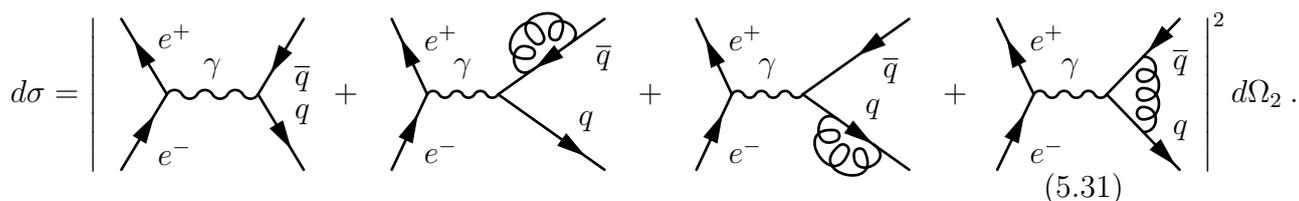


$$\sigma = \frac{4}{3} \pi \alpha^2 \frac{N_c}{s} \sum_f Q_f^2 . \quad (5.29)$$

Quindi

$$R = N_c \sum_f Q_f^2 . \quad (5.30)$$

Consideriamo la sezione d'urto $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ all'ordine $O(\alpha_s)$:



$$d\sigma = \left| \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \right|^2 d\Omega_2 . \quad (5.31)$$

La somma dei diagrammi è **finita ultravioletta** per la **conservazione della**

corrente elettromagnetica. Infatti, consideriamo i diagrammi:

$$+ + + + \quad (5.32)$$

Avremo:

$$\langle p' | J_\mu | p \rangle = f_+(q^2)(p + p')^\mu + f_-(q^2)(p - p')^\mu . \quad (5.33)$$

Per la conservazione della corrente

$$q^\mu \langle p' | J_\mu | p \rangle = f_-(q^2)q^2 = 0 \rightarrow f_-(q^2) = 0 , \quad (5.34)$$

e quindi

$$\langle p' | J_\mu | p \rangle = f_+(q^2)(p + p')^\mu . \quad (5.35)$$

Calcolo

$$\langle p' | Q | p \rangle = e \langle p' | p \rangle = e(2\pi)^3 \delta^3(p - p') 2\epsilon_p , \quad (5.36)$$

allora

$$f_+(q^2 = 0) = e . \quad (5.37)$$

I termini divergenti si ottengono per $p = p'$ e la parte divergente dell'ultimo diagramma dipende semplicemente da γ^μ . Quindi avremo

$$\begin{aligned} \langle p | J^\mu | p \rangle &= \bar{u}(p) e \gamma^\mu [1 + e^2 \Delta] u(p) , \\ \langle p | J^\mu | p \rangle &= 2e p^\mu = e \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) , \end{aligned} \quad (5.38)$$

e dunque

$$+ + + \Big|_{q^2=0} = 0 , \quad (5.39)$$

come conseguenza della conservazione della carica.

Ai processi $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$ aggiungiamo anche i processi di **Bremsstrahlung** soffice e collineare $e^+e^- \rightarrow \bar{q}qG$:

$$d\sigma_B = \left| \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ + \\ \text{diagram 2} \end{array} \right|^2 d\Omega_3 . \quad (5.40)$$

La sezione d'urto $d\sigma + d\sigma_B$ è **finita infrarossa** poiché corrisponde alla sezione d'urto inclusiva fisica.

All'ordine α_s otteniamo quindi:

$$R_{e^+e^-}(s) = N_c \sum_f Q_f^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots \right] \quad \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} . \quad (5.41)$$

Prima di andare all'ordine $O(\alpha_s^2)$ introduciamo le **trasformazioni di Pauli-Fierz**. Consideriamo

$$1, \gamma^5, \gamma^\mu, i\gamma^\mu\gamma^5, i\sigma^{\mu\nu} . \quad (5.42)$$

Numeriamo queste 16 matrici in una successione determinata γ^A ($A = 1, \dots, 16$).

1. $\text{tr}(\gamma^A) = 0 \quad A \neq 1,$
2. $\gamma^A \gamma_A = 1,$
3. $\frac{1}{4} \text{tr}(\gamma^A \gamma_B) = \delta^A_B,$ cioè le γ^A sono linearmente indipendenti e formano un sistema completo.

Avremo allora

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_A c_A \gamma^A , \\ c_A &= \frac{1}{4} \text{tr}(\gamma_A \Gamma) , \\ \Gamma_{ik} &= \sum_A c_A (\gamma^A)_{ik} = \frac{1}{4} \sum_A (\gamma^A)_{lm} \Gamma_{ml} (\gamma^A)_{ik} . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Supponendo che Γ contenga un solo elemento non nullo, diciamo Γ_{ml} , otteniamo

$$\delta_{im} \delta_{kl} = \frac{1}{4} \sum_A (\gamma_A)_{lm} (\gamma^A)_{ik} . \quad (5.44)$$

Moltiplichiamo da ambedue le parti per $\bar{\psi}_i^a \psi_k^b \bar{\psi}_l^c \psi_m^d$, cosicché avremo

$$\bar{\psi}_i^a \psi_k^b \bar{\psi}_l^c \psi_m^d = \frac{1}{4} \sum_A (\bar{\psi}^a \gamma^A \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma_A \psi^d) , \quad (5.45)$$

e quindi

$$\boxed{(\bar{\psi}^a \psi^d) (\bar{\psi}^c \psi^b) = \frac{1}{4} \sum_A (\bar{\psi}^a \gamma^A \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma_A \psi^d)} . \quad (5.46)$$

Questa formula riduce il prodotto di **2 forme bilineari scalari** a prodotti di **forme composte da altre coppie di fattori**.

Consideriamo i generatori di $SU(3)$, T^A ($A = 1, \dots, 8$):

1. $\text{tr}(T^A) = 0 \quad A \neq 1,$
2. $T^A T_A = 1,$
3. $\frac{1}{3}\text{tr}(T^A T_B) = \delta^{AB}.$

Possiamo scrivere una qualsiasi matrice come

$$\begin{aligned}\Sigma &= \sum_A c_A T^A, \\ \Sigma_{ik} &= \sum_A c_A (T^A)_{ik},\end{aligned}\tag{5.47}$$

con

$$c_A = \frac{1}{3}\text{tr}(\Sigma T^A).\tag{5.48}$$

Inoltre abbiamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\delta_{il}\delta_{km} &= \frac{1}{3}\delta_{ml}\delta_{ik} + \frac{1}{3}\vec{T}_{ml}^A \cdot \vec{T}_{ik}^A, \\ \delta_{ik}\delta_{lm} &= \frac{1}{3}\delta_{mk}\delta_{il} + \frac{1}{3}\vec{T}_{mk}^A \cdot \vec{T}_{il}^A,\end{aligned}\tag{5.49}$$

e quindi

$$\vec{T}_{ml}^A \cdot \vec{T}_{ik}^A = 3\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{ml}\delta_{ik} = 3\delta_{il}\delta_{km} - \frac{1}{3}\delta_{mk}\delta_{il} - \frac{1}{3}\vec{T}_{mk}^A \cdot \vec{T}_{il}^A,\tag{5.50}$$

da cui

$$\boxed{\vec{T}_{ml}^A \cdot \vec{T}_{ik}^A = -\frac{1}{3}\vec{T}_{mk}^A \cdot \vec{T}_{il}^A + \frac{8}{3}\delta_{mk}\delta_{il}}.\tag{5.51}$$

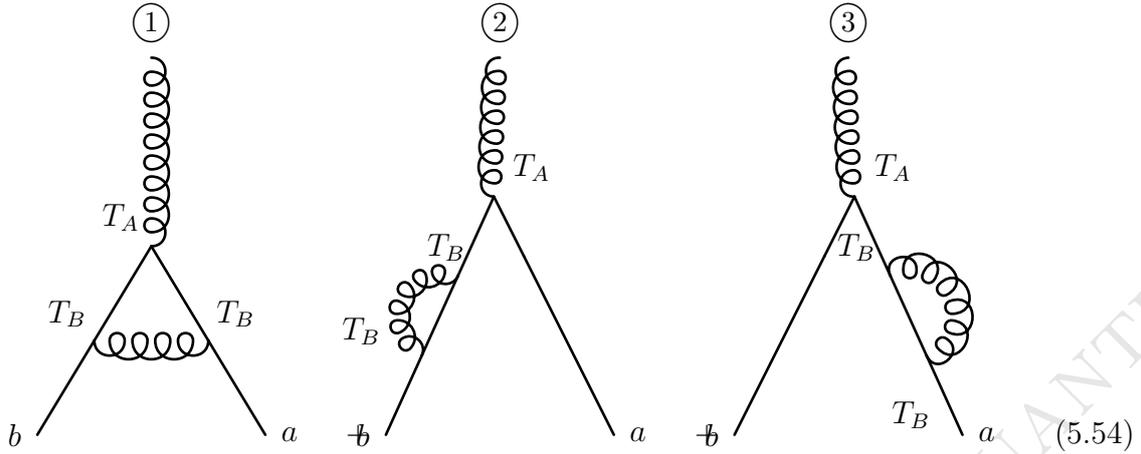
Per $U(N)$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{T}_{ml}^A \cdot \vec{T}_{ik}^A &= -\frac{1}{N}\vec{T}_{mk}^A \cdot \vec{T}_{il}^A + \frac{N^2-1}{N}\delta_{mk}\delta_{il}, \\ \vec{T}_{ml}^A \cdot \vec{T}_{ik}^A &= N\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{ml}\delta_{ik}\end{aligned}}.\tag{5.52}$$

Consideriamo la sezione d'urto $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ all'ordine $O(\alpha_s^2)$.

$$\left| \begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \bar{q} \\ \nearrow \\ e^+_\gamma \\ \searrow \\ e^- \\ \nearrow \\ q \end{array} & + & \begin{array}{c} \bar{q} \\ \nearrow \\ e^+_\gamma \\ \searrow \\ e^- \\ \nearrow \\ q \end{array} & + & \begin{array}{c} \bar{q} \\ \nearrow \\ e^+_\gamma \\ \searrow \\ e^- \\ \nearrow \\ q \end{array} & + & \begin{array}{c} \bar{q} \\ \nearrow \\ e^+_\gamma \\ \searrow \\ e^- \\ \nearrow \\ q \end{array} \end{array} \right| d\Omega_4.\tag{5.53}$$

Questi diagrammi divergono **ultravioletti**. Per capire la natura di queste divergenze, consideriamo ad esempio i diagrammi seguenti



Scriviamo ad esempio l'ampiezza del diagramma ② usando le regole in figura 5.1:

$$\textcircled{2} = \bar{q}^a(p') - i g_s \gamma^\mu (T^A)^{ad} i S_F(p) - i g_s \gamma^\alpha (T^B)^{dc} i S_F(p-k) - i g_s \gamma^\beta (T^B)^{cb} i D_{\alpha\beta}(k) q^b(p) G_\mu^A. \quad (5.55)$$

In tutto abbiamo 8 diagrammi del tipo ②, uno per ciascun tipo di gluone nel

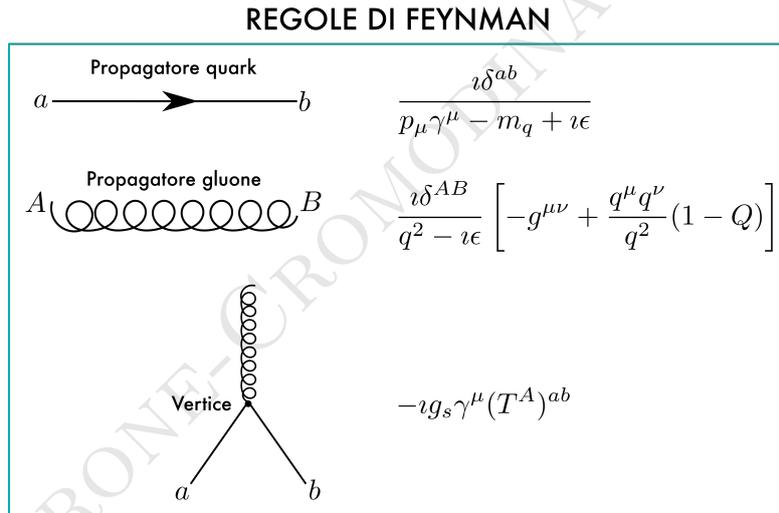


Figure 5.1: Regole di Feynman in QCD.

loop fermionico. Quindi complessivamente l'ampiezza può essere scritta come (tralasciando le ampiezze bispinoriali $\bar{q}(p')$, $q(p)$):

$$\sum_B (T^A)^{ad} (T^B)^{dc} (T^B)^{cb}. \quad (5.56)$$

Utilizzando le trasformazioni di Fierz $\sum_B (T^B)^{dc} (T^B)^{cb} = (N^2 - 1) \delta^{db}$, e quindi

$$\sum_B (T^A)^{ad} (T^B)^{dc} (T^B)^{cb} = (T^A)^{ab} (N^2 - 1). \quad (5.57)$$

Per il diagramma ③:

$$\textcircled{3} = \sum_B (T^B)^{ac} (T^B)^{cd} (T^A)^{db} = (T^A)^{ab} (N^2 - 1). \quad (5.58)$$

Ma per il diagramma ① abbiamo

$$\textcircled{1} = \sum_B (T^B)^{ac} (T^A)^{cd} (T^B)^{db} = (T^A)^{cd} [N \delta^{dc} \delta^{ab} - \delta^{ac} \delta^{db}] = -(T^A)^{ab}, \quad (5.59)$$

e allora

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} = (T^A)^{ab} \Lambda^\mu + (T^A)^{ab} (N^2 - 1) \gamma^\mu \Sigma_{\text{abeliano}} + (T^A)^{ab} (N^2 - 1) \gamma^\mu \Sigma_{\text{abeliano}}. \quad (5.60)$$

Questi tre diagrammi non si compensano per cancellare le divergenze **UV** a causa della presenza del termine $N^2 - 1$. Quindi i diagrammi che contribuiscono all'ordine α_s^2 divergono UV e quindi **rinormalizzano** la costante di accoppiamento forte (rinormalizzano, in sostanza, la **carica di colore**). Di conseguenza **dobbiamo introdurre un cut-off sugli impulsi nei loop al fine di regolarizzare le divergenze ultraviolette**. Avremo

$$R_{e^+e^-}(s) = N_c \sum_f Q_f^2 \left[1 + \frac{\alpha_0}{\pi} + \beta_0 \left(\frac{\alpha_0}{\pi} \right)^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{s} \right) + o \left(\frac{\alpha_0}{\pi} \right)^2 \right]. \quad (5.61)$$

Definiamo quindi la costante di accoppiamento forte rinormalizzata alla scala di energia s :

$$\frac{\alpha_s(s)}{\pi} = \frac{\alpha_0}{\pi} + \beta_0 \left(\frac{\alpha_0}{\pi} \right)^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{s} \right), \quad (5.62)$$

cosicché

$$R_{e^+e^-}(s) = N_c \sum_f Q_f^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right]. \quad (5.63)$$

Scegliamo $\alpha_s(s)$ in modo tale che alla scala s_0 :

$$R_{e^+e^-}(s_0)^{\text{th}} = R_{e^+e^-}(s_0)^{\text{exp}} = N_c \sum_f Q_f^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} \right]. \quad (5.64)$$

Ovviamente non possiamo predire il valore di $R_{e^+e^-}(s_0)$, che è usato per definire $\alpha_s(s_0)$ (allo stesso modo in QED α_{em} è fissata dal $g-2$ o dallo scattering Thomson).

Con questa definizione di $\alpha_s(s_0)$ otteniamo $R_{e^+e^-}(s)$ alla nuova scala s :

$$\begin{aligned} R_{e^+e^-}(s) &= N_c \sum_f Q_f^2 \left[1 + \frac{\alpha_0}{\pi} + \beta_0 \left(\frac{\alpha_0}{\pi} \right)^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{s_0} \right) + \beta_0 \left(\frac{\alpha_0}{\pi} \right)^2 \log \left(\frac{s_0}{s} \right) + \dots \right] = \\ &= N_c \sum_f Q_f^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} + \beta_0 \left(\frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} \right)^2 \log \left(\frac{s_0}{s} \right) + \dots \right] = \\ &= N_c \sum_f Q_f^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right], \end{aligned} \quad (5.65)$$

avendo usato il fatto che all'ordine α_0^2 abbiamo $\alpha_0^2 = \alpha_s^2(s_0)$.

- $R_{e^+e^-}(s)$ è **indipendente dal cut-off UV** Λ .
- $R_{e^+e^-}(s)$ è espresso solo in termini di quantità misurabili $s, s_0, \alpha_s(s_0), R_{e^+e^-}(s_0)^{\text{exp}}$.
- **La costante di accoppiamento forte dipende dalla scala di energia:**

$$\boxed{\frac{\alpha_s(s)}{\pi} = \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} + \beta_0 \left(\frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} \right)^2 \log \left(\frac{s_0}{s} \right)} . \quad (5.66)$$

Calcoliamo

$$\frac{d}{d \ln s} \alpha_s(s) = s \frac{d\alpha_s(s)}{ds} = -\beta_0 \left(\frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} \right)^2 = -\beta_0 \left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right)^2 , \quad (5.67)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\alpha_s(s_0)^2$ e $\alpha_s(s)^2$ è di ordine superiore. Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_s(s_0)}^{\alpha_s(s)} \frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} &= -\frac{\beta_0}{\pi^2} \int_{s_0}^s d \ln s , \\ -\frac{1}{\alpha_s(s)} + \frac{1}{\alpha_s(s_0)} &= -\frac{\beta_0}{\pi^2} \ln \left(\frac{s}{s_0} \right) , \\ \frac{1}{\alpha_s(s)} &= \frac{1}{\alpha_s(s_0)} + \frac{\beta_0}{\pi^2} \ln \left(\frac{s}{s_0} \right) = \frac{\pi^2 + \alpha_s(s_0)\beta_0 \ln(s/s_0)}{\alpha_s(s_0)\pi^2} , \\ \alpha_s(s) &= \frac{\alpha_s(s_0)\pi^2}{\pi^2 + \alpha_s(s_0)\beta_0 \ln(s/s_0)} = \frac{\alpha_s(s_0)}{1 + \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi^2} \beta_0 \ln(2/s_0)} , \end{aligned} \quad (5.68)$$

dunque troviamo

$$\boxed{\frac{\alpha_s(s)}{\pi} = \frac{\alpha_s(s_0)/\pi}{1 + \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi^2} \beta_0 \ln(2/s_0)}} . \quad (5.69)$$

In **QCD** $\beta_0 > 0$ con

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \sim \text{diagrammi} \quad (5.70)$$


Sebbene gli effetti quantistici hanno introdotto una dipendenza dall'energia, ancora non abbiamo una scala per decidere quando una data s può essere considerata grande o piccola. Una possibilità ovvia è scegliere la scala alla quale $\alpha_s(s)$ entra in un regime di forte accoppiamento (cioè $\alpha_s(s) \sim 1$) in cui la teoria delle perturbazioni non è più valida. Una definizione più precisa può essere ottenuta dalla soluzione dell'equazione differenziale della β -function.

Precisamente definiamo una scala Λ_{QCD}^2 alla quale si entra in un regime fortemente **non perturbativo** nel modo seguente:

$$\int_{\alpha_s(s_0)}^{\infty} \frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} = -b_0 \int_{s_0}^{\Lambda_{\text{QCD}}^2} d \ln s , \quad b_0 = \frac{\beta_0}{\pi^2} . \quad (5.71)$$

Quindi

$$\frac{1}{\alpha_s(s_0)} = -b_0 \ln \left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{s_0} \right) \rightarrow \boxed{\alpha_s(s_0) = \frac{1}{b_0 \ln \left(\frac{s_0}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)}}, \quad (5.72)$$

e allora

$$\begin{aligned} \alpha_s(s) &= \frac{\alpha_s(s_0)}{1 + \alpha_s(s_0)b_0 \ln \left(\frac{s}{s_0} \right)} = \frac{\alpha_s(s_0)}{1 + \alpha_s(s_0)b_0 \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) + \alpha_s(s_0)b_0 \ln \left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{s_0} \right)} = \\ &= \frac{\alpha_s(s_0)}{1 + \alpha_s(s_0)b_0 \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) - 1}, \\ &\rightarrow \boxed{\alpha_s(s) = \frac{1}{b_0 \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)}}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Se $\sqrt{s} \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ allora $\alpha_s(s) \gg 1$ e non vale la teoria delle perturbazioni.

Se $\sqrt{s} \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ allora $\alpha_s(s) \rightarrow 0$ e la teoria diventa **asintoticamente libera**.

Λ_{QCD}^2 non dipende da s , ma dipende dallo schema di rinormalizzazione e dall'ordine della teoria delle perturbazioni.

Il fatto che $\alpha_s(s) \gg 1$ per $\sqrt{s} \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ suggerisce che il **confinamento** a basse energie è piuttosto plausibile in QCD.

5.3 Equazioni del gruppo di rinormalizzazione

Abbiamo visto che

$$\boxed{\alpha_s(s) = \frac{1}{b_0 \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)}} \quad \text{Leading - order .} \quad (5.74)$$

In generale

$$\frac{d\alpha_s(s)}{d \ln s} = \beta[\alpha_s(s)] = -\beta_0 \alpha_s(s)^2 - \beta_1 \alpha_s(s)^3 - \dots \quad (5.75)$$

Inoltre

$$R_{e^+e^-}(s) = N_c \sum_f Q_f^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} + c_2 \left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right)^2 + c_3 \left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi} \right)^3 + \dots \right]. \quad (5.76)$$

Risolviamo l'equazione per $\alpha_s(s)$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_s(s_0)}^{\alpha_s(s)} \frac{d\alpha_s}{\beta_0 \alpha_s^2 + \beta_1 \alpha_s^3} &= -\ln \left(\frac{s}{s_0} \right) \approx \int \frac{d\alpha_s}{\beta_0 \alpha_s^2} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} \alpha_s \right) = \\ &= \frac{1}{\beta_0} \left(-\frac{1}{\alpha_s(s)} + \frac{1}{\alpha_s(s_0)} \right) - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln \left[\frac{\alpha_s(s)}{\alpha_s(s_0)} \right], \\ &\rightarrow -\frac{1}{\alpha_s(s)} + \frac{1}{\alpha_s(s_0)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \frac{\alpha_s(s)}{\alpha_s(s_0)} = -\beta_0 \ln \left(\frac{s}{s_0} \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_s(s)} &= \frac{1}{\alpha_s(s_0)} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \frac{\alpha_s(s)}{\alpha_s(s_0)} + \beta_0 \ln \left(\frac{s}{s_0} \right) = \\
&= \frac{1}{\alpha_s(s_0)} \left[1 + \beta_0 \alpha_s(s_0) \ln \left(\frac{s}{s_0} \right) - \frac{\beta_1}{\beta_0} \alpha_s(s_0) \ln \frac{\alpha_s(s)}{\alpha_s(s_0)} \right] = \\
&= \beta_0 \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) - \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \alpha_s(s) - \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \alpha_s(s_0) \sim \beta_0 \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \left(\beta_0 \ln \frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) \sim \\
&\sim \beta_0 \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) = \beta_0 \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right) \left[1 + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)}{\ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)} \right].
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Riassumendo

$$\boxed{\alpha_s(s) \sim \frac{1}{\beta_0 \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)}{\ln \left(\frac{s}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right)} \right]} \quad \text{Next - to - leading - order ,} \tag{5.79}$$

dove $\beta_1, \beta_0 > 0$ in QCD.

Chapter 6

Deep Inelastic scattering $e^- p \rightarrow e^- X$

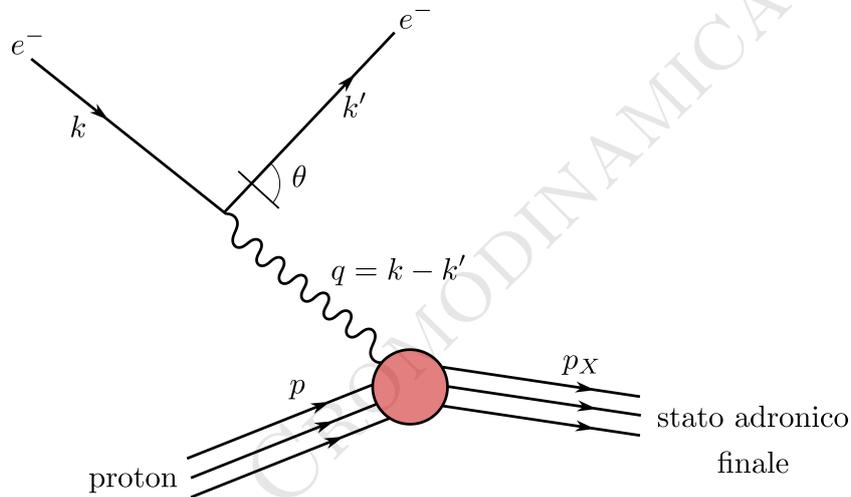


Figure 6.1: Diagramma di Feynman del processo $e^- p \rightarrow e^- X$

- **Variabili cinematiche**

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 \\ q &= (k - k') . \end{aligned} \quad (6.1)$$

- **Conservazione del 4-impulso**

$$\begin{aligned} k + p &= k' + p_X \\ k - k' + p &= p_X \\ q + p &= p_X \\ q^2 &= (k - k')^2 = 2m^2 - 2k \cdot k' \sim -2k \cdot k' = -2EE' + 2|\vec{p}||\vec{p}'| \cos \theta = -2EE'(1 - \cos \theta) \\ q^2 &\sim -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} < 0 \quad \text{TIOSPAZIO} . \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.1 Variabili di Bjorken

Consideriamo le quantità

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} > 0, \quad (6.3)$$

e

$$\nu = \frac{p \cdot q}{m_p} = E - E', \quad (6.4)$$

dove ν è l'energia trasferita dal leptone al sistema adronico. Nel sistema di riposo del protone $p \cdot q = m_p(E - E')$.

E ancora

$$W = p_X^2 = (p + q)^2 = m_p^2 - Q^2 + 2p \cdot q \geq m_p^2, \quad (6.5)$$

dove l'uguaglianza $W = m_p^2$ rappresenta il caso **elastico** con il protone nello stato finale.

Chiamiamo x la variabile

$$x = \frac{Q^2}{2(p \cdot q)} = \frac{Q^2}{2\nu m_p} \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6.6)$$

cosicché

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{m_p} p \cdot q = \frac{1}{2m_p} (p_X^2 + Q^2 - m_p^2), \\ x &= \frac{Q^2}{p_X^2 + Q^2 - m_p^2}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

dove il caso elastico si ottiene per $x = 1$ ($p_X^2 = m_p^2$).

Chiamiamo y la variabile

$$y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k} \quad \text{con} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{1 + \frac{m_{pX}}{2E}}, \quad (6.8)$$

cosicché

$$y = \frac{m_p \nu}{m_p E} = \frac{\nu}{E - E' + E'} = \frac{\nu}{\nu + E'} = \frac{1}{1 + E'/\nu} = \frac{1}{1 + \frac{Q^2}{4E\nu \sin^2(\theta/2)}} = \frac{1}{1 + \frac{m_{pX}}{2E \sin^2(\theta/2)}}. \quad (6.9)$$

Le condizioni per il **deep inelastic scattering** sono:

$$\left[\begin{array}{l} |q^2| \gg m_p^2 \\ W \gg m_p^2 \end{array} \right], \quad (6.10)$$

con

$$\begin{aligned} Q^2 &\rightarrow \infty \\ \nu &\rightarrow \infty \\ x &= \frac{Q^2}{2m_p \nu} = \text{cost} \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.2 Sezione d'urto

$$d\sigma = \sum_X \frac{|A_{e+p \rightarrow e'+X}|^2}{\phi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p_X-k') \prod_i \frac{d^3 p_{iX}}{2\epsilon_{iX} (2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{2\epsilon_{k'} (2\pi)^3} \quad (6.12)$$

$$\phi = 4\sqrt{(p \cdot k)^2 - m_p^2 m_e^2} \sim 4(p \cdot k) .$$

Calcoliamo l'ampiezza

$$\begin{aligned} A_{e+p \rightarrow e'+X} &= -ie_0^2 \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \frac{-ig_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} (1 - \xi)}{q^2 + i0} \langle X | J_\nu^{\text{em had}} | p \rangle = \\ &= \langle k', X | J_e^\mu J_h^\nu | k, p \rangle \langle 0 | A_\mu A_\nu | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ora

$$J_{\text{em had}}^\mu = \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma^\mu s \quad q_\mu J_{\text{em had}}^\mu = 0 . \quad (6.14)$$

- Dobbiamo sommare sulle polarizzazioni dello **stato finale** e mediare su quelle dello stato **iniziale**.
- Usiamo la notazione

$$\sum_X \int \prod_i \frac{d^3 p_{iX}}{2\epsilon_{iX} (2\pi)^3} = \tilde{\Sigma}_X , \quad (6.15)$$

cosicché la sezione d'urto si può scrivere come

$$d\sigma = \tilde{\Sigma}_X \frac{|A|^2}{\phi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q-p_X) \frac{d^3 k'}{2\epsilon_{k'} (2\pi)^3} . \quad (6.16)$$

- L'ampiezza A è data da

$$A = ie_0^2 \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \frac{i}{q^2 + i0} \langle X | J_\mu^h | p \rangle . \quad (6.17)$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} |A_{e+p \rightarrow e'+X}|^2 &= \frac{e_0^4}{(Q^2)^2} |\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)|^2 |\langle X | J_\mu^h | p \rangle|^2 , \\ \frac{1}{2} \sum_{r,s} |\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} (\bar{u}'_r)_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} (u_s)_\beta (\bar{u}_s)_\lambda (\gamma^\nu)_{\lambda\rho} (u'_r)_\rho = \frac{1}{2} \not{k}'_{\rho\alpha} \gamma^\mu_{\alpha\beta} \not{k}_{\beta\lambda} \gamma^\nu_{\lambda\rho} = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) = \frac{1}{2} k'_\alpha k_\beta \text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) = \\ &= \frac{4}{2} k'_\alpha k_\beta (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) = 2(k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k' \cdot k + k'^\nu k^\mu) = \\ &= 2\epsilon\epsilon' L^{\mu\nu} \quad \text{con} \quad L^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon\epsilon'} (k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} k' \cdot k) . \end{aligned} \quad (6.18)$$

Chiamiamo

$$\tilde{\Sigma}_X \langle X | J_\mu | p \rangle \langle p | J_\nu^\dagger | X \rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p_X) = W_{\mu\nu}(q, p) . \quad (6.19)$$

Mettendo insieme i vari pezzi otteniamo

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{e_0^4}{(Q^2)^2} \frac{2\epsilon\epsilon' L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}}{\phi} \frac{d^3k'}{2\epsilon'_k (2\pi)^3} = \frac{e_0^4}{(4\epsilon\epsilon' \sin^2(\theta/2))^2} \frac{2\epsilon\epsilon' L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}}{4p \cdot k} \frac{\epsilon'^2 d\epsilon' d\Omega'}{2\epsilon' (2\pi)^3} = \\ &= \frac{e_0^4}{16 \sin^4(\theta/2)} \frac{L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}}{4p \cdot k} \frac{2\epsilon\epsilon'}{(\epsilon\epsilon')^2} \frac{\epsilon' d\epsilon' d\Omega'}{2(2\pi)^3} = \frac{2e_0^4}{16 \sin^4(\theta/2)} \frac{2L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}}{4\epsilon m_p} \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon' d\Omega'}{2(2\pi)^3} = \\ &= 2 \frac{e_0^4}{16\pi^2} \frac{L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}}{4\epsilon^2 m_p \sin^4(\theta/2)} \frac{d\epsilon' d\Omega'}{16\pi} , \end{aligned} \quad (6.20)$$

da cui otteniamo

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\epsilon' d\Omega'} = \frac{2\alpha^2}{16\epsilon^2 m_p \sin^4(\theta/2)} L^{\mu\nu} \tilde{W}_{\mu\nu}} , \quad \tilde{W}_{\mu\nu} = \frac{W_{\mu\nu}}{4\pi} . \quad (6.21)$$

Ora

$$\tilde{W}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \tilde{\Sigma}_X \langle X | J_\mu | p \rangle \langle p | J_\nu^\dagger | X \rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p_X) = \tilde{W}_{\mu\nu}(p, q) . \quad (6.22)$$

La forma piú generale del tensore $\tilde{W}_{\mu\nu}$ sar 

$$\tilde{W}_{\mu\nu} = A g_{\mu\nu} + B q_\mu q_\nu + C p_\mu p_\nu + D p_\mu q_\nu + E p_\nu q_\mu , \quad (6.23)$$

dove A, B, C, D, E sono funzioni solo di $q^2, p^2, p \cdot q$.

Per la conservazione della corrente e.m. adronica:

$$q^\mu \tilde{W}_{\mu\nu} = 0 , \quad (6.24)$$

ci  $\tilde{W}_{\mu\nu}$   un tensore trasverso a q^μ , e dunque possiamo scrivere

$$\boxed{\tilde{W}_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1 + \left(p_\mu - q_\mu \frac{p \cdot q}{q^2} \right) \left(p_\nu - \frac{q_\nu (p \cdot q)}{q^2} \right) \frac{W_2}{m_p^2}} , \quad (6.25)$$

che   la forma piú generale di un tensore $\tilde{W}_{\mu\nu}$ trasverso a q^μ che dipende da p e q .

Le funzioni W_1 e W_2 dipendono ovviamente da $q^2, p^2, p \cdot q$, ma poich  $p^2 = m_p^2$   fissato, allora dipendono solo da q^2 e $p \cdot q$, ovverosia da Q^2 e ν :

$$\begin{aligned} W_1 &= W_1(Q^2, \nu) , \\ W_2 &= W_2(Q^2, \nu) . \end{aligned} \quad (6.26)$$

• Se ci fosse stata un'interazione con una corrente debole (ad esempio nello scattering con neutrini) avremmo avuto il termine supplementare

$$\boxed{\pm i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma \frac{W_3(Q^2, \nu)}{m_p^2}} , \quad (6.27)$$

(dove $-$ si ha nel caso di un neutrino e $+$ nel caso di un antineutrino), che è invariante di Lorentz, ma non è invariante sotto trasformazioni di parità.

Calcoliamo $L^{\mu\nu}\widetilde{W}_{\mu\nu}$ (considerando solo W_1 e W_2). Ricordando che $L^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon\epsilon'}(k'^{\mu}k^{\nu} + k'^{\nu}k^{\mu} - g^{\mu\nu}k'k)$ avremo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon\epsilon'}(k'^{\mu}k^{\nu} + k'^{\nu}k^{\mu} - g^{\mu\nu}k'k) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{q^2} \right) W_1 = \\ & = \frac{W_1}{\epsilon\epsilon'} \left(-2k \cdot k' + 4k \cdot k' + 2 \frac{(q \cdot k)(q \cdot k')}{q^2} - (k \cdot k') \right) = \\ & = \left(k \cdot k' + 2 \frac{(q \cdot k)(q \cdot k')}{q^2} \right) \frac{W_1}{\epsilon\epsilon'} = k \cdot k' \left(1 - 2 \frac{k \cdot k'}{q^2} \right) \frac{W_1}{\epsilon\epsilon'} = \\ & = 2k \cdot k' \frac{W_1}{\epsilon\epsilon'} = 4 \sin^2(\theta/2) W_1, \end{aligned} \quad (6.28)$$

avendo usato il fatto che $q \cdot k = (k - k') \cdot k \approx -k \cdot k'$.

Per il termine in W_2 avremo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon\epsilon'}(k'^{\mu}k^{\nu} + k'^{\nu}k^{\mu} - g^{\mu\nu}k'k) \left(p_{\mu}p_{\nu} - \frac{p_{\mu}q_{\nu}}{q^2}(p \cdot q) - \frac{p_{\nu}q_{\mu}}{q^2}(p \cdot q) + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{q^2}(p \cdot q) \right) \frac{W_2}{m_p^2} = \\ & = \frac{1}{\epsilon\epsilon'} \left[2(k' \cdot p)(k \cdot p) - p^2 k \cdot k' - 2 \frac{k' \cdot p k \cdot q}{q^2}(p \cdot q) - 2 \frac{k' \cdot q k \cdot p}{q^2}(p \cdot q) + 2 \frac{(p \cdot q)^2}{q^2} k \cdot k' + \right. \\ & \left. 2 \frac{k' \cdot q k \cdot q}{q^2}(p \cdot q) - k \cdot k'(p \cdot q) \right] \frac{W_2}{m_p^2}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned} k' \cdot p &= k \cdot k' = 2\epsilon\epsilon' \sin^2(\theta/2) & k' \cdot 1 &= k \cdot k' & q^2 &= -2k \cdot k' \\ k \cdot p &= \epsilon m & k \cdot q &= -k \cdot k' & p \cdot q &= m(\epsilon - \epsilon') \end{aligned}, \quad (6.30)$$

avremo

$$\begin{aligned} & = \frac{W_2}{\epsilon\epsilon' m_p^2} \left[2m^2 \epsilon\epsilon' - 2m^2 \epsilon\epsilon' \sin^2(\theta/2) + \frac{\epsilon' m (p \cdot q)}{q^2} k \cdot k' - \frac{2m\epsilon (p \cdot q) k \cdot k'}{q^2} + \frac{2(p \cdot q)^2}{q^2} k \cdot k' - \right. \\ & \left. - 2 \frac{(k \cdot k')^2}{q^2} (p \cdot q) - k \cdot k' (p \cdot q) \right] = \\ & = \frac{W_2}{\epsilon\epsilon' m_p^2} \{ 2m^2 \epsilon\epsilon' \cos^2(\theta/2) + p \cdot q [\epsilon m - \epsilon' m - m(\epsilon - \epsilon')] \} = 2W_2 \cos^2(\theta/2). \end{aligned} \quad (6.31)$$

In definitiva otteniamo

$$\boxed{L^{\mu\nu}\widetilde{W}_{\mu\nu} = 4 \sin^2(\theta/2) W_1 + 2 \cos^2(\theta/2) W_2}. \quad (6.32)$$

Per la sezione d'urto otteniamo

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\epsilon' d\Omega'} = \frac{2\alpha^2}{16\epsilon^2 m_p \sin^4(\theta/2)} [4W_1(Q^2, \nu) \sin^2(\theta/2) + 2W_2(Q^2, \nu) \cos^2(\theta/2)]}. \quad (6.33)$$

Poiché $d\epsilon' = d\nu$ e $dQ^2 d\phi = 2\epsilon\epsilon' d\Omega'$, allora

$$d\epsilon' d\Omega' = \frac{dQ^2 d\nu d\phi}{2\epsilon\epsilon'} , \quad (6.34)$$

e quindi

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{2\alpha^2 4\pi}{16\epsilon^2 m_p \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{\epsilon\epsilon'} [2W_1 \sin^2(\theta/2) + W_2 \cos^2(\theta/2)] , \quad (6.35)$$

da cui troviamo infine

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4\epsilon^2 m_p \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{\epsilon\epsilon'} [2W_1 \sin^2(\theta/2) + W_2 \cos^2(\theta/2)]} , \quad (6.36)$$

che rappresenta la **sezione d'urto inclusiva**, in cui solo l'elettrone finale è **osservato**.

• **La struttura del protone è caratterizzata da 2 funzioni di struttura misurabili.**

6.3 Modello a partoni naive - scaling di Bjorken

L'idea di base è quella di supporre che l'interazione tra il fotone e il protone possa essere espressa come **somma di scattering incoerenti di quark (partoni) costituenti puntiformi**. In altre parole possiamo pensare che il protone consista di un certo numero di costituenti puntiformi di **spin** $\frac{1}{2}$ ciascuno dei quali porta una data frazione z_i dell'impulso del **protone**:

$$p_i^\mu = z_i p^\mu . \quad (6.37)$$

Questo significa che stiamo trascurando l'impulso **trasverso** del partone (che in ogni caso è di ordine m_p). Il motivo della somma incoerente dei contributi dello scattering dei partoni risiede nel fatto che nel limite di $Q^2 \rightarrow 0, \nu \rightarrow \infty$ ($\frac{Q^2}{2m_p\nu} = x = \text{cost}$), il fotone vede stati di quark non interagenti ($\tau_\gamma \sim 1/\sqrt{Q^2}$).

Calcoliamo allora il contributo alla sezione d'urto dello scattering e^-q . E' sufficiente calcolare il tensore $W^{\mu\nu}$. Poiché il quark è supposto libero e non interagente, la sua corrente sarà semplicemente

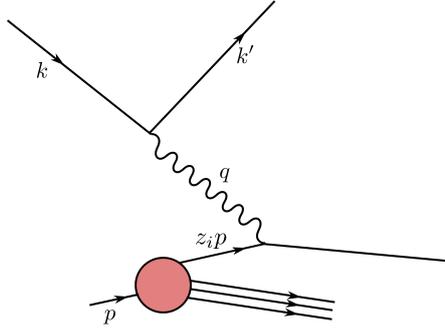
$$J_\mu^{qf} = Q_f \bar{q}_f \gamma^\mu q_f . \quad (6.38)$$

Chiamando p_f l'impulso iniziale (non è l'impulso del protone) e p'_f quello finale, dobbiamo calcolare

$$\langle p'_f | J_\mu | p_f \rangle \langle p_f | J_\nu^\dagger | p'_f \rangle = Q_f^2 \bar{u}(p'_f) \gamma^\mu u(p_f) \bar{u}(p_f) \gamma^\nu u(p'_f) . \quad (6.39)$$

Sommando sulle polarizzazioni iniziali del partone e mediando su quelle finali otteniamo

$$\langle p'_f | J_\mu | p_f \rangle \langle p_f | J_\nu^\dagger | p'_f \rangle = Q_f^2 \frac{1}{2} 4 [p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu} (p \cdot p')] , \quad (6.40)$$



Evidentemente $m_i = z_i m_p$

e quindi

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}_{\mu\nu} &= \frac{2Q_f^2}{4\pi} \int [p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu}(p \cdot p')] (2\pi)^4 \delta^4(p + q - p') \frac{d^3 p'}{2\epsilon'_p (2\pi)^3} = \\
&= \frac{2(2\pi)}{4\pi} Q_f^2 \int [p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu}(p \cdot p')] \delta^4(p + q - p') \delta(p_f'^2 - m_f^2) \theta(p'_0) d^4 p' = \\
&= Q_f^2 [p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu}(p \cdot p')] \delta^4((p_f + q)^2 - m_f^2) = \\
&= \frac{Q_f^2}{2p_f q} [p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu}(p \cdot p')] \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right) = \\
&= \frac{Q_f^2}{2p_f \cdot q} \frac{Q^2}{2} \left[\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \frac{2}{Q^2} \left(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu + \frac{q_\mu q_\nu}{2}\right) \right] \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right) = \\
&= \frac{1}{2} Q_f^2 \frac{x}{z_f} \left[\left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \frac{2}{Q^2} \left(2p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu + \frac{q_\mu q_\nu}{2}\right) \right] \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right), \tag{6.41}
\end{aligned}$$

da cui troviamo

$$\boxed{
\begin{aligned}
W_1^{qf} &= \frac{Q_f^2}{2} \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right) \\
\frac{W_2^{qf}}{m_f^2} &= \frac{2Q_f^2}{Q^2} \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right)
\end{aligned}
} \tag{6.42}$$

• Dalle funzioni di **struttura dei quark** possiamo ricavare quelle del **protone** come somma incoerente. La sezione d'urto del processo $e^- q$ è quindi

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{qf}}{dQ^2 d\nu} &= \frac{\pi\alpha^2}{4\epsilon^2 \epsilon' \sin^4(\theta/2)} \left[\frac{2Q_f^2}{2m_f} \sin^2(\theta/2) + 2Q_f^2 \frac{m_f}{Q^2} \cos^2(\theta/2) \right] \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right) = \\
&= \frac{\pi\alpha^2}{4\epsilon^2 \epsilon' \sin^4(\theta/2) m_p} \left[\frac{2Q_f^2}{2z_f} \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right) \sin^2(\theta/2) + 2Q_f^2 z_f \frac{m_p^2}{Q^2} \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right) \cos^2(\theta/2) \right], \tag{6.43}
\end{aligned}$$

da cui

$$d\sigma^p = \sum_f \int_0^1 q_f(z_f) d\sigma^{qf} dz_f, \tag{6.44}$$

dove $q_f(z_f)$ è la probabilità che il partone f abbia una frazione z_f dell'impulso del protone.

Così le funzioni di struttura del protone saranno

$$\begin{aligned} W_1(Q^2, \nu) &= \sum_f \int_0^1 q_f(z_f) W^{(f)}(Q^2, \nu) dz_f = \sum_f \int_0^1 q_f(z_f) \frac{Q_f^2}{2z_f} \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right) dz_f = \\ &= \sum_f \frac{Q_f^2}{2} \int_0^1 \frac{dz_f}{z_f} \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right) q_f(z_f), \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$W_2(Q^2, \nu) = \sum_f \int_0^1 q_f(z_f) \frac{2Q_f^2 m_p^2}{Q^2} z_f \delta\left(1 - \frac{x}{z_f}\right) dz_f, \quad (6.46)$$

e quindi

$$\begin{aligned} W_1(Q^2, \nu) &= \sum_f \frac{Q_f^2}{2} q_f(x) = F_1(x), \\ W_2(Q^2, \nu) &= \sum_f \frac{2Q_f^2 m_p^2}{Q^2} x q_f(x) = \sum_f m_p^2 Q_f^2 \frac{2x}{2m_p \nu} q_f(x) = \sum_f \frac{m_p}{\nu} x Q_f^2 q_f(x) = \frac{m_p}{\nu} F_2(x), \end{aligned} \quad (6.47)$$

da cui ricaviamo

$$\boxed{\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_f \frac{Q_f^2}{2} q_f(x) \\ F_2(x) &= \sum_f Q_f^2 x q_f(x) \end{aligned}}, \quad (6.48)$$

e dunque

$$F_2(x) = 2xF_1(x). \quad (6.49)$$

La semplice descrizione **partonica** implica il cosiddetto **scaling di Bjorken**: le funzioni di **struttura del protone** dipendono solo dalla variabile **cinematica** x (o da $\frac{Q^2}{\nu}$).

Aumentando ancora Q^2 il fotone dovrebbe essere in grado di risolvere i costituenti dei quark ("preoni") e dovremmo osservare dopo un periodo di scaling un nuovo picco ad $x = \frac{1}{3} \frac{1}{N_{\text{preoni}}}$. Ad oggi non c'è nessuna evidenza della natura composta dei quark. Al contrario, aumentando Q^2 , si osserva una **violazione dello scaling**, originata dalla QCD. Infatti, all'interno del protone, oltre ai quark di valenza ci sono anche i gluoni. Ma il fotone non interagisce direttamente con i gluoni. L'interazione **fotone-gluone** avviene solo attraverso le coppie virtuali $q\bar{q}$ generate dal gluone. Così, invece dei gluoni, il fotone sente un "mare" di partoni $q\bar{q}$ all'interno del nucleo.

6.4 Spin dei quark

Poiché $Q^2 \gg m_p$, possiamo assumere che i partoni siano a massa nulla. L'impulso del fotone è space-like, quindi possiamo trovare un sistema di riferimento in cui

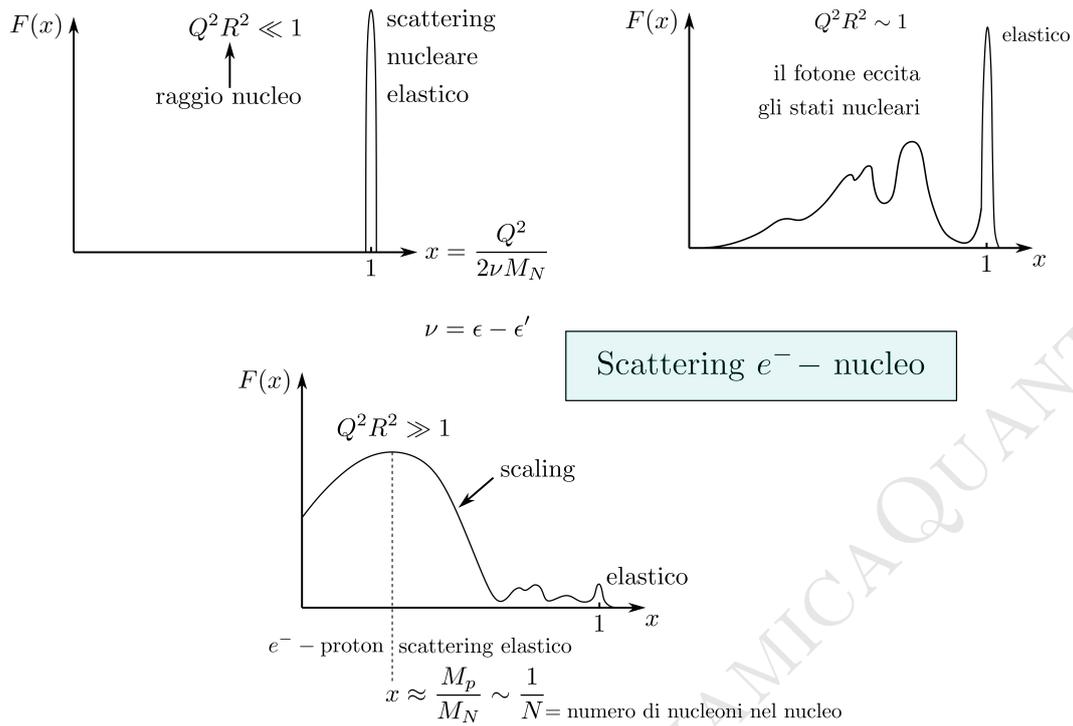


Figure 6.2: Scattering e^- - nucleo.

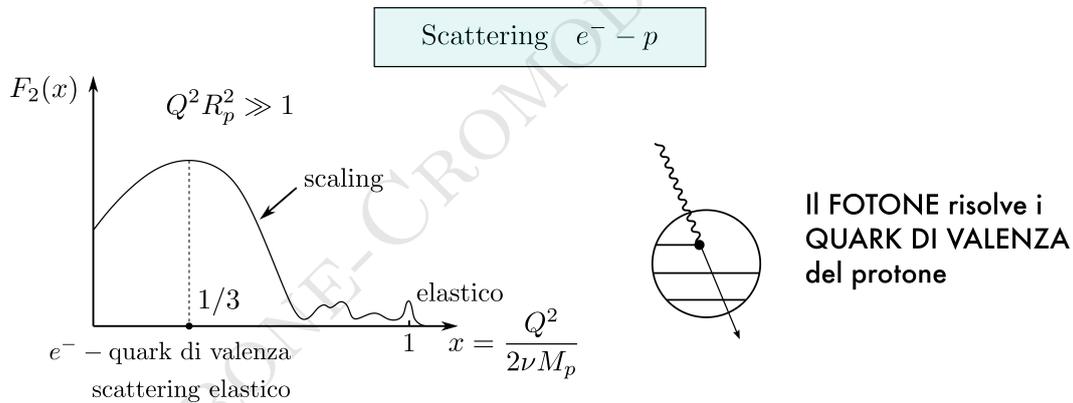


Figure 6.3: Scattering e^- - protone.

$E_\gamma = 0$ (frame di Breit). In questo sistema

$$q = (0, 0, 0, Q) , \quad (6.50)$$

e l'impulso del protone è (trascurando la massa):

$$p = \left(\frac{Q}{2x}, 0, 0, -\frac{Q}{2x} \right) \rightarrow x = \frac{Q^2}{2p \cdot q} . \quad (6.51)$$

L'impulso del partone è $p_f = zp$ e poiché i partoni che partecipano all'interazione hanno $z = x$, allora

$$p_f = \left(\frac{Q}{2}, 0, 0, -\frac{Q}{2} \right) . \quad (6.52)$$

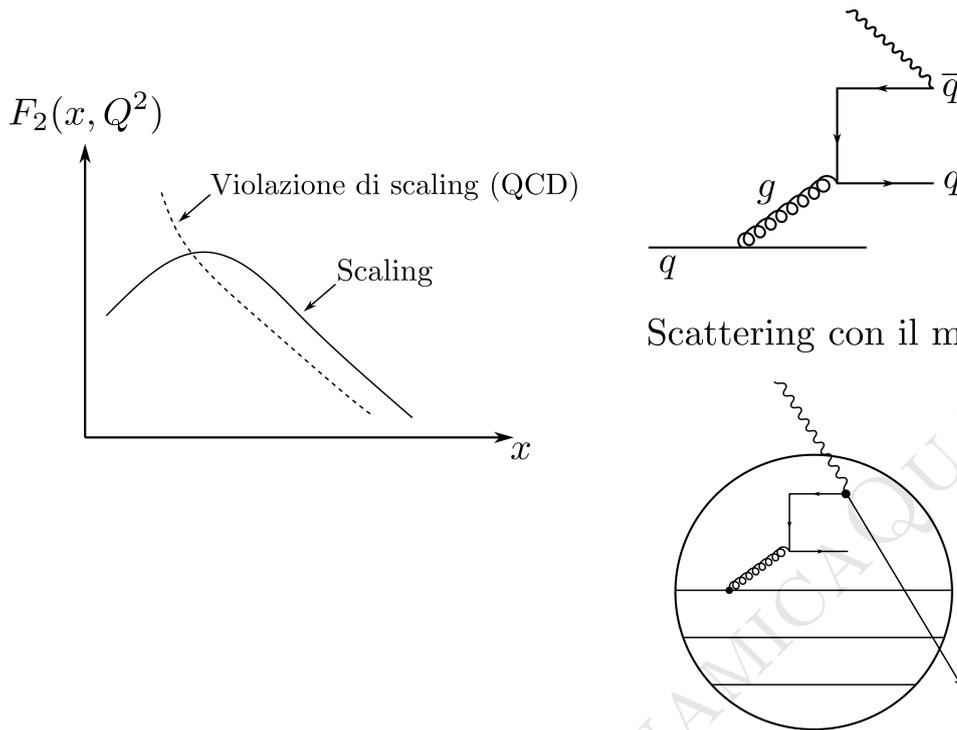
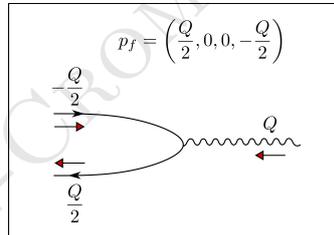


Figure 6.4: Violazione dello scaling a causa di effetti cromodinamici di ordine superiore.



Dopo l'interazione:

$$p'_f = \left(\frac{Q}{2}, 0, 0, \frac{Q}{2} \right), \quad (6.53)$$

perché il fotone non porta energia.

Dal momento che l'elicità di particelle a massa nulla è conservata nell'interazione vettoriale (o assiale), quando il partone inverte l'impulso deve invertire anche lo spin. Il processo è collineare e quindi non c'è contributo orbitale. Allora solo un fotone con elicità ± 1 (fotone trasverso) può essere assorbito. Se i partoni avessero spin 0 potrebbero assorbire solo fotoni longitudinali.

Calcoliamo la sezione d'urto trasversa e la sezione d'urto longitudinale. Le

variabili sono (trascurando la massa del protone):

$$\begin{aligned}
q^\mu &= (\sqrt{q_z^2 - Q^2}, q_z, \vec{0}) & \epsilon_\mu \epsilon^\mu &= -1 & \epsilon_\mu^{2*} p^\mu &= \iota \frac{p \cdot q}{\sqrt{Q^2}} \\
\epsilon_\mu^{T_1} &= (0, 1, 0, 0) & \epsilon_\mu^{T_1, T_2} q^\mu &= 0 & \epsilon_\mu^2 p^\mu \epsilon_\nu^{2*} p^\nu &= \frac{(p \cdot q)^2}{Q^2} = \frac{p \cdot q}{2x} = \frac{M_p \nu}{2x} \\
\epsilon_\mu^{T_2} &= (0, 0, 1, 0) & \epsilon_\mu^2 q^\mu &= 0 & & \\
\epsilon_\mu^L &= \left(\frac{q_z}{\sqrt{q^2}}, \frac{q_0}{\sqrt{q^2}}, 0, 0 \right) & \epsilon_\mu^{T_1, T_2} p^\mu &= 0 & & \\
p^\mu &= (p, -p, \vec{0}) & \epsilon_\mu^L p^\mu &= \frac{pq_z + pq_0}{\sqrt{q^2}} = \frac{p \cdot q}{\sqrt{q^2}} = -\iota \frac{p \cdot q}{\sqrt{Q^2}} & &
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Consideriamo

$$W_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1 + \left[p_\mu - q_\mu \frac{(p \cdot q)}{q^2} \right] \left[p_\nu - q_\nu \frac{(p \cdot q)}{q^2} \right] \frac{W_2}{M_p^2}, \tag{6.55}$$

e le sezioni d'urto longitudinale e trasversa:

$$\begin{aligned}
\sigma^T &\propto \sum_{i=1,2} \epsilon_\mu^{T_i} \epsilon_\nu^{T_i*} W^{\mu\nu} = -2g_{\mu\nu} \epsilon_\mu^{T_1} \epsilon_\nu^{T_1} W_1 = 2W_1 = 2F_1(x), \\
\sigma^L &\propto \epsilon_\mu^L \epsilon_\nu^{L*} W^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \epsilon_\mu^L \epsilon_\nu^{L*} W_1 + \epsilon_\mu^L p^\mu \epsilon_\nu^{L*} p^\nu \frac{W_2}{M_p^2},
\end{aligned} \tag{6.56}$$

e quindi

$$\sigma^L \propto -W_1 + \frac{W_2 \nu}{2x M_p} = -F_1(x) + \frac{F_2(x)}{2x} = F_L. \tag{6.57}$$

Ricapitolando

$$\boxed{
\begin{aligned}
\sigma^T &\propto 2F_1(x) \\
\sigma^L &\propto \frac{F_2(x)}{2x} - F_1(x) = F_L
\end{aligned}
} \tag{6.58}$$

Poiché $F_2(x) = 2xF_1(x)$ nel limite di scaling, allora

$$\frac{\sigma^L}{\sigma^T} = 0 \quad \text{nel limite di scaling.} \tag{6.59}$$

Questo risultato, confermato dall'esperimento, mostra che i **partoni hanno spin** $\frac{1}{2}$.

Se i partoni avessero spin 0, allora $\sigma^T = 0$ e quindi $F_1(x) = 0$. Le misure sulla quantità

$$\frac{2F_1(x)}{F_2(x)} = \begin{cases} 0 & \text{spin 0} \\ 1 & \text{spin } \frac{1}{2} \end{cases} \tag{6.60}$$

confermano

$$\boxed{F_2(x) = 2xF_1(x)}, \tag{6.61}$$

detta equazione di **Callan-Gross**.

Abbiamo trovato

$$\boxed{\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_f \frac{Q_f^2}{2} q_f(x) \\ F_2(x) &= \sum_f \frac{Q_f^2}{2} x q_f(x) \end{aligned}} \quad (6.62)$$

Indichiamo con $u(x), \bar{u}(x), d(x), \bar{d}(x), \dots$ le distribuzioni di probabilità dei quark $u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}, \dots$ con una frazione x dell'impulso del protone. Allora

$$\frac{F_2(x)}{x} = 2F_1(x) = \frac{4}{9}[u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9}[d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9}[s(x) + \bar{s}(x)] \quad (6.63)$$

Nel caso di scattering con neutrini, gli accoppiamenti dei barioni intermedi (W^\pm) con i quark sono diversi.

Per lo scattering di elettroni su neutroni possiamo utilizzare la simmetria d'**isospin** per collegare le distribuzioni di quark up e down in un **neutrone** a quelle in un **protone**:

$$\begin{aligned} u^n(x) &= d^p(x) \ , \\ d^n(x) &= u^p(x) \ , \end{aligned} \quad (6.64)$$

mentre le rimanenti sono ovviamente uguali.

Combinando i dati fra differenti processi DIS è possibile ottenere informazioni separate sulle funzioni di distribuzione **partoniche** individuali. Le distribuzioni partoniche devono soddisfare alcuni vincoli. Poiché sia neutrone che protone hanno stranezza zero:

$$\int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0 \quad (6.65)$$

Inoltre, poiché il protone ha carica elettrica $+1$ (u, u, d), avremo

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx [u(x) - \bar{u}(x)] &= 2 \\ \int_0^1 dx [d(x) - \bar{d}(x)] &= 1 \ . \end{aligned} \quad (6.66)$$

Possiamo decomporre le funzioni di distribuzione $u(x)$ e $d(x)$ nella somma dei contributi dei quark di valenza e del mare e prendere le distribuzioni partoniche rimanenti come distribuzioni di mare puro. Poiché i gluoni sono **singoletti** di sapore, ci aspettiamo che il mare sia indipendente dal **sapore**. Quindi

$$\begin{aligned} u(x) &= u_v(x) + u_{\text{sea}}(x) \\ d(x) &= d_v(x) + d_{\text{sea}}(x) \\ \bar{u}(x) = \bar{d}(x) = s(x) = \bar{s}(x) = \dots &= q_{\text{sea}}(x) = u_{\text{sea}}(x) = d_{\text{sea}}(x) \ , \end{aligned} \quad (6.67)$$

(mare indipendente dal sapore). Con questa suddivisione la regola di somma per la stranezza è automaticamente soddisfatta, mentre le altre due regole di somma implicano dei vincoli solo sulle distribuzioni dei quark di valenza.

Un semplice modello a **3-quark** per il **nucleone** suggerisce che ci sia un picco per $x = \frac{1}{3}$ nelle funzioni di struttura osservate. In verità questo comportamento non è osservato. Ciò può essere compreso considerando il contributo del mare partonico. Prendendo, infatti, la differenza tra le funzioni di struttura di protone e neutrone, dove il contributo del mare si cancella, i dati esibiscono un picco intorno a un $x = 1/3$. Grazie alla simmetria di **isospin** troviamo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x} [F_2^p(x) - F_2^n(x)] &= \int_0^1 dx \left[\frac{4}{9} u_v^p(x) + \frac{1}{9} d_v^p(x) - \frac{4}{9} u_v^n(x) - \frac{1}{9} d_v^n(x) \right] = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 dx [u_v^p(x) - d_v^p(x)] = \frac{1}{3}, \end{aligned} \quad (6.68)$$

detta **regola di somma di Gottfried**, che è ben soddisfatta dai dati.

La conservazione dell'impulso totale del **protone** implica un'importante regola di somma:

$$\int_0^1 dx x [u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x) + \dots] = 1 - \epsilon, \quad (6.69)$$

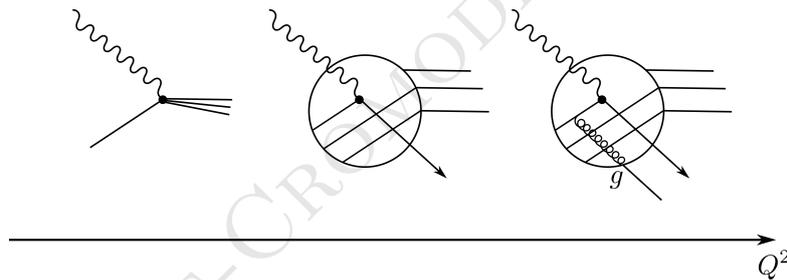
dove ϵ è la frazione d'impulso che non è portata dai **quark**. Sperimentalmente si trova $\epsilon \sim \frac{1}{2}$ ($Q^2 \sim 10 - 40 \text{ GeV}^2$) il che suggerisce che circa la metà dell'impulso è portata dai gluoni.

FLAVIANO MORONE - CROMODINAMICA QUANTISTICA

Chapter 7

Modello a partoni - correzioni QCD al deep inelastic scattering

All'ordine più basso, il DIS si verifica attraverso lo scattering tra fotone virtuale (o W o Z^0) e il partone. La prima correzione ovvia sarà dovuta all'emissione di gluoni reali sia dal quark iniziale che da quello finale. A causa delle divergenze infrarosse soffici e collineari occorre tenere conto anche del contributo a un loop dei gluoni virtuali. All'ordine più basso



$$\frac{d\sigma^{\text{part}}}{dz} = Q_f^2 \frac{1}{z} \delta\left(1 - \frac{x}{z}\right) \rightarrow \sigma^{\text{had}} = \sum_f \int_0^1 \left(\frac{d\sigma^{\text{part}}}{dz}\right) q_f(z) dz . \quad (7.1)$$

Al crescere di Q^2 il fotone sarà sensibile a cambiamenti nelle distribuzioni partoniche dovuti a:

- Bremsstrahlung di **gluoni**, che shiftano le distribuzioni di valenza e mare a valori di x più piccoli.
- Splitting di un gluone in una coppia quark-antiquark che aumenterà la quantità del mare.

Avremo il contributo dai diagrammi in figura 7.1 Consideriamo un quark con frazione d'impulso y . All'ordine più basso il suo contributo alla funzione di struttura del protone può essere scritto come

$$2F_1^{qf}(x) = Q_f^2 \int_0^1 dy q(y) \delta(x - y) . \quad (7.2)$$

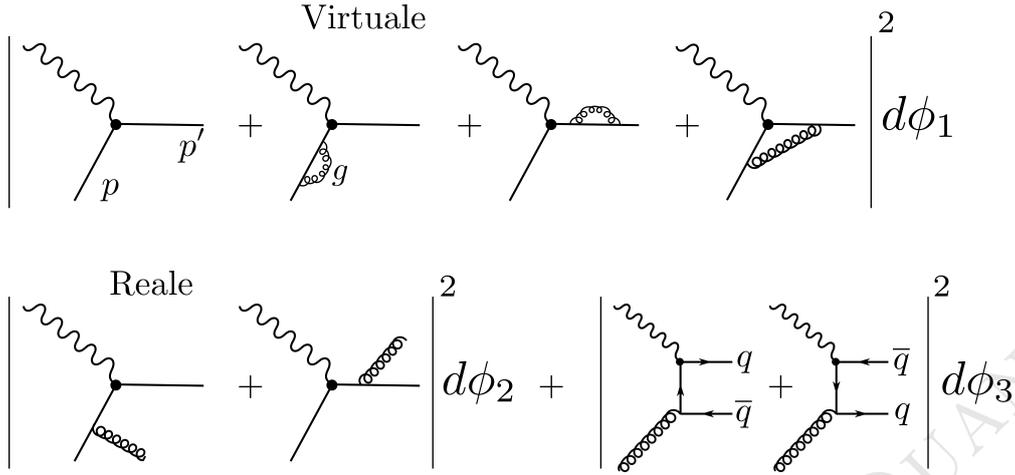


Figure 7.1

Nel calcolare le correzioni dovute ai diagrammi in figura 7.1, le divergenze ultraviolette vengono dal secondo, terzo, e quarto diagramma che però si compensano e rimane solo un contributo finito di ordine α_s .

Le divergenze infrarosse vengono dai diagrammi di emissione reale e virtuale. Infatti consideriamo il contributo dei diagrammi di emissione reale. Consideriamo il caso della QED con emissione di fotoni (QCD è analogo). L'ampiezza del

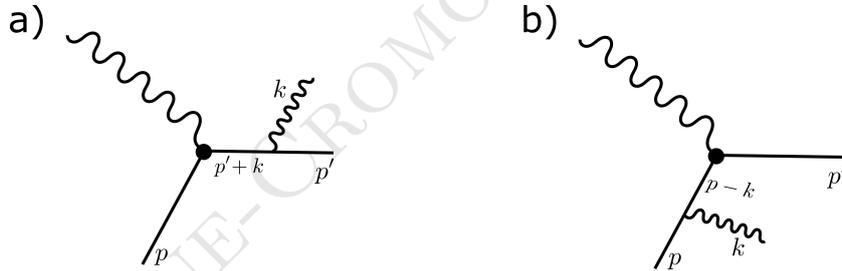


Figure 7.2

diagramma in figura 7.2a sarà

$$\bar{u}(p') \not{\epsilon}(k) \frac{\not{p}' + \not{k} + m}{2p' \cdot k} \mathcal{A} u(p) \approx \bar{u}(p') \mathcal{A} u(p) \frac{p' \cdot \epsilon}{p' \cdot k} (-ie^2) \quad (7.3)$$

(soft + equazione di Dirac $m u = \not{p} u$), mentre l'ampiezza del diagramma in figura 7.2b sarà

$$\bar{u}(p') \mathcal{A} \frac{\not{p} - \not{k} + m}{-2p \cdot k} \not{\epsilon}(k) u(p) = \bar{u}(p') \mathcal{A} u(p) \frac{-p \cdot \epsilon}{p \cdot k} (-ie^2) \quad (7.4)$$

(soft). Indicando con \mathcal{A}_0 l'ampiezza elastica senza emissione di fotoni, l'ampiezza con emissione \mathcal{A} sarà:

$$\mathcal{A} = -2\mathcal{A}_0 \left[\frac{p' \cdot \epsilon}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right]. \quad (7.5)$$

Per la sezione d'urto di Bremsstrahlung soft avremo

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^B}{d\Omega'} &= e^2 \frac{d\sigma^0}{d\Omega'} \left[\frac{p'\epsilon}{p' \cdot k} - \frac{p\epsilon}{p \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\epsilon_k} = \frac{d\sigma^0}{d\Omega'} \frac{\alpha}{4\pi^2} \left[\frac{p'\epsilon}{p' \cdot k} - \frac{p\epsilon}{p \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{\epsilon_k} = \\ &= \frac{d\sigma^0}{d\Omega'} \frac{\alpha}{4\pi^2} \left[\frac{p'\epsilon}{p' \cdot k} - \frac{p\epsilon}{p \cdot k} \right]^2 \epsilon_k d\epsilon_k . \end{aligned} \quad (7.6)$$

Mediando sulle polarizzazioni del fotone $\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\alpha \epsilon_r^\beta = -g^{\alpha\beta}$ otteniamo

$$\boxed{\frac{d\sigma^B}{d\Omega'} = \frac{d\sigma^0}{d\Omega'} \frac{(-\alpha)}{4\pi^2} \left[\frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{\epsilon_k}} . \quad (7.7)$$

Il denominatore è

$$\frac{1}{p \cdot k} = \frac{1}{\epsilon_p \epsilon_k (1 - \beta_p \cos \theta)} . \quad (7.8)$$

Quindi integrando in $d\epsilon_k$ l'integrando va come $\frac{1}{\epsilon_k}$ e diverge per $\epsilon_k = 0$. Questa divergenza è cancellata esattamente dal contributo dei diagrammi di emissione **virtuale** (**teorema di Bloch-Nordsiek** per la divergenza IR). Nel caso ultrarelativistico comunque $\beta_p \sim 1$ e il denominatore va come

$$\frac{1}{2\epsilon_p \epsilon_k \sin^2(\theta/2)} , \quad (7.9)$$

che diverge per $\theta = 0$ (**divergenza collineare o di massa**).

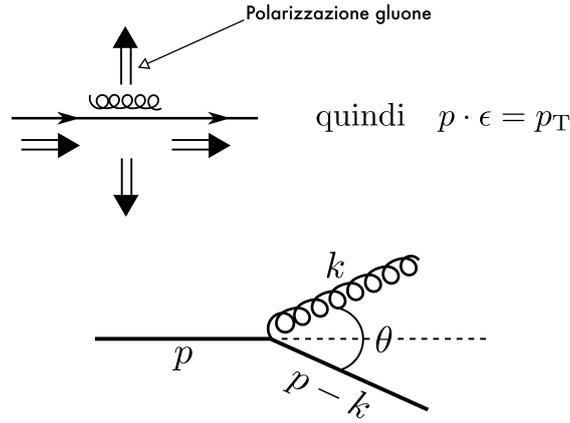
La divergenza collineare connessa con la linea del quark finale scompare se facciamo una somma **inclusiva** di tutti i possibili stati finali degeneri (con la stessa massa inclusi gluoni e coppie a massa nulla– **teorema di Lee-Kinoshita-Nauenberg**–).

La singolarità di massa connessa con la linea del quark iniziale invece **non si cancella** perché non abbiamo la somma su tutti gli stati iniziali degeneri, ma solo un singolo quark.

Consideriamo il processo in cui un quark nel protone ha una frazione $y > x$ dell'impulso del protone. Esso, quindi, irradia un gluone e perde energia fino ad avere una frazione x prima di interagire col fotone. La divergenza nasce dalla **singolarità di massa collineare**. Infatti, consideriamo il processo in figura 7.2b. L'ampiezza nel limite $m = 0$ e k trascurabile rispetto a p è:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \bar{u}(p') \not{A} \not{S}_F(p) \not{\epsilon} u(p) (-ie^2) = \\ &= e^2 \bar{u}(p') \not{A} \frac{\not{p}\not{\epsilon}}{(p-k)^2} u(p) \approx e^2 \bar{u}(p') \not{A} \frac{p \cdot \epsilon}{(p-k)^2} u(p) = \\ &= e^2 \bar{u}(p') \not{A} \frac{p \cdot \epsilon}{2p \cdot k} u(p) = e^2 \bar{u}(p') \not{A} u(p) \frac{p \cdot \epsilon}{2p \cdot k} . \end{aligned} \quad (7.10)$$

Ora se p, k e p' sono tutti collineari, allora $\theta \sim 0$, l'elicità del quark nel limite $m = 0$ non può cambiare durante l'interazione (interazione vettoriale) e quindi l'elicità del gluone può essere solo ± 1 .



D'altra parte

$$2p \cdot k = 2\epsilon_p \epsilon_k \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (7.11)$$

con

$$\begin{aligned} k_T &= \epsilon_k \sin \frac{\theta}{2} \\ (p-k)_T &\sim p_T \sim \epsilon_p \sin \frac{\theta}{2} \\ p_T &\sim k_T \quad \text{per } \theta \sim 0, \end{aligned} \quad (7.12)$$

e quindi

$$2p \cdot k \sim p_T^2. \quad (7.13)$$

Poiché il processo è collineare $p'_T \sim p_T$ allora integrando in d^3p' la sezione d'urto va come

$$\sigma \sim \int^{Q^2} \frac{1}{p_T^2} dp_T^2 \sim \ln Q^2 \quad \text{con precisione logaritmica.} \quad (7.14)$$

In verità $\sigma \sim \ln(Q^2/m^2)$ e vediamo che nel limite di massa nulla compare una vera **singolarità di massa**.

Riassumendo

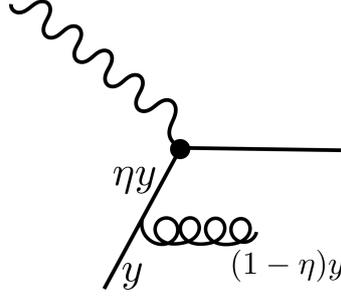
1. **Divergenze UV** si cancellano e abbiamo un contributo finito.
2. **Divergenze IR** di gluoni molli si cancellano tra diagrammi di emissione reale e virtuale e resta un contributo finito.
3. **Divergenze collineari (stati finali)** scompaiono nelle linee dei quark finali nella somma **inclusiva** su tutti gli stati degeneri.
4. **Divergenze collineari (stati iniziali)** restano e c'è un termine divergente

$$\alpha_s \ln(Q^2/m^2) \rightarrow \infty \quad \text{per } m \rightarrow 0. \quad (7.15)$$

Ritorniamo al quark con frazione d'impulso y . Il suo contributo all'ordine più basso alla funzione di struttura protonica è

$$2F_1^{(q_f)}(x) = Q_f^2 \int_0^1 dy \delta(x-y) q_f(y) . \quad (7.16)$$

Abbiamo visto che se il quark emette un gluone prima di interagire il suo impulso è degradato a ηy , poiché una frazione $(1-\eta)y$ viene portata via dal gluone. Le



correzioni che vengono dai diagrammi di ordine superiore sono composte da una parte finita e una divergente a causa della singolarità di massa. D'altra parte, per interagire, il partone deve avere comunque una frazione d'impulso $\eta y = x$, cosicché $F_1^{(q)}(x)$ riceve un contributo solo dai quark con frazioni d'impulso iniziali $y \geq x$ e $\eta = \frac{x}{y}$.

Il contributo di ordine superiore può essere scritto come

$$f_{qq}(\eta) + \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) P_{qq}(\eta) = f\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) , \quad (7.17)$$

dove $f(x/y)$ è finito, mentre $\ln(Q^2/\mu^2)P_{qq}(x/y)$ diverge per $\mu^2 \rightarrow 0$.

Quindi

$$2F_1^{(q_f)}(x) = Q_f^2 \int_0^1 dy \delta(x-y) q_f(y) + Q_f^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dy q_f(y) \int_0^1 d\eta \delta(\eta y - x) \left[P_{qq}(\eta) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + f_{qq}(\eta) \right] , \quad (7.18)$$

da cui otteniamo

$$2F_1^{(q_f)}(x) = Q_f^2 \int_0^1 dy \delta(x-y) q_f(y) + Q_f^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q_f(y) \left[P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + f_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \right] , \quad (7.19)$$

dove il secondo termine a secondo membro rappresenta una **violazione dello scaling**. Scriviamo anche la sezione d'urto partonica:

$$d\sigma^{\text{part}} \sim \frac{1}{z} \delta\left(1 - \frac{x}{z}\right) + \frac{1}{z} \frac{\alpha_s}{\pi} \left[\ln \frac{Q^2}{\mu^2} P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) + f_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) \right] . \quad (7.20)$$

Il teorema generale sulla cancellazione delle divergenze collineari non protegge la funzione di struttura $F_1^{(q_f)}$ poiché questa quantità **non è sufficientemente inclusiva**. La divergenza si mostra quando si cerca di risolvere il quark originale

con frazione d'impulso y in un **quark** con frazione d'impulso ηy e un **gluone**. $P_{qq}(x/y)$ è proprio il coefficiente della divergenza logaritmica associata al processo di splitting $q \rightarrow qG$.

Le osservabili fisiche, comunque, non devono dipendere da nessun cut-off. E' vero, però, che la nostra definizione della funzione di **distribuzione** partonica dipende ovviamente dal potere risolutivo del fotone. Quindi, mentre a piccoli Q^2 il fotone sente un singolo **partone** con frazione $y = x$, ora sente lo splitting di un quark con $y > x$ in un quark e un gluone con **distribuzioni partoniche separate**.

La divergenza **deve essere riassorbita nella funzione di distribuzione partonica osservabile**.

Se

$$2F_1^{(qf)} = 2F_1^{(qf)}(x, Q^2, \mu^2) = Q_f^2 q_f(x) + Q_f^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q_f(y) + Q_f^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q_f(y), \quad (7.21)$$

allora misuro $F_1(x, Q_0^2)^{\text{exp}}$ ad una scala arbitraria di energia Q_0^2 e la identifico con la **funzione di distribuzione partonica osservabile**:

$$\boxed{2F_1(x, Q_0^2)^{\text{exp}} = Q_f^2 q_f(x, Q_0^2)}. \quad (7.22)$$

Ad una scala successiva Q^2 avrò

$$2F_1^{(qf)}(x, Q^2) = Q_f^2 q_f^0(x) + Q_f^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q_0^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q_f^0(y) + Q_f^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q_f^0(y) + \dots = Q_f^2 q_f(x, Q_0^2) + Q_f^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q_f(y, Q_0^2) + \dots, \quad (7.23)$$

avendo usato il fatto che la differenza tra q_f^0 e $q_f(y, Q_0^2)$ è di ordine superiore. Ovviamente non possiamo predire il valore di $F_1(x, Q_0^2)$, che è infatti usato per definire la **distribuzione partonica osservabile**. Tuttavia, dato il suo valore alla scala di riferimento Q_0^2 , possiamo calcolare l'**evoluzione della densità partonica a qualsiasi altra scala** Q^2 (alta ma sempre nei limiti in cui vale la teoria delle perturbazioni).

Calcoliamo allora

$$\frac{dq_f(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = Q^2 \frac{dq_f(x, Q^2)}{dQ^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q_f(y, Q_0^2). \quad (7.24)$$

Possiamo sostituire $q_f(y, Q_0^2)$ con $q_f(y, Q^2)$ poiché la differenza è di ordine superiore. Inoltre, se includiamo anche le correzioni di ordine superiore nella costante

running $\alpha_s(Q^2)$ otteniamo

$$\boxed{\frac{dq_f(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q_f(y, Q^2)}, \quad (7.25)$$

che è l'equazione di **Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi** (DGLAP). Il cambiamento nella distribuzione di un quark con frazione d'impulso x è data dall'integrale su y della corrispondente distribuzione per un quark con frazione d'impulso $y \geq x$ che, avendo emesso un gluone, rimane con una frazione $\frac{x}{y}$ della sua frazione d'impulso originale. La funzione $P_{qq}(x/y)$ è la probabilità associata con il processo di **splitting**: $q(y) \rightarrow q(x)G$, ossia è la probabilità di trovare all'interno di un quark con frazione d'impulso y un quark con frazione d'impulso $\frac{x}{y}$ (della frazione y).

Per risolvere l'equazione **integro-differenziale** introduciamo la trasformata di Mellin:

$$q_n(t) \equiv \int_0^1 dx x^{n-1} q(x, Q^2) \quad \text{con} \quad t = \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}. \quad (7.26)$$

Allora avremo

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^{n-1} \frac{dq(x, Q^2)}{d \ln Q^2} &= \frac{dq_n(t)}{dt} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_0^1 dx x^{n-1} \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) = \\ &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_0^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) \int_0^y dx x^{n-1} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) = \\ &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_0^1 \frac{dy}{y} q(y, Q^2) y^n \int_0^y \frac{dx}{y} \left(\frac{x}{y} \right)^{n-1} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) = \\ &= \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} q_n(t) \int_0^1 dw w^{n-1} P_{qq}(w) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} q_n(t) \gamma_n, \end{aligned} \quad (7.27)$$

dove γ_n è la trasformata di Mellin di P_{qq} . Abbiamo trovato quindi

$$\boxed{\frac{dq_n(t)}{dt} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} q_n(t) \gamma_n}. \quad (7.28)$$

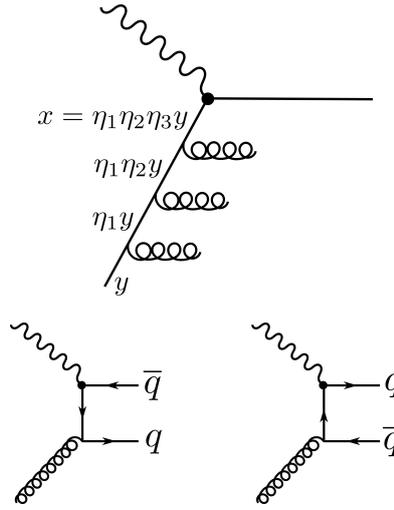
Prendendo $\alpha_s(Q^2) = \alpha_s$ otteniamo

$$\boxed{q_n(t) = q_n(t_0) e^{\alpha_s \gamma_n t / 2\pi}}, \quad (7.29)$$

che rappresenta la somma di tutti i contributi che vengono dall'emissione di un numero arbitrario di gluoni prima dell'interazione col fotone. Per 2 gluoni avremo ad esempio

$$\frac{1}{2!} \int_0^1 dy q(y) \int_0^1 d\eta_1 P_{qq}(\eta_1) \int_0^1 d\eta_2 P_{qq}(\eta_2) \delta(x - \eta_1 \eta_2 y). \quad (7.30)$$

Aggiungendo i diagrammi (sempre di ordine α_s) la funzione di distribuzione



partonica deve tener conto anche della probabilità di trovare all'interno di un gluone con frazione d'impulso y un quark con frazione d'impulso $\frac{x}{y}$ (di y).

Quindi la $q_f(x, Q^2)$ si modifica nel modo seguente

$$q_f(x, Q^2) = q_f(x, Q_0^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} q_f(y) P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) + \int_x^1 \frac{dy}{y} G(y) P_{qG} \left(\frac{x}{y} \right) \right], \quad (7.31)$$

cosicché l'equazione di evoluzione diventa

$$\boxed{\frac{dq_f(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} q_f(y) P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) + \int_x^1 \frac{dy}{y} G(y) P_{qG} \left(\frac{x}{y} \right) \right]}. \quad (7.32)$$

L'equazione di evoluzione per le **funzioni di distribuzione gluoniche** è analogamente

$$\boxed{\frac{dG(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} P_{Gq_f} \left(\frac{x}{y} \right) q_f(y) + \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{GG} \left(\frac{x}{y} \right) G(y) \right]}. \quad (7.33)$$

Vale

$$P_{Gq}(y) = P_{qq}(1-y), \quad (7.34)$$

dove $P_{Gq}(y)$ è la probabilità che un quark emetta un gluone con una frazione y dell'impulso del quark padre.

Risolviamo l'equazione di evoluzione nel caso in cui $\alpha_s = \alpha_s(Q^2)$:

$$\frac{dq_n(t)}{dt} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \gamma_n q_n(t) \rightarrow \int_{q_n(t_0)}^{q_n(t)} \frac{dq_n(t)}{q_n} = \frac{\gamma_n}{2\pi} \int_{t_0}^t \alpha_s(t') dt', \quad (7.35)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \ln \frac{q_n(t)}{q_n(t_0)} &= \frac{\gamma_n}{2\pi} \int_{t_0}^t \alpha_s(t') \frac{dt'}{d\alpha_s} d\alpha_s = \frac{\gamma_n}{2\pi} \int_{\alpha_s(t_0)}^{\alpha_s(t)} \alpha_s(t') \frac{1}{-\beta_0 \alpha_s^2(t')} d\alpha_s = \\ &= -\frac{\gamma_n}{2\pi \beta_0} \ln \frac{\alpha_s(t)}{\alpha_s(t_0)}, \end{aligned} \quad (7.36)$$

avendo usato il fatto che $\frac{dt'}{d\alpha_s}$ è l'inverso della β -function: $\beta(\alpha) = -\beta_0\alpha_s^2$. Espo-
nenziando otteniamo

$$q_n(t) = q_n(t_0) \left[\frac{\alpha_s(t)}{\alpha_s(t_0)} \right]^{-\frac{\gamma_n}{2\pi\beta_0}} . \quad (7.37)$$

Le equazioni complete sono

$$\begin{cases} \dot{q}_n = \frac{\alpha_s}{2\pi} [\gamma_{qq}^n q_n + \gamma_{qG}^n G_n] \\ \dot{G}_n = \frac{\alpha_s}{2\pi} [\gamma_{Gq}^n q_n + \gamma_{GG}^n G_n] \end{cases} . \quad (7.38)$$

La forma esplicita per le funzioni di **splitting** può essere calcolata esplicitamente dai vertici della QCD. Le funzioni P_{qq} , P_{qG} e P_{GG} sono proprie della teoria e non dipendono dal particolare processo a cui prendono parte le densità partoniche.

Finora non abbiamo considerato il contributo finito che contiene f_{qq} . f_{qq} non è una correzione universale e dipende dallo schema di rinormalizzazione della densità partonica. Evidentemente, se ridefiniamo la densità partonica rinormalizzata includendo il pezzo finito, avremo

$$\begin{aligned} 2F_1(x, Q^2) &= q^0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q^0(y) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_{qq}^1 \left(\frac{x}{y} \right) q^0(y) = q(x, Q^2) \\ F_2(x, Q^2) &= q^0(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) q^0(y) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q^0(y) [f_{qq}^2 - f_{qq}^1] + \\ &+ \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} f_{qq}^1 \left(\frac{x}{y} \right) q^0(y) == 2F_1(x, Q^2) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q^0(y) [f_{qq}^2 - f_{qq}^1] . \end{aligned} \quad (7.39)$$

Ma $F_2 - 2F_1 = 0$ perché $F_L = 0$, e quindi

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} q^0(y) [f_{qq}^2 - f_{qq}^1] = 0 . \quad (7.40)$$

Consideriamo la **sezione d'urto**:

$$(\nu, \bar{\nu})(p, n) \rightarrow \mu X . \quad (7.41)$$

In questo caso nel tensore leptónico e adronico c'è anche un pezzo con W_3 :

$$W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^{(e)} \pm i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\lambda q^\rho \frac{W^3}{m_p^2}(Q^2, \nu) , \quad (7.42)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\nu, \bar{\nu}}}{dQ^2 d\nu} &= \frac{G_F^2}{2\pi m_p} \frac{E'}{E} \times \\ &\times \left(\frac{m_W^2}{Q^2 + m_W^2} \right)^2 \left[2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \widetilde{W}_1(Q^2, \nu) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \widetilde{W}_2(Q^2, \nu) \pm \frac{E + E'}{m_p} \sin^2 \frac{\theta}{2} \widetilde{W}_3(Q^2, \nu) \right] , \end{aligned} \quad (7.43)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
F_2^{\nu p}(x) &= 2xF_1(x) = 2x[d(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{c}(x)] , \\
xF_3^{\nu p}(x) &= 2x[d(x) - \bar{u}(x) + s(x) - \bar{c}(x)] \cdot F_2^{\bar{\nu} p}(x) = 2xF_1^{\bar{\nu} p}(x) = 2x[u(x) + \bar{d}(x) + c(x) + \bar{s}(x)] \\
xF_3^{\bar{\nu} p}(x) &= 2x[u(x) - \bar{d}(x) + c(x) - \bar{s}(x)] \cdot F_2^{\nu n}(x) = 2xF_1^{\nu n}(x) = 2x[d^n(x) + \bar{u}^n(x) + s(x) + \bar{c}(x)] \\
xF_3^{\nu n}(x) &= 2x[d^n(x) - \bar{u}^n(x) + s(x) - \bar{c}(x)] \cdot F_2^{\bar{\nu} n}(x) = 2xF_1^{\bar{\nu} n}(x) = 2x[u^n(x) + \bar{d}^n(x) + c(x) + \bar{s}(x)] \\
xF_3^{\bar{\nu} n}(x) &= 2x[u^n(x) - \bar{d}^n(x) + c(x) - \bar{s}(x)] .
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Per la simmetria d'isospin:

$$\begin{aligned}
u^n(x) &= d^p(x) = d(x) , \\
d^n(x) &= u^p(x) = u(x) .
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Per un bersaglio isoscalare N ($n_p = n_n$):

$$\begin{aligned}
F_2^{\nu N} &= \frac{1}{2}(F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}) = x[d + \bar{u} + s + \bar{c} + u + \bar{d} + s + \bar{c}] = \\
&= x[u + \bar{u} + d + \bar{d} + 2s + 2\bar{c}] \\
xF_3^{\nu N} &= \frac{1}{2}(F_3^{\nu p} + F_3^{\nu n}) = x[d + s - \bar{u} - \bar{c} + u - \bar{d} + s - \bar{c}] = \\
&= x[u - \bar{u} + d - \bar{d} + 2s - 2\bar{c}] ,
\end{aligned} \tag{7.46}$$

mentre

$$\begin{aligned}
F_2^{eN} &= \frac{1}{2}(F_2^{ep} + F_2^{en}) = \frac{x}{2} \left[\frac{4}{9}(u + \bar{u}) + \frac{1}{9}(d + \bar{d}) + \frac{1}{9}(s + \bar{s}) + \frac{4}{9}(c + \bar{c}) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{9}(d + \bar{d}) + \frac{1}{9}(u + \bar{u}) + \frac{1}{9}(s + \bar{s}) + \frac{4}{9}(c + \bar{c}) \right] = \\
&= \frac{x}{2} \left[\frac{5}{9}(u + \bar{u}) + \frac{5}{9}(d + \bar{d}) + \frac{2}{9}(s + \bar{s}) + \frac{8}{9}(c + \bar{c}) \right] = \\
&= \frac{5}{18}x \left[(u + \bar{u}) + (d + \bar{d}) + \frac{2}{5}(s + \bar{s}) + \frac{8}{5}(c + \bar{c}) \right] .
\end{aligned} \tag{7.47}$$

Assumendo che $s = \bar{s}$ e trascurando c e \bar{c} , abbiamo

$$\begin{aligned}
F_2^{\nu N} &= x[(u + \bar{u}) + (d + \bar{d}) + 2s] \\
F_2^{eN} &= \frac{5}{18}x \left[(u + \bar{u}) + (d + \bar{d}) + \frac{4}{5}s \right] ,
\end{aligned} \tag{7.48}$$

da cui, trascurando s , otteniamo

$$\boxed{F_2^{eN} \approx \frac{5}{18}F_2^{\nu N}} , \tag{7.49}$$

dove il coefficiente $\frac{5}{18}$ è proprio la media quadratica delle cariche dei quark u e d :

$$\frac{5}{18} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} . \tag{7.50}$$

La differenza $F_2^{ep} - F_2^{en}$ dà

$$F_2^{ep} - F_2^{en} = \frac{x}{3}[(u + \bar{u}) - (d + \bar{d})] = \frac{x}{3}(u_v - d_v). \quad (7.51)$$

Consideriamo $x F_3^{\nu N}$ trascurando s e c :

$$x F_3^{\nu N} = (u - \bar{u}) + (d - \bar{d}), \quad (7.52)$$

e quindi

$$\int_0^1 x F_3^{\nu N} dx = \int_0^1 (u - \bar{u}) + (d - \bar{d}) dx = 3, \quad (7.53)$$

che è il risultato nel modello a partoni naive. Nel modello a partoni con le correzioni QCD abbiamo

$$x F_3^{\nu N}(x, Q^2) = Q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) Q(y) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} (f_{qq}^3 - f_{qq}^2) Q(y), \quad (7.54)$$

dove $Q(x) = [u(x) - \bar{u}(x)] + [d(x) - \bar{d}(x)]$. Integrando otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 x F_3^{\nu N}(x, Q^2) dx &= 3 + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) Q(y) + \\ &+ \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{dy}{y} (f_{qq}^3 - f_{qq}^2) Q(y) = \\ &= 3 + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y P_{qq} \left(\frac{x}{y} \right) Q(y) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^y (f_{qq}^3 - f_{qq}^2) Q(y) = \\ &= 3 + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \int_0^1 \frac{dy}{y} Q(y) \int_0^1 dt P_{qq}(t) y + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dy Q(y) \int_0^1 dt f_{qq}^3(t) - f_{qq}^2(t) = \\ &= 3 + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_0^1 dy Q(y) \int_0^1 dt f_{qq}^3(t) \approx 3 \left(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} \right), \end{aligned} \quad (7.55)$$

avendo usato il fatto che il primo momento di Mellin di P_{qq} e f_{qq}^2 si annulla, ovvero $\int_0^1 P_{qq}(t) dt = \int_0^1 f_{qq}^2(t) dt = 0$.

FLAVIANO MORONE - CROMODINAMICA QUANTISTICA

Chapter 8

Rottura spontanea di simmetria

Consideriamo la lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) \\ V(\phi^\dagger \phi) &= \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 - h(\text{Re}\phi),\end{aligned}\quad (8.1)$$

dove h è un campo magnetico esterno. Ponendo

$$\phi = \frac{\sigma + i\pi}{\sqrt{2}}, \quad (8.2)$$

otteniamo

$$V(\phi^\dagger \phi) = \frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 - h'\sigma, \quad (8.3)$$

dove $h' = h/\sqrt{2}$.

Supponiamo $\mu^2 < 0$. Riscriviamo V con $-\mu^2$ e $\mu^2 > 0$, e $h' = h$:

$$V(\phi^\dagger \phi) = -\frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 - h\sigma. \quad (8.4)$$

Calcoliamo il minimo di V :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \sigma} = -\mu^2\sigma + \lambda(\sigma^2 + \pi^2)\sigma - h = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \pi} = -\mu^2\pi + \lambda\pi(\sigma^2 + \pi^2) = 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

Per $\pi = 0$ avremo $-\mu^2\sigma + \lambda\sigma^3 - h = 0$. Assumendo h molto piccolo (driving-term):

1. $\sigma \sim O(h)$ massimo.
2. Ponendo $\sigma = \alpha + \beta h$ allora

$$\sigma = \pm v + \frac{h}{2\mu^2} \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (8.6)$$

Inserendo nella lagrangiana e tenendo solo i termini quadratici nei campi:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \Big|_{\text{MIN}} \sigma^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \Big|_{\text{MIN}} \pi^2 + \dots \text{interazioni}. \quad (8.7)$$

Ora

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} &= -\mu^2 + 3\lambda\sigma^2 + \lambda\pi^2 \Big|_{\text{MIN}} = -\mu^2 + \frac{3\lambda\mu^2}{\lambda} = 2\mu^2 + O(h) = M^2\sigma , \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} &= -\mu^2 + 3\lambda\pi^2 + \lambda\sigma^2 \Big|_{\text{MIN}} = -\mu^2 + \lambda \left(v^2 + \frac{vh}{\mu^2} \right) = \frac{\lambda v}{\mu^2} h = \frac{h}{v} = M_\pi^2 , \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial \pi} \Big|_{\text{MIN}} &= 0 ,\end{aligned}\tag{8.8}$$

cioè la matrice di massa è diagonale.

Consideriamo un campo

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi_1 + i\pi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma + i\pi_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ,\tag{8.9}$$

e la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + h\sigma .\tag{8.10}$$

La trasformazione **interna** di $SU(2)$

$$\Phi' = e^{i\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}/2} \Phi ,\tag{8.11}$$

lascia \mathcal{L} invariata. Ovviamente anche la trasformazione di $U(1)$

$$\Phi' = e^{i\alpha} \Phi ,\tag{8.12}$$

lascia \mathcal{L} invariata.

8.1 Teorema di Goldstone

Sia ora $V(\phi)$ un certo **potenziale** invariante sotto qualche gruppo di simmetria

$$\begin{aligned}\delta\phi^a &= i\alpha^A (T^A)^a_b \phi^b , \\ V(\phi') &= V(\phi) .\end{aligned}\tag{8.13}$$

Precisamente

$$V(\phi') = V(\phi + i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}\phi) \approx V(\phi) + \frac{\delta V}{\delta\phi} (i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}\phi) = V(\phi) ,\tag{8.14}$$

e quindi

$$\alpha^A \left(\frac{\delta V}{\delta\phi} \right)_a (T^A)^a_b \phi^b = 0 .\tag{8.15}$$

Differenziando rispetto a ϕ_c e essendo α^A arbitrari, otteniamo

$$\frac{\delta^2 V}{\delta\phi_c \delta\phi_a} (T^A)^a_b \phi^b + \frac{\delta V}{\delta\phi_a} (T^A)^a_b \delta_c^b = 0 .\tag{8.16}$$

Calcoliamo in $\phi^b = v^b$ al minimo:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta \phi_c \delta \phi_a} (T^A)^a_b v^b = 0, \quad (8.17)$$

che possiamo anche scrivere come

$$\boxed{M^2_{ca} (T^A)^a_b v^b = 0}, \quad (8.18)$$

o in forma matriciale compatta come

$$M^2 T^A v = 0. \quad (8.19)$$

Chiamando $T^A v = w^A$ avremo

$$\boxed{M^2 w^A = 0}. \quad (8.20)$$

L'equazione è soddisfatta se

- w è il vettore nullo, oppure
- w è autovettore di M^2 con autovalore nullo:

$$w \neq 0 \quad \text{e} \quad M^2 w = 0. \quad (8.21)$$

Ora w è diverso da zero se $T^A v \neq 0$, cioè se il generatore della simmetria originale è **spontaneamente rotto**, e avremo tante masse nulle quanti sono i generatori che non lasciano il vuoto invariante.

FLAVIANO MORONE - CROMODINAMICA QUANTISTICA

Chapter 9

Modello σ di Gell-Mann e Levy

Consideriamo la lagrangiana delle interazioni forti

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G_A^{\mu\nu} . \quad (9.1)$$

Se $m_f = 0$ il gruppo di simmetria è (3 quark $q = (q_1 q_2 q_3)^T$):

$$\boxed{SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A} , \quad (9.2)$$

con

$$SU(3)_V \quad \begin{cases} q' = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}/2} q \\ \bar{q}' = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}/2} \bar{q} \end{cases} . \quad (9.3)$$

$$U(1)_V \quad \begin{cases} q' = e^{i\beta} q \\ \bar{q}' = e^{-i\beta} \bar{q} \end{cases} . \quad (9.4)$$

$$SU(3)_A \quad \begin{cases} q' = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}/2\gamma^5} q \\ \bar{q}' = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}/2\gamma^5} \bar{q} \end{cases} . \quad (9.5)$$

$$U(1)_A \quad \begin{cases} q' = e^{i\beta\gamma^5} q \\ \bar{q}' = e^{i\beta\gamma^5} \bar{q} \end{cases} . \quad (9.6)$$

Dal teorema di Noether ricaviamo le correnti conservate $J_\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu q} \delta q$:

$$\boxed{\begin{matrix} V_\mu^A = \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^A}{2} q & V_\mu = \bar{q} \gamma_\mu q \\ A_\mu^A = \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\lambda^A}{2} q & A_\mu = \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 q \end{matrix}} . \quad (9.7)$$

Se introduciamo il termine di massa $\bar{q} M q$ con $q = (u \ d \ s)^T$ e

$$M = \begin{pmatrix} m_u & & \\ & m_d & \\ & & m_s \end{pmatrix} , \quad (9.8)$$

e prendiamo ad esempio

$$\frac{\lambda^A}{2} = \tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (9.9)$$

avremo

$$\bar{q}\gamma_\mu\tau^+q = (\bar{u} \bar{d} \bar{s})\gamma_\mu \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{u}\gamma_\mu d , \quad (9.10)$$

e quindi

$$\partial_\mu(\bar{u}\gamma_\mu d) = (\not{\partial}\bar{u})d + \bar{u}\not{\partial}d = (m_d - m_u)\bar{u}d , \quad (9.11)$$

cioè la corrente d'isospin non è conservata ma se $m_d \sim m_u$ allora è quasi conservata.

Al contrario

$$\begin{aligned} \bar{q}\gamma_\mu\gamma^5\tau^+q &= \bar{u}\gamma_\mu\gamma^5d , \\ \partial_\mu(\bar{u}\gamma_\mu\gamma^5d) &= (\bar{u}\not{\partial})\gamma^5d - \bar{u}\gamma^5(\not{\partial}d) = -(m_u + m_d)\bar{u}\gamma^5d , \end{aligned} \quad (9.12)$$

e quindi l'unica possibilità affinché la corrente assiale sia conservata è che $m_u = m_d = 0$.

La carica conservata associata a V_μ è

$$Q(t) = \int d^3x V^0(\vec{x}, t) = \int d^3x \bar{q}\gamma^0q = \int d^3x [u^\dagger u + d^\dagger d + s^\dagger s] = \mathcal{B} = \text{cost} , \quad (9.13)$$

dove \mathcal{B} è il **numero barionico**.

- $SU(3)_A$ è rotta spontaneamente e dinamicamente e si hanno 8 bosoni di Goldstone

$$\pi^A = \bar{q} \frac{\lambda^A}{2} \gamma^5 q . \quad (9.14)$$

- $U(1)_A$ non è una vera simmetria.
- $SU(3)_V$ è rotta perchè le masse non sono uguali.
- Solo $U(1)_V$ è una vera simmetria e implica la conservazione del numero barionico.

9.1 σ -Model

Consideriamo una **teoria** con σ e $\vec{\pi}$ e consideriamo le seguenti trasformazioni

$$\begin{array}{l} \text{vettoriali} \\ \text{assiali} \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{ll} \delta\sigma = 0 & \delta\vec{\pi} = -(\vec{\alpha} \times \vec{\pi}) \\ \delta\sigma = -\vec{\beta} \cdot \vec{\pi} & \delta\vec{\pi} = \vec{\beta}\sigma \end{array}} , \quad (9.15)$$

con

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) , \\ \vec{\beta} &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3) , \\ \vec{\pi} &= (\pi_1, \pi_2, \pi_3) . \end{aligned} \quad (9.16)$$

Costruiamo una lagrangiana invariante sotto queste trasformazioni:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial\pi)^2 - V(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)} . \quad (9.17)$$

Mostriamo che

$$\begin{aligned}\delta_V(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) &= 0 , \\ \delta_A(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) &= 0 .\end{aligned}\tag{9.18}$$

Infatti

$$\begin{aligned}\delta_V(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) &= 2\sigma\delta\sigma + 2\vec{\pi} \cdot \delta\vec{\pi} = 0 + 2\vec{\pi} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\pi}) = 0 , \\ \delta_A(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) &= 2\sigma\delta\sigma + 2\vec{\pi} \cdot \delta\vec{\pi} = -2\sigma\vec{\beta} \cdot \vec{\pi} + 2\vec{\pi} \cdot \vec{\beta}\sigma = 0 .\end{aligned}\tag{9.19}$$

Le correnti conservate sono

$$\begin{aligned}V_\mu^A &= (\partial_\mu \vec{\pi} \times \vec{\pi})^A , \\ A_\mu^A &= \sigma(\partial_\mu \vec{\pi})^A - \vec{\pi}^A \partial_\mu \sigma .\end{aligned}\tag{9.20}$$

Ora

$$(\pi')^i \approx \pi^i + (\alpha \times \pi)^i = (\delta^{ij} + \Delta^{ij})\pi^j .\tag{9.21}$$

Consideriamo le cariche conservate

$$\begin{aligned}Q^A &= \int d^3x (\partial_0 \vec{\pi} \times \vec{\pi})^A , \\ Q_5^A &= \int d^3x [\sigma(\partial_0 \pi)^A - \pi^A(\partial_0 \sigma)] .\end{aligned}\tag{9.22}$$

Valgono le seguenti regole di commutazione

$$\begin{aligned}[Q_i, Q_j] &= \imath\epsilon_{ijk}Q^k , \\ [Q_5^i, Q_5^j] &= \imath\epsilon^{ijk}Q^k \quad \text{non e' chiusa} , [Q_5^i, Q^j] = \imath\epsilon^{ijk}Q_5^k ,\end{aligned}\tag{9.23}$$

ma definendo $Q_\pm^i = (Q^i \pm Q_5^i)/2$ otteniamo

$$\begin{aligned}[Q_+^i, Q_+^j] &= \imath\epsilon^{ijk}Q_+^k , \\ [Q_-^i, Q_-^j] &= \imath\epsilon^{ijk}Q_-^k , \\ [Q_-^i, Q_+^j] &= 0 ,\end{aligned}\tag{9.24}$$

e quindi il gruppo di simmetria è

$$\boxed{SU(2) \otimes SU(2)} .\tag{9.25}$$

Introduciamo il campo

$$\Sigma = (\sigma + 2\imath\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) = \begin{pmatrix} \sigma + \imath\pi_3 & \imath(\pi_1 - \imath\pi_2) \\ \imath(\pi_1 + \imath\pi_2) & \sigma - \imath\pi_3 \end{pmatrix} ,\tag{9.26}$$

(con $\vec{\tau} = \vec{\sigma}/2$). Il campo Σ trasforma come

$$\begin{aligned}\Sigma' &= e^{-\imath\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \Sigma e^{\imath\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \sim \\ (1 - \imath\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau})\Sigma(1 + \imath\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}) &= \Sigma - \imath\vec{\alpha} \cdot (\vec{\tau}\Sigma - \Sigma\vec{\tau}) ,\end{aligned}\tag{9.27}$$

esplicitamente:

$$\begin{aligned}
\sigma' + 2i\vec{\tau} \cdot \pi' &= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi - i\vec{\alpha} \cdot (\vec{\tau}(\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) - (\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\vec{\tau})2i = \\
&= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi - i\alpha^i (\tau^i \tau^k - \tau^k \tau^i) \pi^k 2i = \\
&= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi - i\alpha^i \pi^k 2i [\tau^i, \tau^k] = \\
&= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi - i\alpha^i \pi^k 2i \epsilon^{ijk} \pi^j = \\
&= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi + 2i\alpha^i \epsilon^{ijk} \pi^k \pi^j = \\
&= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi + 2i\epsilon^{jik} \alpha^i \pi^k \pi^j = \\
&= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi + 2i\pi^j (\vec{\alpha} \times \vec{\pi})^j = \\
&= \sigma + 2i\tau^j [\pi^j + (\vec{\alpha} \times \vec{\pi})^j] ,
\end{aligned} \tag{9.28}$$

e quindi

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\sigma &= 0 \\ \delta\vec{\pi} &= (\vec{\alpha} \times \vec{\pi}) \end{aligned}} , \tag{9.29}$$

che sono le trasformazioni vettoriali.

Inoltre

$$\begin{aligned}
\Sigma' &= e^{i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}} \Sigma e^{i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}} \sim \\
(1 + i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}) \Sigma (1 + i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}) &= \Sigma + i\vec{\beta} \cdot (\vec{\tau} \Sigma + \Sigma \vec{\tau}) ,
\end{aligned} \tag{9.30}$$

esplicitamente

$$\begin{aligned}
\sigma' + 2i\vec{\tau} \cdot \pi' &= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi + i\beta^i \{\tau^i, \tau^k\} \pi^k 2i + 2\sigma i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau} = \\
&= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi + i\beta^i \pi^k 2i \frac{\delta^{ik}}{2} + 2\sigma i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau} = \\
&= \sigma + 2i\vec{\tau} \cdot \pi - 2 \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\pi}}{2} + 2\sigma i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau} = \\
&= (\sigma - \vec{\beta} \cdot \vec{\pi}) + 2i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} + 2\sigma i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau} ,
\end{aligned} \tag{9.31}$$

e quindi

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\sigma &= -\vec{\beta} \cdot \vec{\pi} \\ \delta\vec{\pi} &= \vec{\beta} \sigma \end{aligned}} , \tag{9.32}$$

che sono le trasformazioni assiali.

Chiamiamo

$$\begin{aligned}
e^{i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}} &= U_A(\vec{\beta}) \\
e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} &= U_V(\vec{\alpha}) .
\end{aligned} \tag{9.33}$$

Avremo

$$\begin{aligned}
\Sigma' &= U_A(\vec{\beta}) \Sigma U_A(\vec{\beta}) , \\
\Sigma'' &= U_V^\dagger(\vec{\alpha}) \Sigma' U_V(\vec{\alpha}) = U_V^\dagger(\vec{\alpha}) U_A(\vec{\beta}) \Sigma U_A(\vec{\beta}) U_V(\vec{\alpha}) .
\end{aligned} \tag{9.34}$$

Per $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}/2$ avremo

$$\Sigma'' = \Sigma U(\vec{\gamma}) = \Sigma U_R(\vec{\gamma}) = \Sigma e^{i\vec{\gamma} \cdot \vec{\tau}} . \tag{9.35}$$

Per $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} = \vec{\gamma}/2$ avremo

$$\Sigma'' = U^\dagger(\vec{\gamma})\Sigma = U_L^\dagger(\vec{\gamma})\Sigma = e^{-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\tau}}\Sigma . \quad (9.36)$$

Insieme

$$\boxed{\begin{array}{l} \Sigma' = U_L^\dagger \Sigma U_R \\ \Sigma'^\dagger = U_R^\dagger \Sigma^\dagger U_L \end{array}} . \quad (9.37)$$

Costruiamo l'invariante $\text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger)$. Infatti

$$\text{tr}(\Sigma'\Sigma'^\dagger) = \text{tr}(U_L^\dagger \Sigma U_R U_R^\dagger \Sigma^\dagger U_L) = \text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger) . \quad (9.38)$$

Possiamo allora costruire la lagrangiana invariante sotto U_L e U_R :

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{4}\text{tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) - V(\Sigma\Sigma^\dagger)} , \quad (9.39)$$

dove $V(\Sigma\Sigma^\dagger)$ è dato da:

$$V(\Sigma\Sigma^\dagger) = \frac{\mu^2}{4}\text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger) + \frac{\lambda}{16}[\text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger)]^2 + \lambda'\text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger\Sigma\Sigma^\dagger) , \quad (9.40)$$

dove gli ultimi due termini sono uguali in $SU(2)$, ma non in $SU(3)$. Infatti

$$\begin{aligned} \Sigma\Sigma^\dagger &= (\sigma + 2i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})(\sigma - 2i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}) = \\ &= \sigma^2 + 4(\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})^2 = \sigma^2 + \tau_i\pi_j(\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\tau_k) = \sigma^2 + \vec{\pi}^2 . \end{aligned} \quad (9.41)$$

Quindi

$$\text{tr}(\Sigma\Sigma^\dagger) = 2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) , \quad (9.42)$$

e $V(\Sigma\Sigma^\dagger) = V(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$.

Ovviamente $\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger = (\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \vec{\pi})^2$, e quindi

$$\text{tr}(\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) = 2[(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \vec{\pi})^2] . \quad (9.43)$$

Quindi \mathcal{L} è invariante sotto $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$.

Consideriamo adesso anche i **nucleoni**. Costruiamo il doppietto d'**isospin**

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} , \quad (9.44)$$

che trasforma come

$$\begin{aligned} N' &= \exp(i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau})N & N' &= \exp(i\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}\gamma^5)N \\ \bar{N}' &= \bar{N}\exp(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}) & \bar{N}' &= \bar{N}\exp(i\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}\gamma^5) . \end{aligned} \quad (9.45)$$

Consideriamo la trasformazione

$$N' = (1 + i\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau} + i\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}\gamma^5)N . \quad (9.46)$$

Per $\alpha = \beta = \gamma/2$:

$$N' = \left[1 + i\frac{\vec{\gamma}}{2} \cdot \vec{\tau}(1 + \gamma^5) \right] N \quad \text{trasformazione right} . \quad (9.47)$$

Definiamo

$$\begin{aligned} N_R &= \frac{1+\gamma_5}{2} N & N_L &= \frac{1-\gamma_5}{2} N \\ \bar{N}_R &= \bar{N} \frac{1-\gamma_5}{2} & \bar{N}_L &= \bar{N} \frac{1+\gamma_5}{2} . \end{aligned} \quad (9.48)$$

N_R trasforma sotto la trasformazione right come

$$\begin{aligned} N'_R &= \frac{1 + \gamma_5}{2} N' = \frac{1 + \gamma_5}{2} \left[1 + i\frac{\vec{\gamma}}{2} \cdot \vec{\tau}(1 + \gamma^5) \right] N = (1 + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\tau}) N_R , \\ N'_L &= \frac{1 - \gamma_5}{2} N' = N_L , \\ \bar{N}'_R &= \bar{N}' \frac{1 - \gamma_5}{2} = \bar{N} \left[1 - i\frac{\vec{\gamma}}{2} \cdot \vec{\tau}(1 - \gamma^5) \right] \frac{1 - \gamma_5}{2} = \bar{N}_R (1 - i\vec{\gamma} \cdot \vec{\tau}) , \\ \bar{N}'_L &= \bar{N}_L . \end{aligned} \quad (9.49)$$

Tutto vale anche per la trasformazione left:

$$N' = \left[1 - i\frac{\vec{\gamma}}{2} \cdot \vec{\tau}(1 - \gamma^5) \right] N \quad \text{trasformazione left} . \quad (9.50)$$

Allora se scriviamo la lagrangiana

$$\mathcal{L}_N = \bar{N}_R i \not{\partial} N_R + \bar{N}_L i \not{\partial} N_L , \quad (9.51)$$

possiamo mostrare che è invariante sotto

$$\begin{aligned} N'_R &= \exp(i\vec{\gamma} \cdot \vec{\tau}) N_R = U_R N_R , \\ \bar{N}'_R &= \bar{N}_R \exp(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\tau}) , \\ N'_L &= N_L , \\ \bar{N}'_L &= \bar{N}_L . \end{aligned} \quad (9.52)$$

Al contrario, un termine di massa del tipo

$$(\bar{N}_R N_L + \bar{N}_L N_R) , \quad (9.53)$$

non è invariante.

Un termine del tipo

$$\mathcal{L}_I = Y [(\bar{N}_L \Sigma N_R) + (\bar{N}_R \Sigma^\dagger N_L)] , \quad (9.54)$$

è un'interazione invariante. Richiedendo che la teoria sia **rinormalizzabile** non abbiamo più operatori di dimensione 4 invarianti.

Non abbiamo una massa per i nucleoni, ma è chiaro che se potessimo dare a σ un valore di aspettazione sul vuoto non nullo, allora la **rottura spontanea** darebbe proprio il termine di massa che cerchiamo. Quindi, consideriamo

$$V(\Sigma \Sigma^\dagger) = -\frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 , \quad (9.55)$$

con

$$\begin{aligned}\langle 0|\sigma|0\rangle &= v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}, \\ \langle 0|\pi_i|0\rangle &= 0.\end{aligned}\tag{9.56}$$

Sviluppando intorno al minimo avremo

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial\vec{\pi})^2 - \frac{1}{2}M_\sigma^2\sigma^2 + \bar{N}_R i \not{\partial} N_R + \bar{N}_L i \not{\partial} N_L + \\ &= Y \left[\bar{N} \frac{(1+\gamma^5)}{2} v \frac{(1+\gamma^5)}{2} N \right] + Y \left[\bar{N} \frac{(1-\gamma^5)}{2} v \frac{(1-\gamma^5)}{2} N \right],\end{aligned}\tag{9.57}$$

dove il termine $Y\bar{N}Nv$ è proprio il termine di **massa dei nucleoni**.

FLAVIANO MORONE - CROMODINAMICA QUANTISTICA

Chapter 10

Technicolor

- Lo spettro delle masse delle particelle ha origine da una **gerarchia di scale di rottura di simmetria**.
- Alle energie più basse il mondo appare esattamente **simmetrico** sotto un gruppo di simmetria

$$SU(3)_c \otimes U(1)_{em} , \quad (10.1)$$

la simmetria di colore delle interazioni **forti** e la simmetria dell'elettromagnetismo.

- Varie altre simmetrie come l'**isospin** sono presenti, ma sono solo approssimate e sembrano essere una conseguenza accidentale dello spettro di massa.
- Nonostante ciò la simmetria vera delle leggi della natura è probabilmente molto più grande di $SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$, ma la gran parte di questa simmetria è **nascosta** dalla **rottura spontanea**.
- La rottura spontanea di una simmetria è un fenomeno che si verifica ad una **scala caratteristica** e sono queste scale di rottura che sembrano controllare lo spettro delle particelle.
- Tipicamente, la rottura spontanea di una simmetria è un fenomeno di **bassa energia**, nel senso che le ampiezze che coinvolgono **impulsi più grandi** della scala di rottura caratteristica appaiono quasi **simmetriche**, mentre sotto questa scala le ampiezze sono molto **asimmetriche**.
- Quando l'energia **aumenta** la dimensione del **gruppo di simmetria cresce**.
- La rottura di una simmetria è segnalata da un **parametro d'ordine**. Un parametro d'ordine è un valore di aspettazione sul vuoto (VEV) non nullo di qualche **campo locale** che trasforma in modo non banale sotto il gruppo di simmetria.
- Il parametro d'ordine è generalmente una **quantità dimensionale**.
- Il valore del parametro d'ordine è determinato dalla scala di rottura della simmetria.

- Una simmetria esatta **non rotta** implica spesso certe proprietà definite in una teoria: ad esempio l'uguaglianza delle masse in un **multipletto** o, nel caso della simmetria **chirale**, l'annullarsi di certe masse.
- Il fatto che la rottura di simmetria è un fenomeno di bassa energia proibisce violazioni di queste proprietà arbitrariamente grandi. Generalmente le masse o le differenze di massa che risultano dalla rottura saranno dell'ordine della scala di rottura o più piccole.
- Nel caso della simmetria elettrodebole tutti i quark, i leptoni e i bosoni di gauge avrebbero masse nulle se la simmetria elettrodebole fosse non rotta. La scala di rottura è dell'ordine di 250 GeV. Qualsiasi particella la cui massa è superiore a 250 GeV deve avere una massa $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ permessa, cioè **non protetta** da $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.
- Nel modello di W-S, la rottura di simmetria avviene attraverso l'introduzione del doppietto di Higgs

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

che ha un VEV non nullo $\langle 0|\Phi|0\rangle = \eta \neq 0$. L'accoppiamento dell'Higgs ai campi di gauge e ai campi di materia attraverso gli accoppiamenti di Yukawa genera le masse delle particelle, siano esse bosoni di gauge o campi di materia.

- La rottura spontanea di $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ad una scala ~ 250 GeV è un fatto necessario. Quello che è meno chiaro è che il meccanismo che rompe la simmetria debba essere innescato da una teoria scalare canonica del tipo $\lambda\phi^4$.
- Infatti c'è una difficoltà molto seria con l'esistenza di campi scalari fondamentali che è chiamata **problema della gerarchia di gauge**. Infatti, supponiamo che esista una scala di rottura di simmetria a qualche energia molto alta come quella che interviene nelle teorie grandi-unificate. Il problema è come arrangiare i parametri della teoria per assicurare un gap di molti ordini di grandezza tra le scale di rottura di alta e bassa energia. Generalmente c'è una tendenza molto forte, a causa di effetti quantistici, per la quale le due scale vengono attratte l'una all'altra, a meno che i parametri della teoria non siano aggiustati con precisione assurda.

Nella teoria di grande unificazione di Glashow e Georgi il gruppo di simmetria è $SU(5)$. In questa teoria due tipi di rottura si devono realizzare. Uno ad energia $\sim 10^{15}$ GeV, che rompe $SU(5)$ in

$$SU(5) \rightarrow SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) , \quad (10.3)$$

e questa rottura viene realizzata con un campo di Higgs 24-dimensionale. Il secondo stage di rottura da

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \rightarrow SU(3) \otimes U(1)_{\text{em}} , \quad (10.4)$$

è innescato dal campo di Higgs a 5 dimensioni con VEV

$$\langle \phi \rangle \sim 10^2 \text{ GeV} . \quad (10.5)$$

La proposta ovvia è costruire un potenziale $V(\phi, \Phi)$ con minimo

$$\langle \Phi \rangle = 10^3 \langle \phi \rangle , \quad (10.6)$$

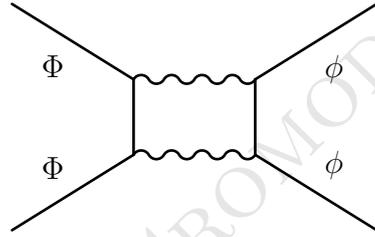
ad esempio

$$V(\phi, \Phi) = \lambda_1 (\Phi^2 - \langle \Phi \rangle^2)^2 + \lambda_2 (\phi^2 - \langle \phi \rangle^2)^2 , \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0 , \quad (10.7)$$

che ha un minimo per

$$\begin{aligned} \Phi &= \langle \Phi \rangle , \\ \phi &= \langle \phi \rangle . \end{aligned} \quad (10.8)$$

La difficoltà è che le correzioni radiative quantistiche rinormalizzano V e introducono accoppiamenti tra ϕ e Φ . La sorgente più semplice di tali correzioni in $SU(5)$ viene dal fatto che sia ϕ che Φ interagiscono con i bosoni di gauge di $SU(5)$, per esempio attraverso il diagramma:



$$\sim \frac{g^4}{8\pi^2} \phi^2 \Phi^2 , \quad (10.9)$$

che dà correzioni proporzionali a $\phi^2 \Phi^2$. L'effetto è devastante: il minimo del potenziale è shiftato da

$$(\langle \Phi \rangle, \langle \phi \rangle) \rightarrow \left(\langle \Phi \rangle, \frac{g^2 \langle \phi \rangle}{4\pi \sqrt{\lambda_2}} \right) , \quad (10.10)$$

e così invece del rapporto di 10^{-13} abbiamo

$$\frac{\langle \phi \rangle}{\langle \Phi \rangle} \sim \frac{g^2}{4\pi \sqrt{\lambda_2}} \sim O(\alpha) . \quad (10.11)$$

Per compensare questi effetti radiativi è necessario, ad ogni ordine, tornare indietro e ritoccare delicatamente i parametri in V . Nel caso presente la precisione richiesta è una parte su 10^{26} .

Consideriamo, al contrario, la scala della rottura di simmetria chirale nel settore QCD della teoria $SU(5)$. La costante α_s è funzione dell'impulso

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_s}{\partial \ln q^2} &= \beta(\alpha_s) = -\beta_0 \frac{\alpha_s^2}{\pi^2} , \\ \beta_0 &= \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) . \end{aligned} \quad (10.12)$$

Quando $SU(5)$ si rompe in $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ a 10^{15} GeV, α_s è piccola e il settore QCD è perfettamente descritto dalla teoria delle perturbazioni. Quando la scala di energia decresce α_s cresce finché diventa grande alla scala Λ_{QCD} . A questo punto gli effetti non perturbativi inducono la **rottura** della simmetria **chirale**.

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_0}^{\sim 1} \frac{\alpha_s}{\alpha_s^2} &= -\frac{\beta_0}{\pi^2} \int_{\ln M^2}^{\ln \Lambda_{\text{QCD}}^2} d \ln q^2, \\ -\frac{1}{\alpha_s} \Big|_{\alpha_0}^1 &= -\frac{\beta_0}{\pi^2} \ln \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{M^2} = \frac{1}{\alpha_0} - 1 = \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \sim \frac{1}{\alpha_0}, \\ \ln \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{M^2} &= -\frac{\pi^2}{\alpha_0 \beta_0}, \\ \boxed{\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{M} \sim e^{-1/\alpha_0}}, \end{aligned} \tag{10.13}$$

cosicché con un valore piuttosto ordinario di α_0 , il rapporto $\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{M}$ può facilmente e naturalmente essere 10^{-15} . Sarebbe ovviamente desiderabile che la scala delle interazioni deboli a ~ 100 GeV potesse essere generata in un modo ugualmente naturale. Questo è l'obiettivo della teoria di rottura di simmetria del technicolor.

10.1 Modello semplice senza scalari

Immaginiamo di essere in un mondo con soli due quark a massa nulla che interagiscono attraverso la forza di colore ordinaria. Se arrangiamo i due quark in un doppietto

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \tag{10.14}$$

potremmo scrivere la lagrangiana di questo sistema come:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{1}{4}G_A^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^A, \tag{10.15}$$

con la derivata covariante e il tensore del campo di colore dati da

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &= \left(\partial_\mu - ig_s G_\mu^A \frac{\lambda^A}{2} \right) \Psi, \\ G_A^{\mu\nu} &= \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + g_s f_{ABC} G_B^\mu G_C^\nu. \end{aligned} \tag{10.16}$$

La lagrangiana è invariante sotto il gruppo di trasformazioni seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi' = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau})\Psi \\ \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} \exp(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi' = \exp(i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}\gamma^5)\Psi \\ \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} \exp(-i\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}\gamma^5) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi' = \exp(i\theta)\Psi \\ \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} \exp(-i\theta) \end{array} \right\}. \tag{10.17}$$

Le correnti conservate e le cariche associate sono

$$\left\{ \begin{array}{l} V_\mu^i = \bar{\Psi}\gamma^\mu\tau^i\Psi \\ A_\mu^i = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\tau^i\Psi \\ B_\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_V^i = \int d^3x \Psi^\dagger\tau^i\Psi \\ Q_A^i = \int d^3x \Psi^\dagger\gamma^5\tau^i\Psi \\ B = \int d^3x \Psi^\dagger\Psi \end{array} \right\}. \tag{10.18}$$

E' facile vedere che Q_V^i e Q_A^i non formano un'algebra chiusa:

$$\begin{cases} [Q_V^i, Q_V^j] = \imath \epsilon^{ijk} Q_V^k \\ [Q_A^i, Q_A^j] = \imath \epsilon^{ijk} Q_V^k \\ [Q_A^i, Q_V^j] = \imath \epsilon^{ijk} Q_A^k \end{cases} . \quad (10.19)$$

Tuttavia, definendo

$$\begin{cases} Q_R^i = \frac{1}{2}(Q_V^i + Q_A^i) \\ Q_L^i = \frac{1}{2}(Q_V^i - Q_A^i) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} [Q_R^i, Q_R^j] = \imath \epsilon^{ijk} Q_R^k \\ [Q_L^i, Q_L^j] = \imath \epsilon^{ijk} Q_L^k \\ [Q_R^i, Q_L^j] = 0 \end{cases} . \quad (10.20)$$

Le cariche Q_R^i e Q_L^i formano due algebre chiuse e quindi il gruppo di simmetria di questo modello è

$$SU(2)_R \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_B . \quad (10.21)$$

Per comodità scriviamo anche le correnti corrispondenti

$$\begin{cases} R_\mu^i = \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \tau^i \Psi_R \\ L_\mu^i = \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \tau^i \Psi_L \\ B_\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \end{cases} . \quad (10.22)$$

B_μ è associata alla conservazione del numero barionico e non è rilevante nella presente discussione. In effetti, a livello classico esiste ancora un'altra simmetria associata al gruppo abeliano

$$U(1)_A \rightarrow A_\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi . \quad (10.23)$$

Tuttavia, quantisticamente questa simmetria è rotta da **effetti istantonici** e non costituisce una vera simmetria della lagrangiana.

Nel limite di massa nulla queste correnti sono tutte conservate, ma se proviamo ad inserire le masse dei quark troviamo:

$$\begin{aligned} \partial_\mu V_+^\mu &= \partial_\mu (\bar{u} \gamma^\mu d) = (m_d - m_u) \bar{u} d , \\ \partial_\mu A_+^\mu &= \partial_\mu (\bar{u} \gamma^\mu \gamma^5 d) = -(m_d + m_u) \bar{u} \gamma^5 d . \end{aligned} \quad (10.24)$$

Poiché le interazioni forti non distinguono il **sapore**, finché non consideriamo le interazioni elettrodeboli, le V_μ^\pm, V_μ^3 sono conservate. Al contrario, anche a interazioni elettrodeboli spente, le A_μ^\pm, A_μ^3 **non sono conservate**. In altre parole, è proprio l'**interazione forte** che **rompe spontaneamente e dinamicamente** la **simmetria chirale** secondo lo schema:

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \rightarrow SU(2)_{\text{ISOSPIN}} . \quad (10.25)$$

Come ogni simmetria spontaneamente rotta, ci aspettiamo di trovare un valore di aspettazione sul vuoto di certi operatori di campo **non nullo**. Richiedendo che sia soddisfatta l'invarianza sotto trasformazioni di Lorentz, la possibilità più semplice è la presenza di un **condensato** del tipo:

$$\langle 0 | \bar{u} u + \bar{d} d | 0 \rangle \neq 0 , \quad (10.26)$$

che non è invariante né sotto $SU(2)_R$ né sotto $SU(2)_L$, ma solo sotto $SU(2)_{\text{ISOSPIN}}$. Il vuoto ha ora una simmetria **minore** rispetto a quella della lagrangiana e il teorema di Goldstone ci dice che ci devono essere bosoni a massa nulla di spin 0, tanti quanti sono i generatori rotti che non lasciano il vuoto invariante. In questo caso avremo 3 **pioni** a massa nulla π^A che formano un isotripletto e ruotano sotto $SU(2)_{\text{ISO}}$. Notiamo che poiché il condensato è un singoletto di colore, $SU(3)_{\text{color}}$ è ancora una buona simmetria. Se il condensato non fosse un singoletto di colore avremmo anche una rottura del gruppo di colore. Possiamo assumere ragionevolmente che la **scala** di energia a cui avviene la rottura è proprio la scala a cui la forza di colore diventa forte, ovvero ad energie $\sim \Lambda_{\text{QCD}}$.

Una quantità importante è la costante di decadimento del pione:

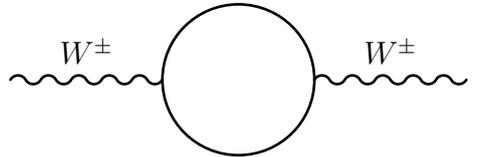
$$\langle 0 | A_\mu^i | \pi^j \rangle = p_\mu f_\pi \delta^{ij} . \quad (10.27)$$

- f_π definita in questo modo è una quantità caratteristica delle sole interazioni forti, indipendente quindi dalle interazioni deboli. La sua intensità è regolata dalla scala della QCD, ossia Λ_{QCD} .
- f_π può essere misurata dai decadimenti del pione e vale $f_\pi \sim 93$ MeV. Inoltre, grazie alla simmetria di **isospin**, ciascun pione ha la stessa f_π .

Immaginiamo di accendere l'ordinaria interazione elettrodebole ma **senza campi scalari fondamentali** introdotti solitamente per dare massa ai bosoni di gauge W^\pm, Z . Notiamo subito che la presenza del condensato (10.26) rompe spontaneamente il gruppo di gauge elettrodebole proprio nel modo giusto

$$\begin{aligned} SU(2)_L \otimes U(1)_Y &\rightarrow U(1)_{\text{EM}} \\ SU(2)_R \otimes SU(2)_L &\rightarrow SU(2)_{\text{ISOSPIN}} . \end{aligned} \quad (10.28)$$

Vediamo ora come i pioni a massa nulla sostituiscono i campi scalari fondamentali e diventano le componenti longitudinali dei **bosoni massivi** W^\pm, Z . Concentriamoci sul propagatore dei bosoni di gauge carichi. Quello che ci interessa è il contributo adronico ai diagrammi di polarizzazione del vuoto:



$$\quad (10.29)$$

Questi diagrammi modificano il propagatore libero nel modo seguente

$$\frac{1}{q^2 + i0} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \rightarrow \frac{1}{q^2 [1 + \Pi(q^2)] + i0} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) . \quad (10.30)$$

Se $\Pi(q^2)$ è regolare in $q^2 = 0$, allora anche il propagatore corretto ha un polo in $q^2 = 0$ e i bosoni di gauge restano a massa nulla. Tuttavia è facile vedere che

$\Pi(q^2)$ sviluppa proprio un polo in $q^2 = 0$ a causa dell'accoppiamento con i pioni. Infatti il contributo dei pioni è dato dai diagrammi del tipo:

$$\begin{array}{c} W^+ \quad \quad \pi^+ \quad \quad W^+ \\ \text{~~~~~} \text{-----} \text{~~~~~} \end{array} . \quad (10.31)$$

L'accoppiamento del W^+ con la corrente del pione è dato da $g_2 W_\mu^+ A_\mu^+$, dove g_2 è la costante di accoppiamento di $SU(2)_L$. La corrente A_μ^+ si accoppia ai π^+ con intensità f_{π^+} . Di conseguenza $\Pi(q^2)$ riceve un contributo dai pioni del tipo

$$\Pi(q^2)_\pi \sim \frac{(g_2 f_{\pi^+})^2}{q^2} . \quad (10.32)$$

Quindi il propagatore del W^+ ha ora un polo per $q^2 = (g_2 f_{\pi^+})^2$ e quindi una massa pari a:

$$M_W^2 = (g_2 f_{\pi^+})^2 . \quad (10.33)$$

Per i bosoni di gauge neutri otteniamo, invece, una matrice di massa 2×2 nello spazio di B e W^0 come si vede considerando i diagrammi

$$\begin{array}{c} W^0 \quad \quad W^0 \quad \quad B \quad \quad B \\ \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \text{~~~~~} \end{array} , \quad (10.34)$$

dove g_1 è la costante di accoppiamento di $U(1)_Y$. La matrice di massa sarà data da

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} g_2^2 & g_2 g_1 \\ g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} f_{\pi^0}^2 . \quad (10.35)$$

Il determinante della matrice di massa è nullo e questo corrisponde ad un autovalore nullo che identifichiamo con la massa del fotone. L'altro autovalore è semplicemente dato dalla traccia e corrisponderà alla massa dello Z :

$$\begin{aligned} m_\gamma^2 &= 0 \\ m_Z^2 &= \text{tr} \mathcal{M}^2 = (g_1^2 + g_2^2) f_{\pi^0}^2 . \end{aligned} \quad (10.36)$$

Gli autovettori che diagonalizzano la matrice sono

$$\begin{aligned} Z_\mu &= W_\mu^0 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W , \\ A_\mu &= W_\mu^0 \sin \theta_W + B_\mu \cos \theta_W . \end{aligned} \quad (10.37)$$

Un altro risultato notevole è il rapporto

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \frac{f_{\pi^+}}{f_{\pi^0}} = \cos \theta_W \frac{f_{\pi^+}}{f_{\pi^0}} , \quad (10.38)$$

e poiché per la simmetria d'isospin: $f_{\pi^+} = f_{\pi^0}$, troviamo la relazione

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W . \quad (10.39)$$

La relazione (10.39) è un risultato che si ottiene a livello albero nel modello con l'Higgs ordinario e sarà modificata quindi dalle correzioni radiative elettrodeboli. Ci si potrebbe domandare se altre correzioni possano venire a causa dell'autointerazione dell'Higgs. La risposta è **no**. Il motivo è dovuto alla presenza di una simmetria $SU(2)$ del doppietto di Higgs che rimane dopo la rottura. Infatti il potenziale dell'Higgs ha una simmetria $O(4) \sim SU(2)_L \otimes SU(2)'$ e il condensato $\langle \Phi \rangle \neq 0$ rompe la simmetria secondo lo schema:

$$SU(2)_L \otimes SU(2)' \rightarrow SU(2) . \quad (10.40)$$

La simmetria $SU(2)$ che rimane dopo la rottura è chiamata **custodiale** e garantisce la validità della relazione (10.39) a tutti gli ordini dell'autointerazione dell'Higgs.

Analogamente le interazioni forti rompono la simmetria chirale $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, ma conservano una $SU(2)_{\text{custodial}}$ che altro non è che la simmetria d'isospin $SU(2)_{\text{ISOSPIN}}$. Di conseguenza la relazione (10.39) **vale a tutti gli ordini delle interazioni forti**. Ovviamente l'interazione elettrodebole non preserva una $SU(2)_{\text{custodial}}$ e quindi la relazione (10.39) sarà modificata dalle correzioni radiative elettrodeboli.

Questo modello di sicuro non può pretendere di essere una descrizione del mondo reale, ad esempio perché:

1. la teoria non ha **veri pioni**, poiché essi appaiono solo come un grado di libertà di bosoni vettoriali;
2. le masse dei W^\pm, Z sono dell'ordine delle decine di MeV dati i valori di g_1, g_2, f_π .

L'idea però è chiara: la rottura di simmetria che avviene nelle interazioni forti ha lo **stesso effetto** sui bosoni di gauge deboli della rottura indotta dal doppietto di Higgs costruito *ad hoc* nella teoria standard.

10.2 Technicolor

Supponiamo che esista un doppietto di fermioni che oltre ad avere un'interazione elettrodebole, partecipi anche ad una **nuova interazione forte**, che chiamiamo **technicolor**. Questi fermioni sentiranno una techniforza ed è naturale chiamarli technifermioni. Indichiamo il technidoppietto con:

$$T = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} . \quad (10.41)$$

- Per il momento non facciamo assunzioni sul colore, numero barionico o numero leptonico di questo doppietto. Diciamo solo che T_{LEFT} è un doppietto di $SU(2)_{\text{LEFT}}$, e U_R e D_R sono singoletti di $SU(2)_{\text{LEFT}}$.

- Le interazioni di technicolore sono molto simili a quelle della QCD, ad esempio richiediamo che il gruppo di technicolor sia un gruppo di gauge non abeliano e la teoria asintoticamente libera.
- Una differenza essenziale rispetto alla QCD è che l'interazione di technicolor diventa forte ad energie molto più alte rispetto alla scala a cui le interazioni di colore diventano forti. Questo richiede in particolare che il gruppo di gauge di technicolor sia più grande di $SU(3)_{\text{color}}$, di modo che la funzione β_{TC} , che regola l'intensità della costante di accoppiamento di technicolor α_{TC} , sia più negativa della corrispondente funzione β_{color} . Possiamo supporre che α_{TC} diventi grande (~ 1) vicino alla scala di rottura della simmetria dell'interazione elettrodebole.
- Il doppietto (U, D) è proprio come il doppietto (u, d) con il colore sostituito dal technicolore.

Tutti i ragionamenti precedenti si applicano allo stesso modo. La simmetria chirale $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ è rotta spontaneamente e dinamicamente dall'interazione di technicolor e questo porta alla comparsa del condensato

$$\langle 0 | \bar{U}U + \bar{D}D | 0 \rangle \neq 0, \quad (10.42)$$

insieme a 3 **technipioni** a massa nulla. I bosoni W^\pm, Z diventano massivi e le loro masse saranno proporzionali alla costante di decadimento del technipione F_π :

$$M_W = g_2 F_\pi. \quad (10.43)$$

Usando i valori noti di M_W e g_2 otteniamo $F_\pi \sim 250$ GeV. Assumendo che la dinamica del technicolor (QTD) sia una versione riscalata della QCD otteniamo come ordine di grandezza della scala della QTD:

$$\frac{\Lambda_{\text{QTD}}}{\Lambda_{\text{QCD}}} \sim \frac{F_\pi}{f_\pi} \sim 2600 \rightarrow \Lambda_{\text{QTD}} \sim 500 \text{ GeV se } \Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 \text{ MeV}. \quad (10.44)$$

Questo risolve il problema di dare una grossa massa ai bosoni di gauge deboli e inoltre abbiamo sostituito il doppietto di Higgs standard con un set di technifermioni fortemente interagenti. Il valore di aspettazione dell'Higgs $\langle \Phi \rangle$ è sostituito dal condensato (10.42), ovvero sia dal parametro di rottura di simmetria dell'interazione forte F_π .

Un'implicazione fenomenologica importante che potrebbe derivare dall'esistenza di almeno un doppietto di fermioni technicolorato è la seguente: • i W^\pm, Z avranno una componente longitudinale ad intrazione molto forte che si comporta come un **techniadrone** composto. Questo perché il grado di libertà longitudinale di questi bosoni è un technipione composto nello specifico. Quindi, mentre la produzione di W^\pm trasversi sarebbe la stessa che si avrebbe nella teoria standard indicando un W^\pm puntiforme, la produzione di un W^\pm longitudinale dovrebbe mostrare un complicato fattore di forma.

10.2.1 Modello a un doppietto

Il doppietto

$$T = \begin{pmatrix} U \\ D \end{pmatrix} \quad (10.45)$$

è un doppietto di $SU(2)_L$, ma singoletto di colore e trasforma sotto una rappresentazione non banale del gruppo di technicolor. Questo è l'esempio più semplice per rompere correttamente $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$.

Immaginiamo ora un mondo in cui ci siano quark colorati e technicolorati che interagiscono con i bosoni di gauge deboli di $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Se avessimo solo la QCD, i pioni ordinari diventerebbero la parte longitudinale di W^\pm, Z e scomparirebbero dallo spettro, mentre se avessimo solo la QTD, sarebbero i technipioni a rivestire questo ruolo. In un mondo in cui siano entrambe presenti, la combinazione lineare

$$|\pi \text{ assorbito}\rangle = \frac{F_\pi |\text{techni } \pi\rangle + f_\pi |\text{QCD } \pi\rangle}{\sqrt{F_\pi^2 + f_\pi^2}}, \quad (10.46)$$

diventerebbe il bosone di gauge longitudinale, mentre la combinazione ortogonale

$$|\pi \text{ fisico}\rangle = \frac{F_\pi |\text{QCD } \pi\rangle - f_\pi |\text{techni } \pi\rangle}{\sqrt{F_\pi^2 + f_\pi^2}}, \quad (10.47)$$

rimarrebbe un pione a massa nulla nello spettro. D'altra parte, dal momento che $F_\pi \gg f_\pi$, il pione fisico è maggiormente il pione della QCD, mentre il pione assorbito è maggiormente il technipione. Per capire da dove vengono queste combinazioni, consideriamo la corrente assiale totale

$$A_\mu^i = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma^5 \tau^i \Psi + \bar{T} \gamma_\mu \gamma^5 \tau^i T, \quad (10.48)$$

cosicché avremo

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu^i | \text{QCD } \pi^j \rangle &= p_\mu f_\pi \delta^{ij}, \\ \langle 0 | A_\mu^i | \text{techni } \pi^j \rangle &= p_\mu F_\pi \delta^{ij}, \end{aligned} \quad (10.49)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu^i | \pi^j \text{ fisico} \rangle &= 0, \\ \langle 0 | A_\mu^i | \pi^j \text{ assorbito} \rangle &= p_\mu \sqrt{F_\pi^2 + f_\pi^2} \delta^{ij}. \end{aligned} \quad (10.50)$$

I bosoni di gauge deboli si accoppiano ai pioni proprio con queste correnti assiali e quindi il pione fisico non ha accoppiamento, mentre la combinazione ortogonale è totalmente assorbita.

10.2.2 Modello a una famiglia

I fermioni ordinari sono raggruppati in famiglie. E' quindi possibile che anche i technifermioni siano organizzati in famiglie. Se una tale famiglia esistesse, potremmo identificarla nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} U_r^\alpha \\ D_r^\alpha \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} U_b^\alpha \\ D_b^\alpha \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} U_g^\alpha \\ D_g^\alpha \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} N^\alpha \\ E^\alpha \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} U_r^\alpha \\ D_r^\alpha \end{pmatrix}_R \quad \begin{pmatrix} U_b^\alpha \\ D_b^\alpha \end{pmatrix}_R \quad \begin{pmatrix} U_g^\alpha \\ D_g^\alpha \end{pmatrix}_R \quad \begin{pmatrix} N^\alpha \\ E^\alpha \end{pmatrix}_R, \quad (10.51)$$

dove ciascun doppietto è distinto dal colore rosso, blu, giallo o leptone. α è l'indice di technicolor e assumiamo che tutte le particelle in questa famiglia abbiano le stesse proprietà di techni-trasformazione. $(N^\alpha)_R$ è un techni-neutrino che è un singoletto sotto $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. E' naturale assumere che questi doppietti condensino con uguale intensità:

$$\langle \bar{U}_r U_r \rangle = \langle \bar{U}_b U_b \rangle = \langle \bar{U}_g U_g \rangle = \langle \bar{D}_r D_r \rangle = \langle \bar{D}_b D_b \rangle = \langle \bar{D}_g D_g \rangle = \langle \bar{E} E \rangle = \langle \bar{N} N \rangle \neq 0. \quad (10.52)$$

Se non ci fosse il techni-neutrino right-handed, allora nel settore technileptonico non ci sarebbe la simmetria $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ che protegge dopo la rottura la relazione $M_W/M_Z = \cos \theta_W$. Questo modello ha uno spettro ricco di techni-adroni con masse ~ 1 TeV. La techniforza legherebbe technifermioni e anti-technifermioni per formare techni-mesoni di spin $0, 1, 2, \dots$. Alcuni potrebbero anche essere colorati, per esempio potrebbe esserci un $\bar{U}E$ di spin 1 che avrebbe carica $-5/3$ e sarebbe un tripletto di colore.

10.3 Masse dei fermioni leggeri e interazioni di Fermi

Finora la fisica che abbiamo introdotto include fermioni e bosoni di gauge, senza scalari fondamentali. Il gruppo di gauge è

$$U(1)_Y \otimes SU(2)_L \otimes SU(3)_{\text{color}} \otimes \text{TECHNICOLOR}. \quad (10.53)$$

Ancora non abbiamo una descrizione completa: non abbiamo masse per i fermioni leggeri. Sappiamo d'altronde che un termine di massa violerebbe la simmetria $SU(2)_L$. Evidentemente sono necessarie **nuove interazioni**.

I fermioni osservati hanno una grande varietà di masse tutte ben al di sotto della scala del technicolor. Possiamo avere diverse possibilità:

- Le nuove interazioni inducono masse fermioniche che sono di ordine $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$ volte la scala del TC e α è una qualche costante di accoppiamento debole. Le masse all'ordine α^0 sono vietate da una speciale simmetria.
- Le nuove interazioni hanno luogo ad una varietà di scale tutte al di sopra della scala del TC.

Consideriamo quest'ultima possibilità e vediamo come questa può generare uno schema complesso di masse fermioniche sotto la scala del TC.

10.3.1 Interazioni di Fermi a 4 campi

Assumiamo che ad una scala ancora più alta di Λ_{TC} esista una **nuova** scala Λ_E di interazioni di cui non conosciamo la natura precisa (queste interazioni potrebbero venire ad esempio dallo scambio di particelle molto pesanti).

Il punto cruciale è che a basse energia queste interazioni prendono la forma di *vertici a molte particelle non rinormalizzabili con costante di accoppiamento*

dimensionali. Più in generale potrebbe essere necessaria una lunga o infinita gerarchia di interazioni non rinormalizzabili per descrivere la fisica di bassa energia.

Una generica interazione di Fermi a N campi richiede una costante di accoppiamento di dimensione

$$[g_N] = [m^{4-3N/2}] , \quad (10.54)$$

per avere una lagrangiana di dimensione 4. L'idea è la seguente:

- alla scala Λ_E sopra Λ_{TC} ci aspettiamo nuove interazioni che ad energia relativamente bassa producono accoppiamenti **effettivi** a molti fermioni.
- Gli operatori **effettivi** alle basse energie devono rispettare le simmetrie che non sono rotte alla scala Λ_E . Questo significa che le interazioni effettive a bassa energia devono essere invarianti sotto il gruppo

$$U(1)_Y \otimes SU(2)_L \otimes SU(3)_{\text{color}} \otimes \text{TECHNICOLOR} . \quad (10.55)$$

- Più è alta la dimensione dell'operatore e più piccolo è l'effetto indotto.
- Cerchiamo l'operatore di dimensioni più bassa che ha la costante di accoppiamento più grande. Il primo che troviamo è proprio un operatore a due campi del tipo $\bar{\Psi}_1 \Psi_2$ che però è escluso dalla simmetria $SU(2)_L$.
- L'operatore successivo che troviamo è un operatore a 4 campi di dimensione 6. Questo tipo di operatore può essere $SU(2)_L$ invariante e può dare quindi massa ai fermioni leggeri.

Mettiamoci nel modello a un techni-doppietto (U, D) insieme ad un doppietto di quark ordinari. Il colore è una complicazione irrilevante e può essere ignorato. Definiamo, quindi, una matrice 2×2 che sia un singoletto di TC:

$$M_T = \bar{T}T + i\vec{\tau} \cdot \bar{T}\gamma^5\vec{\tau}T . \quad (10.56)$$

Sotto $SU(2)_L$

$$M_T \rightarrow U M_T \quad U \in SU(2)_L , \quad (10.57)$$

e sotto $U(1)_Y$

$$M_T \rightarrow M_T \exp\left(i\theta\frac{\tau_3}{2}\right) . \quad (10.58)$$

Possiamo allora scrivere un accoppiamento $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ invariante tra quark e techniquark:

$$\frac{a}{\Lambda_E^2} \bar{q}_L M_T q_R + \frac{b}{\Lambda_E^2} \bar{q}_L M_T \tau_3 q_R + \text{h.c.} . \quad (10.59)$$

Quando i techniquark condensano, cosicché $\langle \bar{U}U + \bar{D}D \rangle \neq 0$, queste interazioni daranno massa ai quark leggeri attraverso i diagrammi:

$$(10.60)$$

Il propagatore libero verrà modificato al modo seguente

$$\frac{p_\mu \gamma^\mu}{p^2} \rightarrow \frac{p_\mu \gamma^\mu}{p^2} + \frac{p_\mu \gamma^\mu}{p^2} a \frac{\langle \bar{U}U \rangle}{\Lambda_E^2} \frac{p_\mu \gamma^\mu}{p^2} = \frac{1}{p_\mu \gamma^\mu} \left[1 + a \frac{\langle \bar{U}U \rangle}{\Lambda_E^2} \frac{1}{p_\mu \gamma^\mu} \right] \sim \frac{1}{p_\mu \gamma^\mu - a \frac{\langle \bar{U}U \rangle}{\Lambda_E^2}} . \quad (10.61)$$

Quindi le particelle avranno masse dovute al condensato. Esplicitamente:

$$\begin{aligned} m_u &\sim \frac{\langle \bar{U}U \rangle}{\Lambda_E^2} (a + b) , \\ m_d &\sim \frac{\langle \bar{U}U \rangle}{\Lambda_E^2} (a - b) . \end{aligned} \quad (10.62)$$

Per stimare Λ_E assumiamo che $\langle \bar{T}T \rangle \sim \Lambda_{TC}^3 \sim (500\text{GeV})^3$. Inoltre, supponendo che a e b siano di ordine 1 e le masse dei quark ordine 1 GeV, avremo:

$$\Lambda_E \sim \left(\frac{\langle \bar{T}T \rangle}{m_q} \right)^{1/2} \sim 11\text{TeV} , \quad (10.63)$$

che rappresenta una nuova scala di interazioni. Nel mondo reale dobbiamo inoltre dar conto della grande differenza tra le masse delle varie generazioni. Avremo varie possibilità:

- esiste una varietà di scale Λ_E che governano le differenti interazioni effettive a 4 campi;
- potrebbe esserci una varietà di scale di condensati che separatamente contribuiscono alle masse ordinarie;
- un'altra possibilità è che i fermioni più leggeri osservati non possono ricevere le masse da interazioni effettive a 4 campi a causa di una speciale simmetria e ricevono massa solo da interazioni a 6 o più campi che sono soppresse da potenze di (Λ_{TC}/Λ_E) .