

Meccanica Statistica

Flaviano Morone

FLAVIANOMORONE-MECCANICASTATISTICA

Contents

1	Principio di massima entropia	5
1.1	Temperatura assoluta	11
2	Sistemi magnetici e transizioni di fase	13
2.1	Rottura spontanea di simmetria	17
3	Modello di Ising	23
3.1	Approssimazione di campo medio	24
4	Correzioni all'approssimazione di campo medio	35
4.1	Un modello risolvibile - forze deboli a lungo raggio	37
4.2	Funzioni di correlazione	40
5	Transizioni di fase del 2° ordine	47
5.1	Limite di volume infinito	48
6	Introduzione ai sistemi disordinati	51
6.1	Meccanismo per la creazione del disordine	51
6.2	Frustrazione	52
6.3	Plaquette	53
6.4	Criterio di Harris e criterio di Harris esteso	57
7	Singularità di Griffiths	61
7.1	Calcolo della magnetizzazione	63
7.1.1	Teorema di Vitali	66
8	Leggi di scaling	71
9	Teorema di Lee e Yang	77
9.1	Caso unidimensionale	80
10	Vetro di Spin unidimensionale	83
10.1	Equilibrio	83
10.2	Rimanenza	85
11	Modello di Ising in un campo magnetico aleatorio	93
11.1	Argomento di Imry e Ma	96

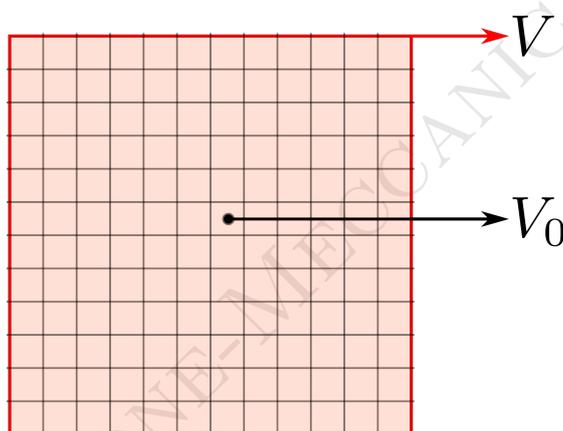
12 Vetri di spin	99
12.1 La media sul disordine	102
12.2 Parametro d'ordine di spin-glass e rottura di ergodicità	105

FLAVIANO MORONE - MECCANICA STATISTICA

Chapter 1

Principio di massima entropia

Sia $f(q, p)$ una grandezza additiva. Dividiamo il sistema in $\frac{V}{V_0}$ parti.



Avremo:

$$f = \sum_{k=1}^{V/V_0} f_k . \quad (1.1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} (\Delta f)^2 &= (f - \bar{f})^2 , \\ \langle (\Delta f)^2 \rangle &= \bar{f}^2 - (\bar{f})^2 , \\ \langle f^2 + (\bar{f})^2 - 2f\bar{f} \rangle &= \bar{f}^2 + (\bar{f})^2 - 2(\bar{f})^2 = \bar{f}^2 - (\bar{f})^2 . \end{aligned} \quad (1.2)$$

E ancora

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \sum_{k=1}^{V/V_0} \bar{f}_k , \\ (\Delta f)^2 &= \left(\sum_k f_k - \bar{f} \right)^2 = \left(\sum_k \Delta f_k \right)^2 . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\langle(\Delta f)^2\rangle &= \left\langle \left(\sum_k \Delta f_k \right)^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{ki} \Delta f_k \Delta f_i \right\rangle = \sum_{ki} \langle \Delta f_k \Delta f_i \rangle .\end{aligned}\quad (1.4)$$

Ora

$$\Delta f_k \Delta f_i = (f_k - \bar{f}_k)(f_i - \bar{f}_i) = f_k f_i - f_k \bar{f}_i - \bar{f}_k f_i + \bar{f}_k \bar{f}_i . \quad (1.5)$$

Per $k \neq i$:

$$\langle \Delta f_k \Delta f_i \rangle = \langle f_k f_i \rangle - \langle f_k \rangle \bar{f}_i - \bar{f}_k \langle f_i \rangle + \bar{f}_k \bar{f}_i = \bar{f}_k \bar{f}_i - \bar{f}_k \bar{f}_i \bar{f}_k \bar{f}_i + \bar{f}_k \bar{f}_i = 0 . \quad (1.6)$$

Per $i = k$:

$$\langle(\Delta f_k)^2\rangle = \langle(f_k - \bar{f}_k)^2\rangle = \bar{f}_k^2 - (\bar{f}_k)^2 , \quad (1.7)$$

e quindi

$$\langle(\Delta f)^2\rangle = \sum_i \langle(\Delta f_i)^2\rangle . \quad (1.8)$$

Ora

$$\bar{f} = \sum_{k=1}^{V/V_0} f_k \sim V , \quad \langle(\Delta f)^2\rangle = \sum_i \langle(\Delta f_i)^2\rangle \sim V . \quad (1.9)$$

La fluttuazione relativa è data da:

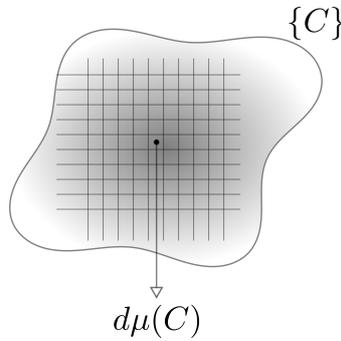
$$\frac{\langle(\Delta f)^2\rangle^{1/2}}{\bar{f}} \approx \frac{V^{1/2}}{V} \sim \frac{1}{\sqrt{V}} , \quad (1.10)$$

da cui avremo

$$f \approx \bar{f} + \langle(\Delta f)^2\rangle^{1/2} = \bar{f} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right) \right) , \quad (1.11)$$

e quindi

$$\frac{f}{\bar{f}} \sim 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{V}}\right) . \quad (1.12)$$



Sia $\{C\} \equiv$ insieme di configurazioni.

Sia $d\mu(C) \equiv$ misura sull'insieme.

Inoltre:

$$\begin{aligned}
 dP_\beta[C] &\equiv P_\beta(C)d\mu(C) = \frac{e^{-\beta H[C]}}{Z}d\mu[C] , \\
 \int dP_\beta[C] &= 1 \rightarrow Z = \int d\mu[C]e^{-\beta H[C]} , \\
 \langle A \rangle_\beta &= \int A(C)dP_\beta[C] = \int A(C)P_\beta(C)d\mu(C) .
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ad esempio $d\mu(C) = dpdq$ e allora $dP_\beta[C] = P_\beta(C)d\mu(C) = e^{-\beta H(p,q)}dpdq$.

Cioè

$$dP_\beta[C] = P_\beta(C)d\mu(C) \tag{1.14}$$

è la probabilità che il sistema si trovi in un elemento dello spazio delle configurazioni $d\mu[C]$ centrato intorno a C .

Il caso

$$dP_\beta[C] = e^{-\beta H(p,q)}dpdq \tag{1.15}$$

è la probabilità di trovare il sistema nell'elemento di spazio delle fasi $d^{3N}pd^{3N}q$ centrato intorno a (q, p) .

Definiamo l'**entropia** della distribuzione P come il funzionale $S[P]$ dato da:

$$S[P] = - \int d\mu(C)P(C) \ln P(C) = - \langle \ln P(C) \rangle . \tag{1.16}$$

Più $P(C)$ è concentrata in una regione piccola dello spazio delle configurazioni più $S[P]$ è piccola. Più $P(C)$ è uniforme sullo spazio delle configurazioni più $S[P]$ è grande.

Esempio– Spazio delle configurazioni discreto. $j = 1, \dots, M$ etichetta l configurazioni (M finito). Avremo:

$$\begin{aligned}
 P_j &= \frac{e^{-\beta H_j}}{Z} , \\
 Z &= \sum_{j=1}^M e^{-\beta H_j} , \\
 \langle A \rangle &= \sum_{j=1}^M A_j P_j , \\
 S[P] &= - \sum_{j=1}^M P_j \ln P_j .
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Poiché $P_j \leq 1 \forall j$ allora

$$P_j \ln P_j \leq 0 \rightarrow S[P] \geq 0 . \tag{1.18}$$

Esempio– Sistema con M possibili configurazioni di cui solo L hanno probabilità non nulla e uguale a

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{1}{L} & j \leq L, \\ P_j &= 0 & j > L. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Avremo

$$S[P] = - \sum_{j=1}^L \frac{1}{L} \ln \frac{1}{L} = \ln L, \quad (1.20)$$

e quindi se $S[P] = 0$ solo una configurazione ha probabilità non nulla. Se $S[P] = \ln M$ tutte le configurazioni hanno probabilità non nulla. Cioè $e^{S[P]}$ rappresenta il numero di configurazioni in cui il sistema può stare con probabilità non troppo piccola.

Supponiamo di avere un ensemble di sistemi hamiltoniani reali con un gran numero di gradi di libertà e supponiamo che la sola informazione che abbiamo sullo stato microscopico del sistema è il valor medio dell'energia U . E' ragionevole assumere che la distribuzione di probabilità massimizzi $S[P]$ a $E[P] = U$ fissata. Vogliamo quindi massimizzare $S[P]$ sotto le condizioni supplementari

$$E[P] = \sum_j P_j H_j = U, \quad \sum_j P_j = 1. \quad (1.21)$$

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange massimizziamo il funzionale

$$\phi_{\eta, \lambda}[P] = - \sum_j P_j \ln P_j + \lambda (\sum_j P_j H_j - U) + \eta (\sum_j P_j - 1). \quad (1.22)$$

Avremo

$$\frac{\delta \phi[P]}{\delta P_k} = 0, \quad \frac{\partial \phi[P]}{\partial \lambda} = \frac{\partial \phi[P]}{\partial \eta} = 0. \quad (1.23)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{\delta \phi[P]}{\delta P_k} &= - \frac{\delta}{\delta P_k} \sum_j P_j \ln P_j + \lambda \frac{\delta}{\delta P_k} \sum_j P_j H_j + \eta \frac{\delta}{\delta P_k} \sum_j P_j = \\ &= - \ln P_k - 1 + \lambda H_k + \eta = 0, \\ &\rightarrow \ln P_k = \lambda H_k + \eta - 1, \\ &\rightarrow P_k = e^{\lambda H_k + \eta - 1}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} &= \sum_j P_j - 1 = 0, \\ &\rightarrow \sum_k P_k = \sum_k e^{\lambda H_k + \eta - 1} = e^{\eta - 1} \sum_k e^{\lambda H_k} = 1, \\ &\rightarrow e^{\eta - 1} = \frac{1}{\sum_k e^{\lambda H_k}}, \\ &\rightarrow P_k = \frac{e^{\lambda H_k}}{\sum_j e^{\lambda H_j}}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} &= \sum_j P_j H_j - U = 0, \\ &\rightarrow \frac{\sum_k H_k e^{\lambda H_k}}{\sum_j e^{\lambda H_j}} = U.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Chiamiamo $\lambda = -\beta$ la soluzione e otteniamo:

$$P_k = \frac{e^{-\beta H_k}}{\sum_j e^{-\beta H_j}}.\tag{1.27}$$

Richiedendo che la distribuzione di probabilità massimizzi $S[P]$ ad $E[P] = U$ fissato (cioè massimizzi l'entropia a valor medio dell'energia fissato) si ottiene proprio la distribuzione di Boltzmann.

La distribuzione di Boltzmann può essere ottenuta anche da un altro principio variazionale, ovvero come la distribuzione che **minimizza** l'energia libera

$$\boxed{\Phi[P] = E[P] - \frac{1}{\beta} S[P]},\tag{1.28}$$

sempre sotto il vincolo $\sum_j P_j = 1$. Infatti

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda[P] &= E[P] - \frac{1}{\beta} S[P] + \lambda \left[\sum_j P_j - 1 \right] = \\ &= \sum_j P_j H_j + \frac{1}{\beta} \sum_j P_j \ln P_j + \lambda \left[\sum_j P_j - 1 \right].\end{aligned}\tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta \Phi_\lambda[P]}{\delta P_k} &= H_k + \frac{1}{\beta} \ln P_k + \frac{1}{\beta} + \lambda = 0, \\ &\rightarrow \ln P_k = -\beta H_k - \beta \lambda - 1, \\ &\rightarrow P_k = e^{-\beta \lambda - 1} e^{-\beta H_k}.\end{aligned}\tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_\lambda[P]}{\partial \lambda} &= \sum_j P_j - 1 = 0, \\ &\rightarrow \sum_k P_k = 1 = e^{-\beta \lambda - 1} \sum_k e^{-\beta H_k} \rightarrow e^{-\beta \lambda - 1} = \frac{1}{\sum_k e^{-\beta H_k}},\end{aligned}\tag{1.31}$$

$$\rightarrow \boxed{P_k = \frac{e^{-\beta H_k}}{\sum_j e^{-\beta H_j}}}.$$

Alcune relazioni

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi[P] &= -\frac{1}{\beta} \ln Z = U - \frac{S[P]}{\beta}, \\ S[P] &= \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \Phi[P], \\ U = E[P] &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \Phi[P] + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \Phi[P].\end{aligned}}.\tag{1.32}$$

Il funzionale $\Phi[P]$ si intende calcolato su P di Boltzmann, cioè P_{eq} , quindi è una funzione solo di β (o eventualmente di V e N). Quindi scriveremo:

$$\Phi[P_{\text{eq}}] \equiv F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \log Z = U - \frac{S_{\text{eq}}}{\beta}, \quad (1.33)$$

con

$$\begin{aligned} S_{\text{eq}} &\equiv S[P_{\text{eq}}] = \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta), \\ U &\equiv E[P_{\text{eq}}] = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = F(\beta) + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Infatti

$$F(\beta) = U - \frac{S_{\text{eq}}}{\beta} = E[P_{\text{eq}}] - \frac{P_{\text{eq}}}{\beta}. \quad (1.35)$$

Ora

$$\begin{aligned} E[P_{\text{eq}}] &= \frac{1}{Z} \sum_k E_k e^{-\beta E_k} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\sum_k e^{-\beta E_k}}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z, \\ S[P_{\text{eq}}] &= -\sum_k P_k \log P_k = -\frac{1}{Z} \sum_k e^{-\beta E_k} \log \left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_k} \right) = \\ &= -\frac{1}{Z} \sum_k e^{-\beta E_k} \left(\log \frac{1}{Z} + \log e^{-\beta E_k} \right) = \\ &= \log Z + \frac{1}{Z} \sum_k e^{-\beta E_k} \beta E_k = \log Z + \frac{\beta}{Z} \left(-\frac{\partial}{\partial \beta} \right) Z = \\ &= \log Z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z. \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{\beta} S_{\text{eq}} = \frac{1}{\beta} \log Z - \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z. \quad (1.37)$$

Allora

$$F(\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z - \frac{1}{\beta} \log Z + \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = -\frac{1}{\beta} \log Z. \quad (1.38)$$

In sintesi

$$\begin{aligned} F(\beta) &= -\frac{1}{\beta} \log Z, \\ U &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z, \\ S_{\text{eq}} &= \log Z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 \log Z &= -\beta F(\beta) , \\
 -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z &= \frac{\partial}{\partial \beta} \beta F(\beta) = F(\beta) + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta) = U , \\
 \log Z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z &= -\beta F(\beta) + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} [\beta F(\beta)] = -\beta F(\beta) + \beta F(\beta) + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta) = \\
 &= \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta) = S_{\text{eq}} .
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Riassumendo

$$\begin{aligned}
 U &= F(\beta) + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta) , \\
 S_{\text{eq}} &= \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta) .
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

1.1 Temperatura assoluta

Determiniamo la connessione tra β e la temperatura assoluta e tra l'entropia microscopica e l'entropia termodinamica.

Consideriamo un sistema che può ricevere energia dall'esterno in forma di lavoro e che è in contatto termico con una riserva di calore. Il calore ricevuto dal sistema durante una trasformazione infinitesima è dato dalla 1^a legge:

$$\delta Q = dU - \delta L . \tag{1.42}$$

Inoltre se T è la temperatura assoluta dalla 2^a legge sappiamo che $\frac{\delta Q}{T}$ è un differenziale esatto:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS_M , \tag{1.43}$$

dove dS_M è l'entropia macroscopica. Per calcolare il lavoro fatto sul sistema l'hamiltoniana deve dipendere da un parametro di controllo λ cosicché possiamo trasferire energia al sistema variando λ . Quindi $H = H(\lambda)$ e al primo ordine possiamo scrivere:

$$\delta L = \left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle d\lambda . \tag{1.44}$$

Dalla definizione di entropia di equilibrio

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\beta} S_{\text{eq}} &= F(\beta) - U , \\
 \rightarrow S_{\text{eq}} &= \beta U - \beta F , \\
 dS_{\text{eq}} &= d(\beta U - \beta F) = d(\beta U) - d(\beta F) .
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
 d(\beta F) &= -d \log Z = -\frac{1}{Z} d \sum_k e^{-\beta H_k(\lambda)} = \\
 &= -\frac{1}{Z} \sum_k -H_k(\lambda) e^{-\beta H_k(\lambda)} d\beta - \frac{1}{Z} \sum_k -\beta e^{-\beta H_k(\lambda)} \frac{dH}{d\lambda} d\lambda = \quad (1.46) \\
 &= U d\beta + \beta \left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle d\lambda ,
 \end{aligned}$$

$$d(\beta F) = U d\beta + \beta \left\langle \frac{dH}{d\lambda} \right\rangle d\lambda = U d\beta + \beta \delta L . \quad (1.47)$$

Allora

$$\begin{aligned}
 dS_{\text{eq}} &= \beta dU + U d\beta - U d\beta - \beta \delta L = \beta (dU - \delta L) = \beta \delta Q , \\
 \rightarrow dS_{\text{eq}} &= \beta \delta Q = \beta T dS_M . \quad (1.48)
 \end{aligned}$$

Quindi avremo

$$\beta = \frac{1}{kT} , \quad (1.49)$$

e ponendo $k = 1$ otteniamo

$$S_{\text{eq}} = S_M , \quad (1.50)$$

a meno di una costante additiva. Di conseguenza

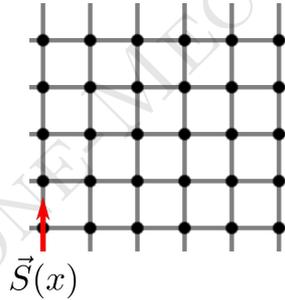
$$F = U_{\text{eq}} - T S_{\text{eq}} , \quad (1.51)$$

è l'usuale energia libera termodinamica. Inoltre se il sistema è meccanicamente isolato ma può scambiare calore con la riserva di calore a T fissata, il 2° principio ci dice che l'energia libera termodinamica $F_M = U - T S_M$ non può crescere e se le differenti componenti del sistema sono all'equilibrio l'energia libera non può decrescere. Ma questa è proprio la conclusione a cui si giunge nell'approccio statistico, cioè che la distribuzione di probabilità all'equilibrio minimizza l'energia libera.

Chapter 2

Sistemi magnetici e transizioni di fase

Consideriamo un generico sistema magnetico. Per ogni configurazione del sistema possiamo definire la **magnetizzazione** corrispondente $\vec{S}(x)$, dove x è un punto dello spazio fisico. Microscopicamente $\vec{S}(x)$ riceve contributo sia dal moto degli elettroni che dagli spin degli elettroni (e in minima parte anche dai nuclei). Ora se gli elettroni che contribuiscono maggiormente a $\vec{S}(x)$ sono localizzati vicino agli atomi del reticolo può essere conveniente definire $\vec{S}(x)$ solo nei punti di questo reticolo. L'hamiltoniano di questo sistema può essere scritto come:



$$H_0[C] = - \sum_{i < j} \vec{S}(x_i) \cdot \vec{S}(x_j) , \quad (2.1)$$

dove chiaramente \vec{S} dipende implicitamente dalla configurazione C . Cominciamo studiando la risposta del sistema all'azione di un campo magnetico esterno $\vec{h}(x)$. Consideriamo, quindi, la seguente hamiltoniana:

$$H[C] = H_0[C] - \int_V d^3x \vec{h}(x) \cdot \vec{S}(x) . \quad (2.2)$$

La maggior parte dell'informazione sulle proprietà magnetiche del sistema è contenuta nell'energia libera $F[h]$ che sarà un funzionale di $\vec{h}(x)$. Se il campo $\vec{h}(x)$ non dipende da x , allora l'energia libera sarà una funzione di \vec{h} , cioè:

$$F = F(h) \equiv F[h] \Big|_{\vec{h}(x)=\vec{h}} . \quad (2.3)$$

Definiamo la densità di energia libera

$$f(h) = \frac{F(h)}{V} . \quad (2.4)$$

Avremo

$$\begin{aligned} F[h] &= -\frac{1}{\beta} \log Z[h] , \\ Z[h] &= \int [dC] e^{-\beta H[C]} , \\ P[C] &= \frac{1}{Z[h]} e^{-\beta H[C]} . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Il valor medio della magnetizzazione locale sarà

$$\begin{aligned} m_\nu(x) &= \langle S_\nu(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int dC S_\nu(x) e^{-\beta H[C]} = \\ &= \frac{1}{Z} \int dC S_\nu(x) \exp \left[-\beta \left(H_0[C] - \int d^3x \vec{h}(x) \cdot \vec{S}(x) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta h_\nu(x)} \int dC e^{-\beta H[C]} = \frac{1}{\beta} \frac{\delta}{\delta h_\nu(x)} \log Z = -\frac{\delta F[h]}{\delta h_\nu(x)} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Il valor medio della magnetizzazione totale sarà

$$M_\nu = \langle S_\nu(x) \rangle \equiv \left\langle \int_V d^3x S_\nu(x) \right\rangle = \frac{1}{\beta} \int_V d^3x \frac{\delta}{\delta h_\nu(x)} \log Z = - \int_V \frac{\delta F[h]}{\delta h_\nu(x)} . \quad (2.7)$$

Se l'hamiltoniana è spazialmente omogenea, cioè invariante per traslazioni, e di conseguenza il campo magnetico è costante, allora il valor medio della magnetizzazione locale non dipende da x :

$$m_\nu(x) = m_\nu . \quad (2.8)$$

Infatti

$$m_\nu(x) = \frac{1}{Z} \int [dC] S_\nu(x) \exp \left[-\beta H_0[C] + \beta h_\mu \int d^3y S_\mu(y) \right] . \quad (2.9)$$

Se facciamo il cambiamento di variabili:

$$S_\nu(x) = S'_\nu(z) \rightarrow S_\nu^i = S'^k_\nu , \quad (2.10)$$

la misura $[dC] = \prod_{x,\lambda} dS_\lambda(x) \sim \prod_{i,\lambda} dS'_\lambda^i$ non cambia poiché lo jacobiano della trasformazione è:

$$J = \left| \frac{\partial S_\rho^i}{\partial S'_\sigma^\ell} \right| = \left| \frac{\partial S'^k_\rho}{\partial S'_\sigma^\ell} \right| = |\det(\delta^{k\ell} \delta_{\rho\sigma})| = 1 . \quad (2.11)$$

$H_0[C]$ è invariante così come $\int d^3y S_\mu(y)$ e quindi

$$m_\nu(x) = \frac{1}{Z} \int dC S_\nu(z) \exp \left(-\beta H_0[C] + \beta h_\mu \int d^3y S_\mu(y) \right) = m_\nu(z) = m_\nu . \quad (2.12)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} M_\nu &= \langle S_\nu^T \rangle = \int d^3x \langle S_\nu(x) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h_\nu} \int dC \exp \left(-\beta H_0[C] + \beta h_\mu \int d^3x S_\mu(x) \right) = \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h_\nu} Z = -\frac{\partial}{\partial h_\nu} F(h) = V m_\nu , \end{aligned} \quad (2.13)$$

quindi

$$m_\nu = -\frac{\partial f(h)}{\partial h_\nu} . \quad (2.14)$$

Ricapitolando

$$\boxed{\begin{aligned} m_\nu(x) &= -\frac{\delta F[h]}{\delta h_\nu(x)} , \\ m_\nu &= -\frac{\partial f(h)}{\partial h_\nu} . \end{aligned}} \quad (2.15)$$

Introduciamo ora la **suscettività magnetica**:

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{\partial m_\mu}{\partial h_\nu} . \quad (2.16)$$

Nel caso isotropo

$$\chi_{\mu\nu} = \chi \delta_{\mu\nu} . \quad (2.17)$$

Consideriamo anche una suscettività magnetica dipendente dal punto:

$$\chi_{\mu\nu}(x, y) = \frac{\delta m_\mu(x)}{\delta h_\nu(y)} . \quad (2.18)$$

In un sistema invariante per traslazioni:

$$\chi_{\mu\nu}(x, y) = \chi_{\mu\nu}(x - y) . \quad (2.19)$$

Dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\nu} &= \frac{\partial m_\mu}{\partial h_\nu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial h_\mu \partial h_\nu} , \\ \chi_{\mu\nu}(x, y) &= \frac{\delta m_\mu(x)}{\delta h_\nu(y)} = -\frac{\delta^2 F[h]}{\delta h_\mu(x) \delta h_\nu(y)} , \end{aligned} \quad (2.20)$$

otteniamo le seguenti proprietà di simmetria della suscettività:

$$\begin{aligned} \chi_{\mu\nu} &= \chi_{\nu\mu} , \\ \chi_{\mu\nu}(x, y) &= \chi_{\nu\mu}(y, x) . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Poiché $f(h) = -\frac{1}{V\beta} \log Z(h)$, avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial h_\nu} &= -\frac{1}{V\beta} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial h_\nu} , \\ \frac{\partial^2 f}{\partial h_\mu \partial h_\nu} &= -\frac{1}{V\beta} \left(-\frac{1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial h_\mu} \frac{\partial Z}{\partial h_\nu} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial h_\mu \partial h_\nu} \right) = \frac{1}{V\beta Z^2} \frac{\partial Z}{\partial h_\mu} \frac{\partial Z}{\partial h_\nu} - \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial h_\mu \partial h_\nu} = \\ &= \frac{\beta}{V} \langle S_\mu^T \rangle \langle S_\nu^T \rangle - \frac{\beta}{V} \langle S_\mu^T S_\nu^T \rangle . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Allora

$$\begin{aligned}\chi_{\mu\nu} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial h_\mu \partial h_\nu} = \frac{\beta}{V} [\langle S_\mu^T S_\nu^T \rangle - \langle S_\mu^T \rangle \langle S_\nu^T \rangle] = \frac{\beta}{V} \langle S_\mu^T S_\nu^T \rangle_{\text{connessa}} = \\ &= \frac{\beta}{V} [\langle (S_\mu^T - \langle S_\mu^T \rangle) (S_\nu^T - \langle S_\nu^T \rangle) \rangle] ;\end{aligned}\quad (2.23)$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\chi_{\mu\nu}(x, y) &= \beta [\langle S_\mu(x) S_\nu(y) \rangle - \langle S_\mu(x) \rangle \langle S_\nu(y) \rangle] = \beta \langle S_\mu(x) S_\nu(y) \rangle_{\text{connessa}} = \\ &= \beta [\langle (S_\mu(x) - \langle S_\mu(x) \rangle) (S_\nu(y) - \langle S_\nu(y) \rangle) \rangle] .\end{aligned}\quad (2.24)$$

Notiamo che, se la distribuzione di probabilità $P[C]$ è concentrata su una singola configurazione, non ci sono fluttuazioni termodinamiche e quindi ad esempio $S_\mu^{rmT} - \langle S_\mu^{rmT} \rangle = 0$ e le funzioni di correlazione connesse sono nulle. Se consideriamo gli elementi di matrice diagonali della suscettività abbiamo

$$\chi_{\mu\mu} = \frac{\beta}{V} [\langle S_\mu^{T2} \rangle - \langle S_\mu^T \rangle^2] ,\quad (2.25)$$

cioè sono proporzionali alla varianza della distribuzione di probabilità della quantità S_μ^T . Questo risultato è un caso particolare di un teorema più generale, che stabilisce che la risposta lineare di un sistema è proporzionale alle fluttuazioni termodinamiche random. Consideriamo l'hamiltoniano:

$$H = H_0 + \lambda H_1 ,\quad (2.26)$$

dove H_0 è l'hamiltoniano del sistema in equilibrio e la parte rimanente è una piccola perturbazione ($\lambda \ll 1$).

Valutiamo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} \langle A \rangle &= \frac{d}{d\lambda} \frac{1}{Z} \int dC A e^{-\beta H_0 - \beta \lambda H_1} = \\ &= \frac{1}{Z^2} \left[Z(-\beta) \int dC A H_1 e^{-\beta H_0 - \beta \lambda H_1} - \int dC A e^{-\beta H} \int dC (-\beta) H_1 e^{-\beta H} \right] = \\ &= -\beta \langle A H_1 \rangle + \beta \langle A \rangle \langle H_1 \rangle ,\end{aligned}\quad (2.27)$$

da cui

$$-\frac{1}{\beta} \frac{d}{d\lambda} \langle A \rangle = \langle A H_1 \rangle_c = \langle A H_1 \rangle - \langle A \rangle \langle H_1 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle) (H_1 - \langle H_1 \rangle) \rangle .\quad (2.28)$$

Quindi la variazione del valor medio dell'osservabile A per effetto della perturbazione (e quindi la risposta del sistema) al primo ordine in λ è proporzionale alla funzione di correzione connessa $\langle A H_1 \rangle_c$ e quindi alle fluttuazioni termodinamiche aleatorie.

Se prendiamo $H_1 = A$ avremo che la risposta lineare è proporzionale alla fluttuazione quadratica media (varianza) dell'osservabile A .

2.1 Rottura spontanea di simmetria

Sistemi magnetici (ferromagnetici) esibiscono il fenomeno della magnetizzazione spontanea a bassa temperatura (cioè sotto la temperatura di Curie). Se un sistema in campo magnetico zero (sotto T_c) ha una magnetizzazione che punta in una data direzione, la magnetizzazione non cambierà nel tempo. Se ora applichiamo un campo magnetico esterno e lo rimuoviamo possiamo avere che lo stesso sistema esibisce una magnetizzazione spontanea che è opposta a quella precedente. In sostanza, il sistema può stare in due o più stati caratterizzati dalla direzione della magnetizzazione. Dal punto di vista microscopico per ogni configurazione C esiste un'altra configurazione C' tale che C e C' hanno la stessa energia, ma opposta magnetizzazione. Inoltre la configurazione C' può essere ottenuta attraverso C attraverso l'operazione di inversione temporale (che inverte il segno di tutte le velocità e degli spin delle particelle del sistema). Riassumendo:

$$\begin{aligned} T < T_c \\ \forall C \text{ exists } C' : E(C) = E(C') , S(C) \neq S(C') . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ora l'hamiltoniano del sistema è invariante sotto la trasformazione:

$$S \rightarrow -S , \quad (2.30)$$

ma lo stato del sistema (e quindi la sua distribuzione di probabilità) non è invariante sotto questa trasformazione. La simmetria, cioè, non è realizzata sugli stati fisici. Quando ciò accade diciamo che la **simmetria è spontaneamente rotta**. Questo può sembrare strano dato che $P[C] = \frac{1}{Z} e^{-\beta H[C]}$ e quindi se H è invariante anche P è invariante. Questo è sicuramente vero per un volume finito, ma potrebbe cessare di essere vero per un sistema che occupa volume infinito (dato che l'espressione per P è solo formale essendo Z infinita). D'altra parte se partiamo dall'espressione per P nel volume finito e prendiamo il limite di volume infinito con il campo magnetico esattamente uguale a zero, la magnetizzazione sarà sempre uguale zero (perché l'integrale di una funzione dispari è nullo). Ovviamente questo risultato è vero solo se $h = 0$. Per studiare più dettagliatamente il problema conviene considerare m, f come funzioni di h nel limite di volume infinito. Ora

$$\begin{aligned} f(h) &= -\frac{1}{\beta V} \log Z(h) = -\frac{1}{\beta V} \log \int dC \exp \left\{ -\beta H_0[C] + \beta h_\mu \int d^3x S_\mu(x) \right\} , \\ Z(h) &= \int dC \exp \left\{ -\beta H_0[C] + \beta h_\mu \int d^3x S_\mu(x) \right\} , \\ Z(-h) &= \int dC \exp \left\{ -\beta H_0[C] - \beta h_\mu \int d^3x S_\mu(x) \right\} . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Se facciamo il cambio di variabile $S_\mu(x) = -S'_\mu(x)$, la misura è invariante, $H_0[C]$ è invariante, e otteniamo

$$Z(-h) = \int dC \exp \left\{ -\beta H_0[C] + \beta h_\mu \int d^3x S'_\mu(x) \right\} = Z(h) . \quad (2.32)$$

Quindi

$$f(h) = -\frac{1}{\beta V} \log Z(h) = -\frac{1}{\beta V} \log Z(-h) = f(-h), \quad (2.33)$$

cioè $f(h)$ è una funzione pari di h . D'altra parte

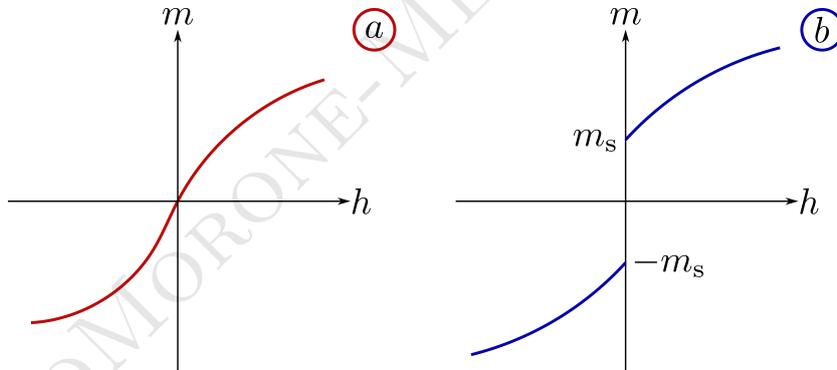
$$\begin{aligned} m(h) &= -\frac{\partial}{\partial h} f(h) = -\frac{\partial}{\partial h} f(-h) = -\frac{\partial}{\partial h} f(z(h)) = -\frac{\partial z}{\partial h} \frac{\partial}{\partial z} f(z(h)) = \frac{\partial}{\partial z} f(z(h)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial(-h)} f(-h) = -m(-h), \end{aligned} \quad (2.34)$$

cioè $m(h)$ è una funzione dispari di h . Quindi

$$\boxed{\begin{aligned} f(h) &= f(-h), \\ m(h) &= -m(-h). \end{aligned}} \quad (2.35)$$

Possiamo avere due possibilità:

- **a)** $m(h)$ è continua in $h = 0$ e quindi $m(0) = 0$, oppure
- **b)** $m(h)$ è discontinua in $h = 0$ e $m(0)$ non è ben definita. Questo secondo caso corrisponde alla **rottura spontanea di simmetria**.



Più precisamente queste due possibilità corrispondono a

- Nel caso **a)** f è differenziabile rispetto ad h e $m(h)$ è continua.
- Nel caso **b)** f **non** è differenziabile rispetto ad h in $h = 0$ e quindi $m(h)$ è una funzione discontinua in $h = 0$, cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} m(h) = m_s = m^+ \neq \lim_{h \rightarrow 0^-} m(h) = -m_s = m^-. \quad (2.36)$$

Avremo comunque $m^+ = -m^-$.

Nel caso **a)** la magnetizzazione ad $h = 0$ è veramente zero, mentre nel caso **b)** un campo magnetico infinitesimo è sufficiente a produrre una magnetizzazione non nulla. Se questo accade allora diremo che il sistema ha una magnetizzazione

spontanea. Nel limite $h \rightarrow 0$ l'hamiltoniana diventa invariante sotto la trasformazione $S \rightarrow -S$, ma non sono invarianti i valori di aspettazione statistici, così diciamo che la simmetria è spontaneamente rotta. Per i ferromagneti il caso **b**) è realizzato sotto la temperatura critica T_c (almeno in 3 dimensioni). La non differenziabilità dell'energia libera rispetto ad un parametro e l'esistenza di due o più stati di equilibrio è la caratteristica distintiva di una **transizione di fase** del 1° ordine. In accordo alla classificazione di Ehrenfest se l'energia libera è differenziabile $(k - 1)$ -volte, ma non k -volte, il punto di singolarità è chiamato una transizione di ordine k (in ogni caso f è sempre continua essendo una funzione convessa).

Se una transizione di fase è indotta dal cambiamento di temperatura siamo in presenza di un **calore latente**. Avremo cioè:

$$u_+ \equiv \lim_{T \rightarrow T_c^+} \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta f) \neq u_- \equiv \lim_{T \rightarrow T_c^-} \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta f) . \quad (2.37)$$

Transizioni di fase, e quindi rottura spontanea di simmetria, possono avvenire solo se il volume del sistema è infinito. Infatti supponiamo di avere un sistema in un volume finito con un hamiltoniano non singolare e uno spazio delle configurazioni compatto; allora avremo:

$$|Z(\beta)| = \left| \int dC e^{-\beta H[C]} \right| \leq V_c e^{|\beta||H|} , \quad (2.38)$$

dove $V_v \equiv \int dC$ è il volume dello spazio delle configurazioni e

$$|H| = \max_{[C]} |H[C]| , \quad (2.39)$$

e β è in generale complesso. Quindi Z è una funzione intera di β a volume finito.

Se lo spazio delle configurazioni non è compatto ma $Z(\beta) = \int dC e^{-\beta H[C]}$ è finito per ogni β reale positivo lo stesso integrale deve esistere per ogni β complesso tale che $\text{Re}(\beta) > 0$. E' chiaro che l'integrare sarà divergente per $\beta \leq 0$ quando il volume dello spazio delle configurazioni è infinito (se H è positivo). Quindi la funzione di partizione Z di un hamiltoniano ragionevole (cioè $Z(\beta)$ esiste per β positivo) è una funzione analitica nel semipiano positivo del piano complesso β . Un risultato simile vale anche per il comportamento di Z come funzione del campo magnetico. Ora $f = -\frac{1}{\beta V} \log Z$. Essendo Z analitica, il $\log Z$ può essere singolare solo nei punti in cui $Z = 0$. Ma per valori reali dei parametri (temperatura e campo magnetico) Z è una somma di termini positivi e non può avere zeri. Quindi l'energia libera è analitica vicino l'asse reale positivo per un sistema di volume finito. Comunque, nel limite $V \rightarrow \infty$ un'energia libera non-analitica può essere prodotta se gli zeri complessi della funzione di partizione collassano sull'asse reale del parametro. Riassumendo

- Volume finito: Z intera; no zeri reali; f analitica sull'asse reale.
- Volume infinito: Z analitica per $\text{Re}(\beta) \in \mathbb{R}^+$; possibilità di zeri reali; f può essere non analitica sull'asse reale.

Per specificare completamente un sistema nel volume **finito** occorre fissare le condizioni al bordo. Se non siamo in un punto di transizione di fase del 1° ordine, allora per definizione c'è solo una fase termodinamica stabile e la distribuzione di probabilità nel limite di volume infinito non dipenderà dalle condizioni al bordo. Ad esempio se siamo a $T > T_c$ l'effetto delle condizioni al bordo sui valori di aspettazione al centro di una scatola di lato L si annullano come $e^{-L/\xi}$ (ξ è una lunghezza di correlazione tipica del sistema). Se siamo al punto di transizione del 1° ordine ci sono due o più fasi e il risultato finale dipenderà dalle condizioni al bordo. Ad esempio nel caso magnetico a $T < T_c$ i valori della magnetizzazione saranno $\pm m_s$ se vincoliamo la magnetizzazione al bordo ad essere positiva o negativa rispettivamente, mentre se imponiamo condizioni periodiche avremo $m_s = 0$. In altre parole le condizioni al bordo per un sistema quasi infinito giocano lo stesso ruolo del campo magnetico infinitesimo per un sistema infinito. Se definiamo

$$\langle \rangle_{\pm} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \langle \rangle_h , \quad (2.40)$$

ci aspettiamo che il comportamento a tempi lunghi di una singolo sistema molto grande (o infinito) sia descritto da $\langle \rangle_+$ o $\langle \rangle_-$ se le condizioni iniziali a $t = 0$ sono omogenee nello spazio (cioè invarianti per traslazioni –cioè escludiamo condizioni iniziali macroscopicamente inhomogenee, ad esempio meta spazio con magnetizzazione positiva e metà con magnetizzazione negativa–). Al contrario se mediamo sulle possibili condizioni iniziali otteniamo lo stato simmetrico $h = 0$:

$$\langle \rangle_0 = \frac{1}{2} \langle \rangle_+ + \frac{1}{2} \langle \rangle_- . \quad (2.41)$$

Ora $\langle \rangle_0$ descrive una mistura statistica e solo $\langle \rangle_{\pm}$ possono descrivere il comportamento a tempi lunghi di un singolo sistema.

Formuliamo questo concetto in termini matematici. Consideriamo l'insieme di tutti i possibili stati invarianti per traslazioni. Questo insieme è convesso e sarà l'insieme di tutti i stati del tipo:

$$\langle \rangle_p = p \langle \rangle_+ + (1 - p) \langle \rangle_- . \quad (2.42)$$

Uno stato puro è uno stato che non può essere decomposto come sovrapposizione di due stati differenti. Cioè se $\langle \rangle_a$ è puro, allora

$$\langle \rangle_a = \alpha \langle \rangle_b + (1 - \alpha) \langle \rangle_c , \quad 0 < \alpha < 1 , \quad (2.43)$$

implica

$$\langle \rangle_a = \langle \rangle_b = \langle \rangle_c . \quad (2.44)$$

Si può dimostrare che ogni stato può essere decomposto in **modo unico** come combinazione convessa di stati puri. In questo linguaggio:

- **un gruppo di simmetria G è spontaneamente rotto se lo stato simmetrico non è puro e può essere decomposto con combinazione convessa di stati puri che trasformano come una rappresentazione non banale di G .**

Diamo un argomento per identificare i stati **puri** con il comportamento tempi lunghi di un singolo sistema spazialmente omogeneo. Se aggiungiamo all'hamiltoniano una piccola perturbazione localizzata intorno al punto x : $\delta H(x) = B(x)$, ci aspettiamo che il valore di aspettazione di un'osservabile $A(y)$ localizzata intorno al punto y non cambi quando $|x - y| \rightarrow \infty$. Dal teorema della risposta lineare questo può accadere se le funzioni di correlazioni connesse $\langle B(x)A(y) \rangle_c$ vanno a zero a grandi distanze $\forall A, B$:

$$\lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \langle A(y) \rangle_H = \langle A(y) \rangle_{H_0} \iff \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \langle B(x)A(y) \rangle_c = 0 \quad \forall A, B. \quad (2.45)$$

L'annullarsi delle funzioni di correlazione **connesse** a grandi distanze è detta **proprietà di clustering**. Se questa proprietà è soddisfatta lo stato $\langle \rangle$ è detto clustering, ossia soddisfa la proprietà di decomposizione in cluster. Si può dimostrare che **ogni stato puro è clustering** e viceversa. Quindi la rottura spontanea di simmetria può essere collegata al fallimento della decomposizione in cluster dello stato simmetrico (cioè c'è rottura spontanea se lo stato simmetrico non è clustering). Ad esempio nel caso magnetico:

$$\langle S(x)S(y) \rangle_p^{\text{conn}} = \langle S(x)S(y) \rangle_p - \langle S(x) \rangle_p \langle S(y) \rangle_p = 4p(1-p)m^2 \quad |x-y| \rightarrow \infty. \quad (2.46)$$

Quindi i soli due stati clustering e quindi puri sono gli stati $p = 0$ e $p = 1$, cioè $\langle \rangle_-$ e $\langle \rangle_+$.

FLAVIANO MORONE - MECCANICA STATISTICA

Chapter 3

Modello di Ising

Nel modello di Ising la magnetizzazione è definita solo sui punti di un reticolo e può prendere solo i valori ± 1 . L'hamiltoniano del sistema in presenza di un campo magnetico dipendente dal sito può essere scritto come:

$$H_I = -J \sum_{(i,k)} S_i S_k - \sum_i h_i S_i, \quad (3.1)$$

dove i e k runnano su tutte le possibili coppie di primi vicini del reticolo.

Un altro modello è quello di Heisenberg, in cui la magnetizzazione S_i appartiene alla sfera unitaria tridimensionale $\sum_\nu (S_i^\nu)^2 = 1$, o in generale alla sfera unitaria n -dimensionale. In questo caso l'hamiltoniano è:

$$H_H = -J \sum_{(i,k)} \sum_{a=1}^n S_i^a S_k^a - \sum_i \sum_{a=1}^n h_i^a S_i^a. \quad (3.2)$$

Se la costante è positiva, $J > 0$, il sistema è **ferromagnetico** e spin vicini tendono ad allinearsi essendo questa una configurazione energeticamente favorita. Se $J < 0$, il sistema è **antiferromagnetico** e spin vicini tendono a stare antiparalleli.

Notiamo che su un reticolo quadrato (o cubico) a campo magnetico esterno zero, modelli ferromagnetici e antiferromagnetici con stesso $|J|$ hanno la stessa funzione di partizione, cioè $Z(J)$ è una funzione pari di J : infatti possiamo passare dal caso ferromagnetico al caso antiferromagnetico effettuando la trasformazione:

$$S'_i = S_i \rho(i), \quad (3.3)$$

dove

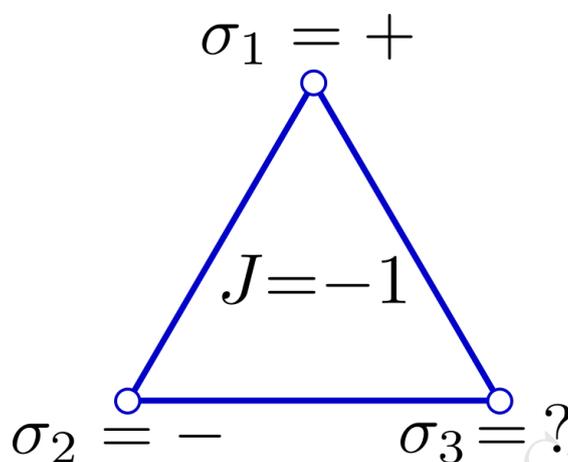
$$\rho(i) = (-1)^{i_x+i_y+i_z} \quad (3.4)$$

è la 'parità' del sito, ottenendo

$$H = -J \sum_{(i,k)} S_i S_k = H' = J \sum_{(i,k)} S'_i S'_k \quad (J > 0). \quad (3.5)$$

Dunque, operando questa trasformazione su un sistema ferromagnetico otteniamo un sistema antiferromagnetico con la stessa energia. Questa equivalenza non vale

per antiferromagneti su altri reticoli (ad esempio su un reticolo triangolare o fcc). In questi casi è, infatti, impossibile trovare una trasformazione che converta un hamiltoniano antiferromagnetico in uno ferromagnetico. In questo caso il sistema è detto essere **frustrato**. Ad esempio supponiamo di avere un reticolo triangolare



ferromagnetico in cui tutti gli spin sono allineati, ad esempio $S_i = +1$. E' evidente che non è possibile trovare un sistema antiferromagnetico con la stessa energia in quanto non è possibile soddisfare tutti i legami per avere la stessa energia del caso ferromagnetico.

3.1 Approssimazione di campo medio

Una soluzione esatta del modello di Ising è disponibile solo in 1 o 2 dimensioni. Nel caso generale devono essere considerate soluzioni approssimate. La più semplice è l'approssimazione di campo medio. Il punto di partenza della teoria di campo medio è il principio variazionale di minimo del funzionale di energia libera:

$$\Phi[P] = E[P] - \frac{S[P]}{\beta}, \quad (3.6)$$

dove

$$E[P] = \langle H \rangle = \sum_j P_j H_j = \int dC P(C) H[C], \quad (3.7)$$

$$S[P] = - \sum_j P_j \log P_j = - \int dC P(C) \log P(C).$$

Tuttavia non vogliamo cercare il vero minimo del funzionale di energia libera, ma ci restringiamo a forme semplici della distribuzione di probabilità. Nell'approssimazione più semplice la distribuzione di probabilità è assunta essere fattorizzata sui siti, cioè:

$$P[S] = \prod_i P_i(S_i), \quad (3.8)$$

con

$$P_i(S_i) = \frac{1 + m_i}{2} \delta_{S_i,1} + \frac{1 - m_i}{2} \delta_{S_i,-1}. \quad (3.9)$$

In questa forma $P[S]$ è già normalizzata, infatti

$$\begin{aligned} \sum_{\{S\}} P[S] &= \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} P_1(S_1) \dots P_N(S_N) = \sum_{S_1=\pm 1} \dots \sum_{S_N=\pm 1} P_1(S_1) \dots P_N(S_N) = \\ &= \prod_{i=1}^N \sum_{S_i=\pm 1} P_i(S_i) = 1, \end{aligned} \quad (3.10)$$

poiché

$$\sum_{S_i=\pm 1} P_i(S_i) = \frac{1+m_i}{2} + \frac{1-m_i}{2} = 1. \quad (3.11)$$

Inoltre

$$\langle S_i \rangle = \sum_{\{S\}} S_i P[S] = \sum_{S_i=\pm 1} S_i P_i(S_i) \prod_{j \neq i, 1}^N \sum_{S_j=\pm 1} P_j(S_j) = \frac{1+m_i}{2} - \frac{1-m_i}{2} = m_i. \quad (3.12)$$

In generale la fattorizzazione della distribuzione di probabilità implica per i valori di aspettazione:

$$\begin{aligned} \langle g(S_i) \rangle &= \sum_{\{S\}} g(S_i) P[S] = \left(\prod_{j \neq i, 1}^N \sum_{S_j=\pm 1} P_j(S_j) \right) \sum_{S_i=\pm 1} g(S_i) P_i(S_i) = \\ &= \sum_{S_i=\pm 1} g(S_i) \frac{1+m_i}{2} \delta_{S_i,1} + g(S_i) \frac{1-m_i}{2} \delta_{S_i,-1} = \frac{1+m_i}{2} g(1) + \frac{1-m_i}{2} g(-1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \langle g_1(S_1) g_2(S_2) \rangle &= \sum_{\{S\}} g_1(S_1) g_2(S_2) P[S] = \left(\sum_{S_1=\pm 1} g_1(S_1) P_1(S_1) \right) \left(\sum_{S_2=\pm 1} g_2(S_2) P_2(S_2) \right) = \\ &= \langle g_1(S_1) \rangle \langle g_2(S_2) \rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Quindi avremo

$$\langle H \rangle = \left\langle -J \sum_{(i,k)} S_i S_k - \sum_i h_i S_i \right\rangle = -J \sum_{(i,k)} m_i m_k - \sum_i h_i m_i, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} S[P] &= -\langle \ln P[S] \rangle = -\left\langle \ln \left(\prod_{i=1}^N P_i(S_i) \right) \right\rangle = -\sum_{i=1}^N \langle \ln P_i(S_i) \rangle = \\ &= -\sum_{i=1}^N \frac{1+m_i}{2} \ln P_i(1) + \frac{1-m_i}{2} \ln P_i(-1) = \\ &= -\sum_{i=1}^N \frac{1+m_i}{2} \ln \left(\frac{1+m_i}{2} \right) + \frac{1-m_i}{2} \ln \left(\frac{1-m_i}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'energia libera sarà

$$\Phi[P] = \langle H \rangle - \frac{S[P]}{\beta}. \quad (3.17)$$

L'energia libera di equilibrio si ottiene minimizzando il funzionale $\Phi[P]$. La condizione necessaria per il minimo è $\frac{\partial \Phi}{\partial m_i} = 0$. Ora

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial m_i} = -J \sum_{k \text{ PV di } i} m_k - h_i = - \sum_k J_{ik} m_k - h_i, \quad (3.18)$$

$$J_{ik} = \begin{cases} J & \text{se } k \text{ PV di } i \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial S}{\partial m_i} = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+m_i}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-m_i}{2} \right) + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+m_i}{1-m_i} \right) = -\text{atanh}(m_i). \quad (3.19)$$

Quindi

$$\boxed{- \sum_k J_{ik} m_k - h_i + \frac{1}{\beta} \text{atanh}(m_i) = 0}, \quad (3.20)$$

e

$$\boxed{m_i = \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right]}. \quad (3.21)$$

Questa equazione è il punto di partenza per l'approssimazione di campo medio secondo cui ogni spin S_i sente in media un campo magnetico esterno efficace uguale a $h_i + J_{ik} S_k$.

Diamo una derivazione alternativa dell'equazione di campo medio partendo da un'uguaglianza esatta:

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} S_i e^{-\beta H[S]} = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} e^{-\beta H[S]} \frac{\sum_{\mu_i=\pm 1} \mu_i e^{-\beta H[\mu_i, \tilde{S}]}}{\sum_{\mu_i=\pm 1} e^{-\beta H[\mu_i, \tilde{S}]}} , \quad (3.22)$$

dove \tilde{S} è l'insieme di tutti gli S tranne S_i . Infatti avremo

$$\sum_{\{S\}} e^{-\beta H[S_i, \tilde{S}]} = \sum_{\{\tilde{S}\}} \sum_{S_i=\pm 1} e^{-\beta H[S_i, \tilde{S}]}, \quad (3.23)$$

e quindi

$$\frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} \left[e^{-\beta H[S]} \frac{\sum_{\mu_i=\pm 1} \mu_i e^{-\beta H[\mu_i, \tilde{S}]}}{\sum_{\mu_i=\pm 1} e^{-\beta H[\mu_i, \tilde{S}]}} \right] = \frac{1}{Z} \sum_{\{\tilde{S}\}} \sum_{S_i=\pm 1} \left[e^{-\beta H[S_i, \tilde{S}]} \frac{\sum_{\mu_i=\pm 1} \mu_i e^{-\beta H[\mu_i, \tilde{S}]}}{\sum_{\mu_i=\pm 1} e^{-\beta H[\mu_i, \tilde{S}]}} \right] =$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{\{\tilde{S}\}} \sum_{\mu_i=\pm 1} \mu_i e^{-\beta H[\mu_i, \tilde{S}]} = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} S_i e^{-\beta H[S]} = \langle S_i \rangle. \quad (3.24)$$

Ora

$$H = -J \sum_{(l,k)} S_l S_k - \sum_l h_l S_l = -J S_i \sum_{k \text{ PV di } i} S_k - h_i S_i - J \sum_{(l,k), i \neq l, k} S_l S_k - \sum_{l \neq i} h_l S_l . \quad (3.25)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_i = \pm 1} \mu_i e^{-\beta H[\mu_i, \tilde{S}]} &= \sum_{\mu_i = \pm 1} \mu_i \exp \left[-\beta \left(-J \mu_i \sum_{k \text{ PV di } i} S_k - h_i \mu_i - J \sum_{(l,k), i \neq l, k} S_l S_k - \sum_{l \neq i} h_l S_l \right) \right] = \\ &= \sum_{\mu_i = \pm 1} \mu_i \exp \left[-\beta \left(-J \mu_i \sum_{k \text{ PV di } i} S_k - h_i \mu_i \right) \right] \exp \left[-\beta \left(-J \sum_{(l,k), i \neq l, k} S_l S_k - \sum_{l \neq i} h_l S_l \right) \right] = \\ &= \exp \left[-\beta \left(-J \sum_{(l,k), i \neq l, k} S_l S_k - \sum_{l \neq i} h_l S_l \right) \right] \left[e^{\beta (J \sum_{k \text{ PV di } i} S_k + h_i)} - e^{-\beta (J \sum_{k \text{ PV di } i} S_k + h_i)} \right] = \\ &= \exp \left[-\beta \left(-J \sum_{(l,k), i \neq l, k} S_l S_k - \sum_{l \neq i} h_l S_l \right) \right] 2 \sinh \left[\beta \left(J \sum_{k \text{ PV di } i} S_k + h_i \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Allora

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} S_i e^{-\beta H[S]} \tanh \left[\beta \left(J \sum_{k \text{ PV di } i} S_k + h_i \right) \right] = \left\langle \tanh \left[\beta \left(J \sum_{k \text{ PV di } i} S_k + h_i \right) \right] \right\rangle . \quad (3.27)$$

In conclusione:

$$\boxed{\langle S_i \rangle = \left\langle \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} S_k + h_i \right) \right] \right\rangle} . \quad (3.28)$$

Questa equazione ci dice che il valore di aspettazione dello spin S_i è esattamente uguale al valore di aspettazione della tangente iperbolica del campo magnetico efficace che agisce su di esso (cioè $h_{\text{eff}} = h_i + \sum_k J_{ik} S_k$). L'equazione di campo medio si ottiene sostituendo S_k con m_k , cosicché:

$$\boxed{m_i = \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right]} . \quad (3.29)$$

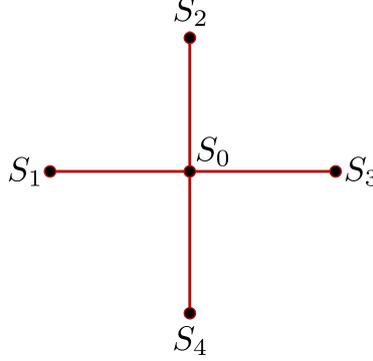
Esistono approssimazioni più raffinate che hanno come punto di partenza sempre l'equazione $\langle S_i \rangle = \langle \tanh[\beta(\sum_k J_{ik} S_k + h_i)] \rangle$. Discutiamo il caso bidimensionale a campo magnetico esterno zero e $J = 1$, cioè:

$$\begin{aligned} h_i &= 0 \quad \forall i , \\ J_{ik} &= \begin{cases} 1 & |i - k| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} . \end{cases} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Avremo

$$\langle S_0 \rangle = \langle \tanh[\beta(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)] \rangle . \quad (3.31)$$

Ora una funzione $f(S_1, S_2, S_3, S_4)$ di variabili $S_i = \pm 1$ e quindi $S_i^2 = 1$ che dipende



solo dalla somma $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$ sarà in generale della forma

$$f(S_1, S_2, S_3, S_4) = A + B(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) + C(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2 + D(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^3 + E(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^4 . \quad (3.32)$$

D'altra parte essendo $f(S_1, S_2, S_3, S_4) = -f(-S_1, -S_2, -S_3, -S_4)$ avremo $A = C = E = 0$. Quindi

$$f(S_1, S_2, S_3, S_4) = B(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) + D(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^3 = \tilde{B}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) + \tilde{D}(S_1 S_2 S_3 + S_1 S_2 S_4 + S_1 S_3 S_4 + S_2 S_3 S_4) . \quad (3.33)$$

Prendendo $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 1$ otteniamo

$$4\tilde{B} + 4\tilde{D} = \tanh 4\beta . \quad (3.34)$$

Prendendo $S_1 = S_2 = S_3 = 1$ e $S_4 = -1$ otteniamo

$$2\tilde{B} - 2\tilde{D} = \tanh 2\beta , \quad (3.35)$$

da cui

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \frac{\tanh 4\beta + 2 \tanh 2\beta}{8} , \\ \tilde{D} &= \frac{\tanh 4\beta - 2 \tanh 2\beta}{8} . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Quindi avremo

$$\begin{aligned} \langle S_0 \rangle &= \tilde{B} \langle S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \rangle + \tilde{D} \langle S_1 S_2 S_3 + S_1 S_2 S_4 + S_1 S_3 S_4 + S_2 S_3 S_4 \rangle = \\ &= 4\tilde{B} \langle S_1 \rangle + 4\tilde{D} \langle S_1 S_2 S_3 \rangle , \end{aligned} \quad (3.37)$$

(poiché l'hamiltoniano è invariante sotto lo scambio di S_1, S_2, S_3, S_4).

Dal momento che il sistema è invariante per traslazioni $\langle S_i \rangle = m \forall i$ e quindi:

$$m = 4m\tilde{B} + 4\tilde{D} \langle S_1 S_2 S_3 \rangle , \quad (3.38)$$

che è un esempio di equazione DLR (Dobrushin-Lanford-Rouelle). Questa equazione ci dice che il valor medio della magnetizzazione è proporzionale al valor medio del prodotto di soli 3 spin primi vicini.

Se facciamo l'approssimazione $\langle S_1 S_2 S_3 \rangle = m^3$ otteniamo l'approssimazione di campo medio modificata:

$$\boxed{m = 4m\tilde{B} + 4m^3\tilde{D}} . \quad (3.39)$$

Una soluzione è sicuramente $m = 0$, poi avremo altre 2 soluzioni date da

$$4m^2\tilde{D} = 1 - 4\tilde{B} \quad \rightarrow \quad m^2 = \frac{1 - 4\tilde{B}}{4\tilde{D}} . \quad (3.40)$$

Ovviamente $m^2 > 0$, cioè avremo le due soluzioni se $\tilde{B}(\beta) < \tilde{B}(\beta_c) = \frac{1}{4}$, ovvero sia quando $\beta > \beta_c \sim 0.36$ (e cioè $T < T_c$). Quindi se la temperatura scende sufficientemente compaiono altre due soluzioni per la magnetizzazione diverse da $m = 0$.

Ritorniamo ora alle equazioni di campo medio iniziali:

$$m_i = \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right] . \quad (3.41)$$

Consideriamo il caso di un ferromagnete, $J > 0$, e poniamo $J = 1$ per semplicità. Supponiamo inoltre che il campo magnetico sia costante: $h_i = h \forall i$. Allora avremo $m_i = m \forall i$. In questo caso tutti i termini nella somma su k danno lo stesso contributo e il numero di questi termini è esattamente $2D$; quindi avremo:

$$\boxed{m = \tanh[\beta(2Dm + h)]} , \quad (3.42)$$

e inoltre

$$\langle H \rangle = - \sum_{(i,k)} m^2 - \sum_i h m . \quad (3.43)$$

Ora, se abbiamo N siti, da ogni sito partono $2D$ linee. Ogni linea connette 2 siti, quindi il numero di linee (link) è $2DN = 2L \rightarrow L = DN$, cosicché nella somma $\sum_{(i,k)}$ ci sono DN termini, e allora:

$$\boxed{\frac{\langle H \rangle}{N} = u = -Dm^2 - hm} . \quad (3.44)$$

La densità di energia libera sarà:

$$\phi(m) = \frac{\Phi(m)}{N} = \frac{\langle H \rangle}{N} - \frac{S}{\beta} \quad (3.45)$$

$$\boxed{\phi(m) = -Dm^2 - hm + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1+m}{2} \log \left(\frac{1+m}{2} \right) + \frac{1-m}{2} \log \left(\frac{1-m}{2} \right) \right]} . \quad (3.46)$$

L'energia libera di equilibrio si ottiene minimizzando $\phi(m)$. La condizione $\frac{d\phi}{dm} = 0$ ci dà $m = \tanh[\beta(2Dm + h)]$. La sola condizione $\frac{d\phi}{dm} = 0$ non è sufficiente. Infatti dobbiamo imporre $\frac{d^2\phi}{dm^2} > 0$ e infine confrontare tutti i minimi locali per trovare quello globale.

Ora mettiamoci ad $h = 0$. Avremo

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dm} &= -2Dm + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+m}{2} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-m}{2} \right) \right] = -2Dm + \frac{1}{2\beta} \log \left(\frac{1+m}{1-m} \right) \\ \frac{d^2\phi}{dm^2} &= -2D + \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{1+m} + \frac{1}{1-m} \right) = -2D + \frac{1}{2\beta} \frac{2}{1-m^2} = -2D + \frac{1}{\beta} \frac{1}{1-m^2}.\end{aligned}\quad (3.47)$$

Ora $m = 0$ è soluzione di $\frac{d\phi}{dm} = 0$ e inoltre $-2D + \frac{1}{\beta} > 0$, cioè $2D\beta < 1$. Quindi $m = 0$ è un minimo locale nella regione $2D\beta < 1$. In verità è un minimo globale. Infatti:

$$-2D\beta(1-m^2) + 1 > 0 \rightarrow 2D\beta(1-m^2) < 1, \quad (3.48)$$

in tutta la regione fisica $-1 \leq m \leq 1$ e quindi

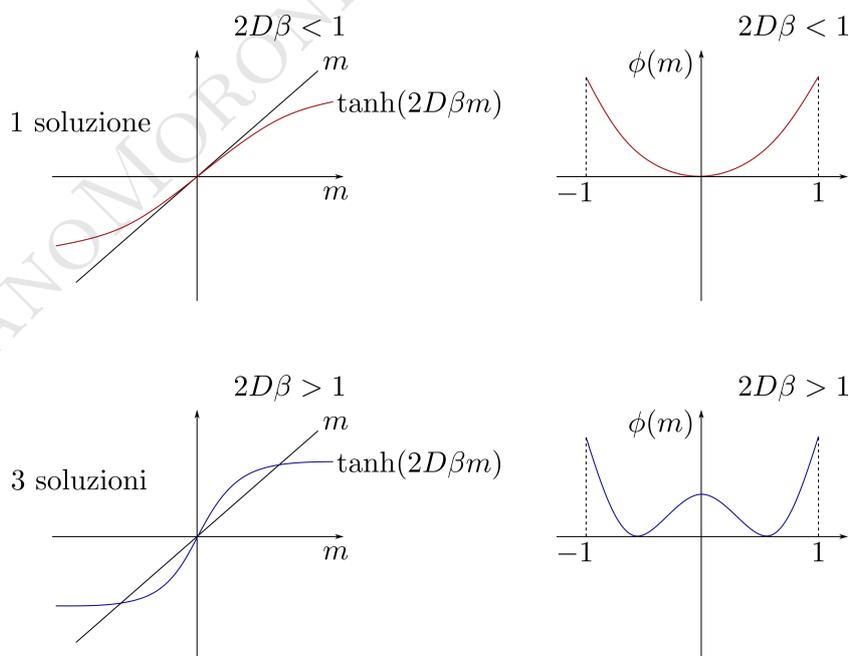
$$\frac{d^2\phi}{dm^2} > 0 \quad \forall m \in [-1, 1] \text{ se } 2D\beta < 1. \quad (3.49)$$

Nella regione $2D\beta > 1$ avremo che $\frac{d^2\phi}{dm^2} < 0$ per m vicino a zero e cioè quando

$$-2D\beta + 2D\beta m^2 + 1 < 0 \rightarrow m^2 < 1 - \frac{1}{2D\beta}, \quad (3.50)$$

e positiva altrove, quindi $m = 0$ è un minimo locale per $2D\beta > 1$.

Consideriamo l'equazione $m = \tanh(2D\beta m)$.



Nel caso $2D\beta > 1$ abbiamo altre 2 soluzioni per $\frac{d\phi}{dm} = 0$ che corrispondono a 2 minimi simmetrici.

Nel caso $2D\beta \sim 1$, cioè $2D\beta \rightarrow 0^+$ è chiaro che i due minimi devono essere vicini ad $m = 0$. Quindi avremo

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dm} &= -2Dm + \frac{1}{2\beta} \log\left(\frac{1+m}{1-m}\right) = -2Dm + \frac{1}{2\beta} \log(1+m) - \frac{1}{2\beta} \log(1-m) \approx \\ &\approx -2Dm + \frac{1}{2\beta} \left(m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3}\right) - \frac{1}{2\beta} \left(-m - \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3}\right) = 0, \\ &\rightarrow -2Dm + \frac{1}{\beta}m + \frac{1}{3\beta}m^3 = 0 \rightarrow -2D + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{3\beta}m^2 = 0, \\ &\rightarrow \boxed{m = \pm\sqrt{3}(2D\beta - 1)^{1/2}} \quad 2D\beta \rightarrow 1^+. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ricapitolando

- $2D\beta < 1$ - 1 **minimo globale** $m = 0$;
- $2D\beta > 1$ - 2 **minimi simmetrici** $m = \pm m_{rms}$.

Il punto $2D\beta = 1$, cioè

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2D} = \beta_c}, \quad (3.52)$$

è un **punto critico**.

Per $\beta < \beta_c$ ($T > T_c$) non è presente magnetizzazione spontanea e l'energia libera di equilibrio ha un minimo per $m = 0$.

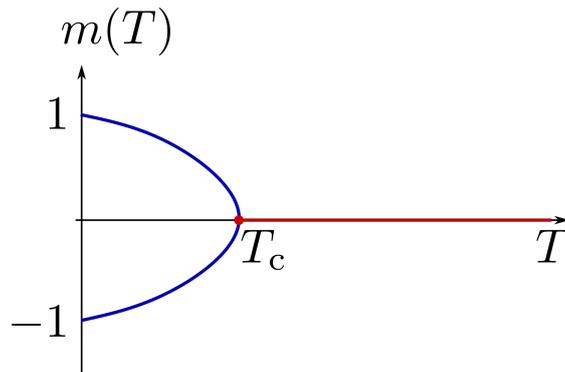
Al contrario per $\beta > \beta_c$ ($T < T_c$) è presente una magnetizzazione spontanea. Inoltre per $\beta \rightarrow \beta_c^+$ (e quindi $T \rightarrow T_c^-$) avremo

$$m \rightarrow \pm\sqrt{3}(2D\beta - 1)^{1/2} = \pm\sqrt{3}\sqrt{\frac{\beta}{\beta_c} - 1} = \pm\sqrt{3}\sqrt{\frac{T_c}{T} - 1}, \quad (3.53)$$

e quindi

$$\boxed{m \approx \pm\sqrt{3}\left(\frac{T_c - T}{T}\right)^{1/2}} \quad \text{per } T \rightarrow T_c^-, \quad (3.54)$$

dove $1/2$ è l'**esponente critico**.



Vediamo cosa succede quando $2D\beta = \frac{\beta}{\beta_c} = \frac{T_c}{T} \rightarrow \infty$. Avremo:

$$\begin{aligned} -2Dm + \frac{1}{2\beta} \log\left(\frac{1+m}{1-m}\right) &= 0, \\ -4D\beta m + \log\left(\frac{1+m}{1-m}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

In questo caso i due minimi si avranno per $|m| \sim 1$. Prendendo $m \sim 1$ avremo

$$\begin{aligned} -4D\beta + \log 2 - \log(1-m) &= 0, \\ \rightarrow \log\left(\frac{1-m}{2}\right) &= -4D\beta \rightarrow (1-m) = 2e^{-4D\beta}, \\ \rightarrow m &= 1 - 2e^{-4D\beta}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Quindi

$$\boxed{m \approx \pm(1 - 2e^{-4D\beta})} \quad \text{per } T \rightarrow 0. \quad (3.57)$$

Notiamo che $e^{-4D\beta}$ è proprio la probabilità che uno spin sia invertito quando tutti i vicini sono allineati (infatti $\Delta E = 4D$).

Vediamo ora cosa accade con un campo magnetico h piccolo. A $T < T_c$ avremo 2 minimi e un massimo. Il minimo in cui m ha lo stesso segno di h sarà quello globale (figura 3.1a). Se $|h|$ è grande abbastanza il minimo più alto e il massimo coalescono

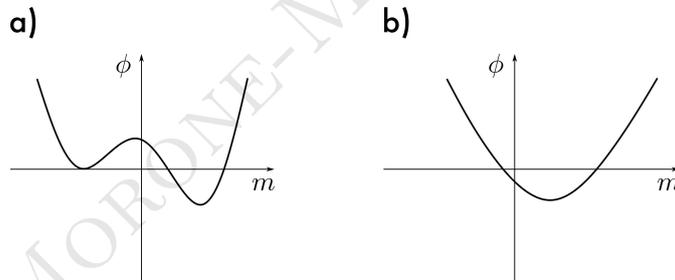


Figure 3.1

e ϕ ha un solo minimo (figura 3.1b). Questa situazione (un solo minimo) si ha anche a $T > T_c$ con $|h|$ piccolo o grande. La magnetizzazione m come funzione del campo magnetico sarà come in figura 3.2.

Se prepariamo il sistema a $t = 0$ nella regione metastabile come in figura 3.3, cioè ad esempio $m < 0$ ma $h > 0$ – questo può essere fatto facendo aumentare adiabaticamente il campo da negativo a positivo–, il sistema rimarrà nella regione metastabile per lungo tempo (stabilità locale) prima che una fluttuazione termodinamica (i.e. macroscopica) permetta al sistema di andare nello stato più stabile $m > 0$ (lo stato fondamentale).

Ricapitolando abbiamo trovato

- Per $T > T_c$ e $h = 0$ avremo $m = 0$ e $u = 0$.

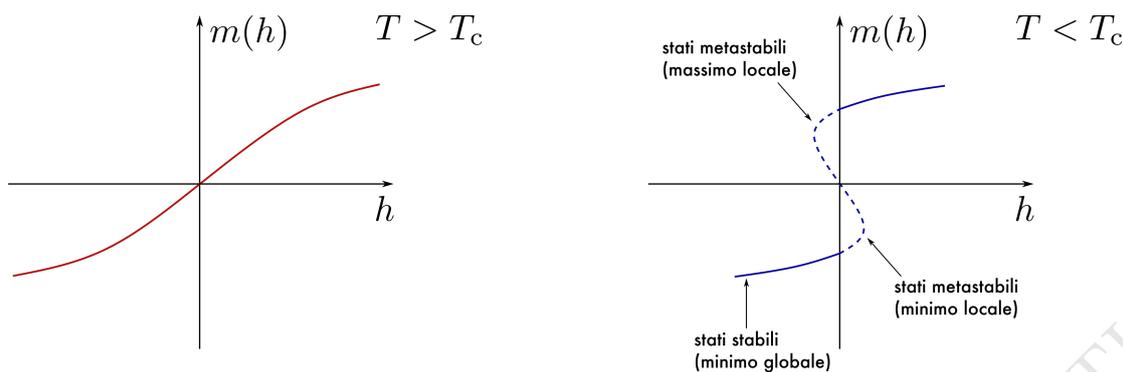


Figure 3.2

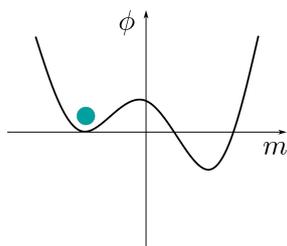


Figure 3.3

- Per $T \rightarrow T_c^-$ avremo $m \sim (T - T_c)^\beta$ e $u \sim T - T_c$ con $\beta = \frac{1}{2}$. Inoltre

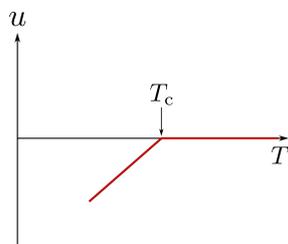
$$\begin{aligned} \chi^{-1} &= \frac{d^2\phi}{dm^2} = -2D + \frac{1}{1-m^2} \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} \left[-2D\beta + \frac{1}{1-m^2} \right] = \frac{1}{\beta} \left[-\frac{\beta}{\beta_c} + \frac{1}{1-m^2} \right] \sim \\ &\sim \frac{1}{\beta} \left(\frac{-\beta + \beta_c}{\beta_c} \right) \sim \beta_c - \beta, \end{aligned} \quad (3.58)$$

e quindi

$$\chi \approx |T - T_c|^{-\gamma} \quad \text{con } \gamma = 1, \quad (3.59)$$

che diverge per $T \rightarrow T_c$.

- Per $T \sim T_c$ e $|h|$ piccolo avremo $m \propto h^{1/\delta}$ con $\delta = 3$.
- Il calore specifico $\partial u / \partial T$ è discontinuo, ma non c'è calore latente a $T = T_c$.



- Ad $h \neq 0$ non ci sono transizioni di fase (cioè singolarità).
- A V finito non ci sono transizioni di fase (Z analitica e positiva).

FLAVIANO MORONE - MECCANICA STATISTICA

Chapter 4

Correzioni all'approssimazione di campo medio

Dimostriamo l'identità

$$\int dC e^{-\beta H} \geq \int dC e^{-\beta H_0 - \beta \langle H - H_0 \rangle_{H_0}}, \quad (4.1)$$

dove

$$\langle \cdot \rangle_{H_0} = \frac{\int dC \cdot e^{-\beta H_0}}{\int dC e^{-\beta H_0}}. \quad (4.2)$$

Questa equazione è sostanzialmente una disuguaglianza di convessità. La dimostrazione può essere data partendo dalla funzione:

$$g(\lambda) = \log \int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)}. \quad (4.3)$$

Avremo

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\lambda} &= \frac{\int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)} (-\beta)(H - H_0)}{\int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)}}, \\ \frac{d^2g}{d\lambda^2} &= \frac{(\int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)}) (\int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)} \beta^2 (H - H_0)^2) - (\int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)})^2}{(\int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)})^2} \\ &= \frac{(\int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)} (-\beta)(H - H_0))^2}{(\int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)})^2} = \\ &= \beta^2 \langle (H - H_0)^2 \rangle_\lambda - \beta^2 \langle H - H_0 \rangle_\lambda^2 = \beta^2 \langle (H - H_0)^2 - \langle H - H_0 \rangle_\lambda^2 \rangle = \\ &= \beta^2 \langle [(H - H_0) - \langle H - H_0 \rangle_\lambda]^2 \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Quindi

$$g(\lambda) \geq g(0) + \lambda \left. \frac{dg}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (4.5)$$

Se prendiamo $\lambda = 1$ otteniamo

$$\log \int dC e^{-\beta H_0 - \beta \lambda (H - H_0)} \geq \log \int dC e^{-\beta H_0} + \frac{\int dC e^{-\beta H_0} (-\beta)(H - H_0)}{\int dC e^{-\beta H_0}}, \quad (4.6)$$

e dunque

$$\log \int dC e^{-\beta H} \geq \log \int dC e^{-\beta H_0} - \beta \langle H - H_0 \rangle_{H_0} . \quad (4.7)$$

Esponenziando otteniamo

$$\boxed{\int dC e^{-\beta H} \geq \int dC e^{-\beta H_0 - \beta \langle H - H_0 \rangle_{H_0}}} . \quad (4.8)$$

Consideriamo ora il caso $h = 0$ e prendiamo un hamiltoniano di prova $H_0 = r \sum_i S_i$ e sia $H = H_{\text{Ising}}$. L'energia libera sarà $f = -\frac{1}{\beta V} \log Z$, cioè

$$f = -\frac{1}{\beta V} \log \int dC e^{-\beta H} . \quad (4.9)$$

Ora

$$-\frac{1}{\beta V} \log \int dC e^{-\beta H} \leq -\frac{1}{\beta V} \log \int dC e^{-\beta r \sum_i S_i} + \frac{1}{V} \langle H - H_0 \rangle_{H_0} , \quad (4.10)$$

e

$$\begin{aligned} \int dC e^{-\beta r \sum_i S_i} &= \sum_{\{S\}} e^{-\beta r \sum_{i=1}^N S_i} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \dots \sum_{S_N=\pm 1} e^{-\beta r S_1} e^{-\beta r S_2} \dots e^{-\beta r S_N} = \\ &= \left(\sum_{S=\pm 1} e^{-\beta r S} \right)^N = [2 \cosh(\beta r)]^N = [2 \cosh(\beta r)]^V , \end{aligned} \quad (4.11)$$

mentre

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{H_0} &= - \sum_{(i,j)} \langle S_i S_j \rangle_{H_0} = - \sum_{(i,j)} \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} e^{-\beta r \sum_i S_i} S_i S_j = \\ &= - \sum_{(i,j)} \frac{1}{Z} \left(\sum_{S=\pm 1} S e^{-\beta r S} \right)^2 \left(\sum_{S=\pm 1} e^{-\beta r S} \right)^{N-2} = \\ &= - \sum_{(i,j)} \frac{[2 \sinh(\beta r)]^2 [2 \cosh(\beta r)]^{N-2}}{[2 \cosh(\beta r)]^N} = -DV \tanh^2(\beta r) , \end{aligned} \quad (4.12)$$

e infine

$$\begin{aligned} \langle H_0 \rangle_{H_0} &= r \sum_i \langle S_i \rangle_{H_0} = \frac{r}{Z} \sum_i \sum_{\{S\}} S_i e^{-\beta r \sum_i S_i} = \\ &= -r \sum_i \frac{[2 \sinh(\beta r)] [2 \cosh(\beta r)]^{N-1}}{[2 \cosh(\beta r)]^N} = -rV \tanh(\beta r) . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Quindi avremo

$$\boxed{f \leq -\frac{1}{\beta} \log [2 \cosh(\beta r)] - D \tanh^2(\beta r) + r \tanh(\beta r)} . \quad (4.14)$$

Ora se prendiamo $r = \frac{1}{\beta} \operatorname{atanh}(m)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\beta} \log[2 \cosh(\beta r)] &= -\frac{1}{\beta} [2 \cosh(\operatorname{atanh}(m))] = -\frac{1}{\beta} \log \left[2 \cosh \left(\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+m}{1-m} \right) \right) \right] = \\
&= -\frac{1}{\beta} \log \left(\sqrt{\frac{1+m}{1-m}} + \sqrt{\frac{1-m}{1+m}} \right) = \\
&= -\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{2}{\sqrt{1-m^2}} \right) = \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{\sqrt{1-m^2}}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{2\beta} \log \left(\frac{1+m}{2} \right) + \frac{1}{2\beta} \log \left(\frac{1-m}{2} \right) ,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

e

$$\begin{aligned}
r \tanh(\beta r) &= \frac{1}{2\beta} m \log \left(\frac{1+m}{1-m} \right) = \frac{1}{2\beta} m \log \left(\frac{1+m}{2} \frac{2}{1-m} \right) = \\
&= \frac{1}{2\beta} m \log \left(\frac{1+m}{2} \right) - \frac{1}{2\beta} m \log \left(\frac{1-m}{2} \right) .
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Quindi

$$\boxed{f \leq -Dm^2 + \frac{1}{\beta} \left[\frac{1+m}{2} \log \left(\frac{1+m}{2} \right) - \frac{1-m}{2} \log \left(\frac{1-m}{2} \right) \right]} = \phi(m) . \tag{4.17}$$

Dunque, l'energia libera nell'approssimazione di campo medio dà un limite superiore all'energia libera esatta. Inoltre in questo caso

$$P_{H_0}[C] = \frac{e^{-\beta H_0[C]}}{\int dC e^{-\beta H_0[C]}} \tag{4.18}$$

è proprio una probabilità fattorizzata (dato che H_0 è separabile). In sostanza nell'approssimazione di campo medio minimizziamo $\phi(m)$ invece di $f(m)$.

4.1 Un modello risolvibile - forze deboli a lungo raggio

Vediamo ora un modello di Ising che è esattamente risolvibile dall'approssimazione di campo medio. L'hamiltoniano è lo stesso del modello di Ising, tranne il fatto che la somma su i e k va su tutte le possibili coppie di un reticolo di N siti e $J = \frac{1}{N}$. La forza tra gli spin è debole e a lungo raggio. Il limite termodinamico (cioè di volume infinito) si ottiene mandando N all'infinito. Precisamente:

$$H = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N S_i S_j - \sum_i h_i S_i . \tag{4.19}$$

Prendiamo $h_i = h \forall i$.

Scriviamo $e^{-\beta H}$ nella forma:

$$e^{-\beta H} = \exp \left[\frac{\beta}{2N} \sum S_i S_j + \beta h \sum S_i \right] = \sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp \left[-\frac{\beta N}{2} \lambda^2 + \beta \lambda \sum_i S_i + \beta h \sum_i S_i \right], \quad (4.20)$$

e quindi

$$\boxed{e^{-\beta H} \sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp \left[-\frac{\beta N}{2} \lambda^2 + \sum_{i=1}^N (\beta \lambda + \beta h) S_i \right]}. \quad (4.21)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{S\}} e^{-\beta H[S]} = \sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-N\beta\lambda^2/2} [2 \cosh(\beta\lambda + \beta h)]^N = \\ &= \sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp \left\{ -\frac{N\beta\lambda^2}{2} + N \log[2 \cosh(\beta\lambda + \beta h)] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp \left\{ -N\beta \left[\frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log[2 \cosh(\beta\lambda + \beta h)] \right] \right\} = \\ &\sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-N\beta A(\lambda)}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

dove

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log[2 \cosh(\beta\lambda + \beta h)]. \quad (4.23)$$

Il limite $N \rightarrow \infty$ può essere valutato usando il metodo del punto di sella secondo il quale, in questo limite,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{Ng(x)} = \max_x g(x). \quad (4.24)$$

Quindi avremo

$$f = -\frac{1}{\beta N} \log Z = -\frac{1}{\beta N} \log \sqrt{\frac{\beta N}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-N\beta A(\lambda)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \min_{\lambda} A(\lambda). \quad (4.25)$$

Esplicitamente

$$\boxed{f = \min_{\lambda} \left[\lambda^2 - \frac{1}{\beta} \log[2 \cosh(\beta\lambda + \beta h)] \right]}. \quad (4.26)$$

Ora

$$\frac{dA}{d\lambda} = \lambda - \tanh(\beta\lambda + \beta h) = 0, \quad (4.27)$$

da cui

$$\boxed{\lambda = \tanh(\beta\lambda + \beta h)}. \quad (4.28)$$

Il valore $\lambda = \bar{\lambda}$ che minimizza $A(\lambda)$ ha il significato di densità di magnetizzazione. Infatti

$$m = -\frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{\partial}{\partial h} \min_{\lambda} \left[\lambda^2 - \frac{1}{\beta} \log[2 \cosh(\beta\lambda + \beta h)] \right] = \tanh[\beta(\bar{\lambda} + h)] = \bar{\lambda}. \quad (4.29)$$

Quindi otteniamo proprio l'equazione di campo medio:

$$\boxed{m = \tanh(\beta m + \beta h)}, \quad (4.30)$$

che è la soluzione esatta del modello. In sostanza l'approssimazione di campo medio diventa esatta nel modello a range infinito. Una soluzione semplice del modello è possibile poiché le funzioni di correlazione connesse $\langle S_i S_k \rangle_c$ sono di ordine $\frac{1}{N}$ e si annullano quando $N \rightarrow \infty$. Infatti dal teorema della risposta lineare:

$$\langle S_i S_k \rangle_c = \langle S_i S_k \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_k \rangle = \frac{\chi}{N\beta} \frac{d\bar{\lambda}}{dh}. \quad (4.31)$$

L'approssimazione di campo medio è anche esatta per forze a raggio finito nel limite in cui la dimensione spaziale $D \rightarrow \infty$ e anche in questo caso le funzioni di correlazione connesse vanno a zero.

- $D = D_{\text{critic}}^L = 1$ - Dimensione critica inferiore - **no transizioni di fase**.
- $2 \leq D \leq 3$ - I valori degli esponenti critici sono diversi da quelli di campo medio.
- $D \geq D_{\text{critic}}^U = 4$ - Dimensione critica superiore - valgono gli esponenti critici di campo medio.

L'esistenza di questo modello risolvibile ci permette di riderivare l'approssimazione di campo medio nel seguente modo. Consideriamo l'hamiltoniano:

$$\boxed{H_{\alpha} = (1 - \alpha) \frac{D}{N-1} \sum'_{i,k} S_i S_k + \frac{\alpha}{2} \sum_{i,k} J_{ik} S_i S_k}, \quad (4.32)$$

dove $\sum'_{i,k}$ va su tutte le coppie i, k con $i \neq k$ e $\sum_{i,k}$ su tutte le coppie (i, k) . Quando:

- $\alpha = 0$ - modello a raggio infinito;
- $\alpha = 1$ - modello a corto raggio (**Ising**).

Avremo

$$f_{\alpha} = -\frac{1}{\beta N} \log Z = -\frac{1}{\beta N} \log \int dC e^{-\beta H_{\alpha}[C]}, \quad (4.33)$$

e

$$\begin{aligned}
\left. \frac{df_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= -\frac{1}{\beta N} \frac{1}{Z} (-\beta) \int dC \left. \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} e^{-\beta H_\alpha[C]} \right|_{\alpha=0} = \frac{1}{N} \left\langle \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} \right\rangle_{\alpha=0} = \\
&= \frac{1}{N} \left[-\frac{D}{N-1} \sum'_{i,k} \langle S_i S_k \rangle_{\alpha=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,k} J_{ik} \langle S_i S_k \rangle_{\alpha=0} \right] = \\
&= \frac{1}{N} \left[\sum'_{i,k} \left(\frac{1}{2} J_{ik} - \frac{D}{N-1} \right) \langle S_i S_k \rangle_{\alpha=0} \right].
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Ora

$$\langle S_i S_k \rangle = \langle S_i S_k \rangle_c + \langle S_i \rangle \langle S_k \rangle = \frac{\chi}{N\beta} + m^2. \tag{4.35}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum'_{i,k} J_{ik} &= JDN = DN, \\
\sum'_{i,k} &= N(N-1).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\left. \frac{df_\alpha}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= \left(\frac{\chi}{N\beta} + m^2 \right) \frac{1}{N} \left[\sum'_{i,k} \left(\frac{1}{2} J_{ik} - \frac{D}{N-1} \right) \right] = \\
&= \left(\frac{\chi}{N\beta} + m^2 \right) \frac{1}{N} \left[DN - \frac{D}{N-1} N(N-1) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

e dunque $\alpha = 0$ è un punto estremale. Inoltre dalla disuguaglianza di convessità

$$g(\lambda) \geq g(0) + \lambda \left. \frac{dg}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \tag{4.38}$$

avremo

$$g(1) \geq g(0) + \left. \frac{dg}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \tag{4.39}$$

da cui

$$f_1 \leq f_0 + \left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}, \tag{4.40}$$

cioè $f_1 \leq f_0$, e quindi

$$\boxed{f_{\text{Ising}}^D \leq f_{\text{CM}}} . \tag{4.41}$$

4.2 Funzioni di correlazione

Calcoliamo ora le funzioni di correlazione nel contesto dell'approssimazione di campo medio. A prima vista sembrerebbe impossibile, dato che nell'approssimazione di campo medio gli spin sono scorrelati, dal momento che la distribuzione di probabilità è supposta fattorizzata. Questa difficoltà può essere superata usando il

teorema della risposta lineare. Infatti le funzioni di correlazione connesse saranno date da:

$$\langle S_i S_k \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\delta^2}{\delta h_i \delta h_k} F[h] \Big|_{h=0} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \Big|_{h=0} . \quad (4.42)$$

A questo punto possiamo usare la distribuzione di probabilità fattorizzata per calcolare $F[h]$ e ottenere le funzioni di correlazione tramite la formula precedente. Di nuovo questo sembra paradossale, poiché usiamo una distribuzione di probabilità che ha funzioni di correlazione nulle per calcolare le funzioni di correlazione. In verità la contraddizione è apparente. Infatti l'equazione precedente vale solo se $F[h]$ è la vera F , cioè calcolata con $P = P_{\text{eq}}$. Se $P \neq P_{\text{eq}}$, le funzioni di correlazione e la funzione di risposta non sono più uguali. Come facciamo a giustificare l'uso dell'equazione precedente se $P \neq P_{\text{eq}}$?

Sia P_{ap} la distribuzione di probabilità approssimata e supponiamo che $\delta P = P_{\text{eq}} - P_{\text{ap}} = \epsilon$ è piccola in qualche senso (se δP non è piccola, l'approssimazione non ha senso). Avremo

$$\begin{aligned} \langle S_i S_k \rangle_{P_{\text{eq}}} &= \langle S_i S_k \rangle_{P_{\text{ap}}} + O(\epsilon) , \\ \Phi(P_{\text{ap}}) &= \Phi(P_{\text{eq}}) + O(\epsilon^2) \quad \text{dato che} \quad \frac{\delta \Phi}{\delta P} = 0 . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Quindi l'errore nella funzione di risposta è più piccolo dell'errore nella funzione di correlazione quando P è vicina ma non uguale a P_{eq} . Quindi possiamo calcolare $\langle S_i S_k \rangle_{P_{\text{eq}}}$ a partire dalla funzione di risposta calcolata con $\Phi(P_{\text{ap}})$ almeno fino all'ordine ϵ . Cioè avremo

$$\begin{aligned} \langle S_i S_k \rangle_{P_{\text{eq}}} &= 0 \quad \text{all'ordine} \quad \epsilon^0 , \\ \langle S_i S_k \rangle_{P_{\text{eq}}} &= \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_k} \right)_{\text{CM}} \quad \text{all'ordine} \quad \epsilon . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Per semplicità effettuiamo il calcolo nella regione $h = 0$ e $T > T_c$. Aggiungiamo un campo magnetico infinitesimo dipendente dal sito. Le m_i saranno anch'esse infinitesime, quindi avremo (trascurando termini di ordine m_i^2):

$$m_i = \tanh \left[\beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) \right] \sim \beta \left(\sum_k J_{ik} m_k + h_i \right) . \quad (4.45)$$

Chiamando $A_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik}$ avremo il sistema di equazioni lineari:

$$\sum_k A_{ik} m_k = h_i , \quad (4.46)$$

la cui soluzione sarà $m_k = \sum_l B_{kl} h_l$ con

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} A_{ik} B_{kl} h_l &= h_i , \\ \sum_k A_{ik} B_{kl} &= \delta_{il} , \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$B_{kl} = (A^{-1})_{kl} .$$

La soluzione può essere trovata usando la trasformata di Fourier. Se lo spazio delle configurazioni è un reticolo cubico, la trasformata di Fourier è definita nella prima zona di Brillouin:

$$-\pi \leq P_\alpha \leq \pi \quad \alpha = 1, \dots, D . \quad (4.48)$$

Ora

$$\begin{aligned} A_{ik} &= \frac{\delta_{ik}}{\beta} - J_{ik} = A(\vec{i} - \vec{k}) = \frac{\delta_{\vec{i}-\vec{k},0}}{\beta} - J(\vec{i} - \vec{k}) , \\ A(\vec{i} - \vec{k}) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{A}(p) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{i} - \vec{k})} , \\ \tilde{A}(p) &= \sum_{\vec{i}-\vec{k}} A(\vec{i} - \vec{k}) e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{i} - \vec{k})} = \sum_{\vec{i}-\vec{k}} \left[\frac{\delta_{\vec{i}-\vec{k},0}}{\beta} - J_{\vec{i}-\vec{k}} \right] e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{i} - \vec{k})} = \\ &= \frac{1}{\beta} - \sum_{\vec{i}-\vec{k}} J_{\vec{i}-\vec{k}} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{i} - \vec{k})} = \frac{1}{\beta} - J \sum_{|\vec{i}-\vec{k}|=1} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{i} - \vec{k})} = \\ &= \frac{1}{\beta} - \sum_{|\vec{\ell}|=1} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{\ell}} = \frac{1}{\beta} - \sum_{\alpha=1}^D \sum_{\ell_\alpha=\pm 1} e^{-ip_\alpha \ell_\alpha} = \frac{1}{\beta} - 2 \sum_{\alpha=1}^D \cos(p_\alpha) . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Quindi

$$B_{kl} = B(\vec{k} - \vec{\ell}) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{\frac{1}{\beta} - 2 \sum_{\alpha=1}^D \cos(p_\alpha)} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{k} - \vec{\ell})} . \quad (4.50)$$

Poiché $\langle S_i S_k \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial m_i}{\partial h_k}$, allora

$$\langle S_i S_k \rangle = \frac{1}{\beta} B_{ik} . \quad (4.51)$$

A questo punto possiamo calcolare le correzioni al risultato di campo medio $u = 0$ per $T > T_c$. Avremo:

$$u = \frac{\langle H \rangle}{N} = \frac{1}{N} \left\langle \left(- \sum_{(i,k)} S_i S_k \right) \right\rangle = -\frac{1}{N} \left\langle \frac{1}{2} \sum_{i,k} J_{ik} S_i S_k \right\rangle = -\frac{1}{2N} \sum_{i,k} J_{ik} \langle S_i S_k \rangle . \quad (4.52)$$

Per l'invarianza per traslazioni le $\langle S_i S_k \rangle$ sono tutte uguali e quindi

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2} \sum_k J_{ik} \langle S_i S_k \rangle = -\frac{1}{2} \sum_k J_{ik} \frac{B_{ik}}{\beta} = -\frac{1}{2\beta} \sum_k J_{ik} \beta \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\vec{p} \cdot (\vec{i} - \vec{k})}}{1 - 2\beta \sum_{\alpha=1}^D \cos(p_\alpha)} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\sum_\alpha 2 \cos(p_\alpha)}{1 - 2\beta \sum_\alpha \cos(p_\alpha)} , \end{aligned} \quad (4.53)$$

da cui

$$u = - \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{\sum_{\alpha} \cos(p_{\alpha})}{1 - 2\beta \sum_{\alpha} \cos(p_{\alpha})} . \quad (4.54)$$

Il calore specifico sarà

$$C = \frac{du}{dT} = \frac{du}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{T^2} \frac{du}{d\beta} = -\beta^2 \frac{du}{d\beta} , \quad (4.55)$$

e quindi

$$C = 2\beta^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{[\sum_{\alpha} \cos(p_{\alpha})]^2}{[1 - 2\beta \sum_{\alpha} \cos(p_{\alpha})]^2} . \quad (4.56)$$

Vediamo cosa succede vicino al punto di transizione di fase $\beta \sim \frac{1}{2D}$. Il denominatore nell'integrale sarà

$$G_0(p) = \frac{1}{1 - 2\beta \sum_{\alpha} \cos(p_{\alpha})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{D} \sum_{\alpha} \cos(p_{\alpha})} . \quad (4.57)$$

Per $p \sim 0$ avremo

$$\begin{aligned} G_0(p) &\approx \frac{1}{1 - \frac{1}{D} \sum_{\alpha} 1 - \frac{p_{\alpha}^2}{2} + O(p_{\alpha}^4)} = \frac{1}{1 - 2D\beta + \beta \sum_{\alpha} p_{\alpha}^2 + O(p_{\alpha}^4)} = \\ &= \frac{1}{1 - 2D\beta + \beta p^2 + O(p^4)} \xrightarrow{\beta=1/2D} = \frac{1}{\beta p^2 + O(p^4)} \sim \frac{1}{p^2} , \end{aligned} \quad (4.58)$$

cioè sviluppa un polo in $p^2 = 0$ nel punto di transizione di fase $\beta = \frac{1}{2D}$. Quindi avremo a $2D\beta = 1$:

$$B_{k,0} \sim_{k \rightarrow \infty} \int d^4 p \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{k}}}{p^2} \propto k^{2-D} . \quad (4.59)$$

Studiamo il comportamento del calore specifico vicino a $\beta_c = 1/2D$. Abbiamo:

$$C = 2\beta^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{[\sum_{\alpha} \cos(p_{\alpha})]^2}{[1 - 2\beta \sum_{\alpha} \cos(p_{\alpha})]^2} . \quad (4.60)$$

Quando $\beta \approx \frac{1}{2D}$ il contributo maggiore all'integrale viene dalla regione in cui $p \sim 0$, quindi

$$C \sim \int d^4 p \frac{\left(D - \frac{p^2}{2}\right)^2}{(1 - 2\beta D + \beta p^2)^2} . \quad (4.61)$$

- Se $D > 4$ allora

$$C \sim \int \frac{d^4 p}{p^4} \sim \text{cost} . \quad (4.62)$$

- Se $D = 4$ allora:

$$C \sim \int d^4 p \frac{1}{(1 - 2\beta D + \beta p^2)^2} \sim \int d^4 p \frac{1}{(1 - 2\beta D)^2 \left(1 + \frac{\beta p^2}{1 - 2\beta D}\right)^2} \sim -\log(1 - 2\beta D). \quad (4.63)$$

- Se $D < 4$ allora

$$C \sim \int d^4 p \frac{1}{(1 - 2\beta D + \beta p^2)^2} \sim \int p^{D-1} \frac{dp}{p^4} \sim p^{4-D} \sim (1 - 2\beta D)^{\frac{D}{2}-2}. \quad (4.64)$$

Il calore specifico in dimensione $D \leq 4$ diverge al punto di transizione di fase.

Ci aspettiamo che l'approssimazione di campo medio sia una buona approssimazione solo se le prime correzioni sono piccole. Tuttavia questo non è vero vicino al punto critico in dimensione $D \leq 4$ a causa del grande contributo alle fluttuazioni della regione di piccolo p . Un calcolo analogo mostra che le correzioni sono piccole anche nella regione $T < T_c$ se non siamo troppo vicini alla temperatura critica. Come abbiamo detto prima l'approssimazione di campo medio è esatta quando $D \rightarrow \infty$ a $\tilde{\beta} = 2\beta D = \beta/\beta_c$ fissato. Dimostriamo che la funzione di correlazione di 2 spin differenti si annulla a $\tilde{\beta}$ fissato quando $D \rightarrow \infty$ come una potenza di $\frac{1}{D}$.

Calcoliamo la funzione di correlazione a distanza fissata n nel limite $D \rightarrow \infty$. Quindi assumiamo che $i_x - k_x = n$ e $i_\nu = k_\nu$ per $\nu \neq 1$. Avremo

$$B_{ik} = \frac{\beta}{(2\pi)^D} \int d^D p G^0(p) e^{i(\vec{i}-\vec{k})\cdot\vec{p}} = \beta \tilde{G}_0(n), \quad (4.65)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(n) &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p G^0(p) e^{inp_x} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p e^{inp_x} \frac{1}{1 - 2\beta \sum_\alpha \cos(p_\alpha)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \int_0^\infty d\mu \exp \left[-\mu \left(1 - 2\beta \sum_\alpha \cos(p_\alpha) \right) + inp_x \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \int_0^\infty d\mu \exp \left[-\mu \left(1 - \frac{\tilde{\beta}}{D} \sum_\alpha \cos(p_\alpha) \right) + inp_x \right]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Ora

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{z \cos \theta + in\theta} d\theta = I_n(z), \quad (4.67)$$

è la funzione di Bessel di ordine n , e avremo:

$$\tilde{G}_0(n) = \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} \left[I_0 \left(\frac{\mu \tilde{\beta}}{D} \right) \right]^{D-1} I_n \left(\frac{\mu \tilde{\beta}}{D} \right). \quad (4.68)$$

Usiamo ora le seguenti proprietà delle funzioni di Bessel:

$$\begin{aligned} I_0(\lambda) &= 1 - \lambda^2 + O(\lambda^4) , \\ I_n(\lambda) &= \frac{\lambda^n}{n!} + O(\lambda^{n+1}) , \\ I_n(\lambda) &\sim \frac{e^\lambda}{\lambda} \quad \lambda \rightarrow \infty . \end{aligned} \quad (4.69)$$

Ora, a $\tilde{\beta}$ fissato quando $D \rightarrow \infty$, l'integrale è dominato dalla regione d'integrazione in μ vicino $\mu = 0$ se $\frac{\mu\tilde{\beta}}{D} \ll 1$. La regione possibilmente pericolosa $\frac{\mu\tilde{\beta}}{D} \gg 1$ non contribuisce se $\tilde{\beta} \leq 1$ (cioè $\beta \leq \beta_c$).

Per $\tilde{\beta} > 1$ (cioè $\beta > \beta_c$, $T < T_c$) l'integrale in α è divergente, ma per questi valori di $\tilde{\beta}$ siamo nella fase di bassa temperatura in cui l'equazione per $\tilde{G}_0(n)$ non è valida. Quindi

$$\tilde{G}_0(n) \approx \int_0^\infty d\mu e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \left(\frac{\tilde{\beta}}{D}\right)^n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\tilde{\beta}}{D}\right)^n \Gamma(n+1) = \left(\frac{\tilde{\beta}}{D}\right)^n . \quad (4.70)$$

Vediamo ora come si comportano le funzioni di correlazione quando $n \rightarrow \infty$. Abbiamo visto che esattamente a $\beta = \frac{1}{2D} = \beta_c$:

$$\boxed{B_{n,0} \sim n^{2-D} \quad \text{per } n \rightarrow \infty} , \quad (4.71)$$

ovverosia c'è un decadimento a potenza delle funzioni di correlazione.

Vediamo ora cosa succede quando $\beta \neq \beta_c$ ($\beta < \beta_c \rightarrow T > T_c$).

A tale scopo usiamo il seguente teorema: se $f(p)$ è una funzione analitica con periodo 2π e la singolarità più vicina all'asse reale è in $p = ip_s$ abbiamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(p) e^{mp} \approx_{n \rightarrow \infty} e^{-np_s} . \quad (4.72)$$

Ora

$$\tilde{G}_0(n) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{-\pi}^{\pi} dp_x e^{ip_x n} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\alpha=2}^D dp_\alpha \frac{1}{1 - 2\beta \sum_{\alpha} \cos(p_\alpha)} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{ipn} g(p) , \quad (4.73)$$

con

$$g(p) = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\alpha=2}^D dp_\alpha \frac{1}{1 - 2\beta \cos(p) - 2\beta \sum_{\alpha=2}^D \cos(p_\alpha)} , \quad (4.74)$$

la cui singolarità più vicina all'asse reale si ha per (se $2D\beta \sim 1$ e $2D\beta < 1$)

$$1 - 2\beta \cos(p) - 2\beta(D-1) = 0 , \quad (4.75)$$

cioè quando tutti i p_α , $\alpha = 2, \dots, D$ sono vicini a zero. Allora

$$\cos(p) = 1 + \frac{1 - 2\beta D}{2\beta} = \cos(ip_s) = \cosh(p_s) , \quad (4.76)$$

con

$$\begin{aligned}
p_s &= \operatorname{acosh} \left[1 + \frac{1 - 2\beta D}{2\beta} \right] = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Big|_{x=1+\frac{1-2\beta D}{2\beta}} = \\
&= \log \left[1 + \frac{1 - 2\beta D}{2\beta} + \sqrt{\frac{1 - 2\beta D}{2\beta} \left(2 + \frac{1 - 2\beta D}{2\beta} \right)} \right] = \\
&= \log \left[1 + \frac{1 - 2\beta D}{2\beta} + \sqrt{\frac{1 - 2\beta D}{\beta}} \sqrt{1 + \frac{1 - 2\beta D}{4\beta}} \right] \sim \\
&\sim \frac{1 - 2\beta D}{2\beta} + \sqrt{\frac{1 - 2\beta D}{2\beta}} + \frac{(1 - 2\beta D)^{3/2}}{8\beta^{3/2}} \sim \left(\frac{1 - 2\beta D}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Quindi

$$\boxed{p_s \sim \left(\frac{1 - 2\beta D}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}} , \tag{4.78}$$

e

$$B_{n,0} \sim_{n \rightarrow \infty} e^{-n/\xi} \quad \text{per } T > T_c, T \sim T_c, 2\beta D \sim 1 , \tag{4.79}$$

dove

$$\begin{aligned}
\xi^{-1} &\approx \left(\frac{1 - 2\beta D}{\beta} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_c} \right)^{1/2} = (T - T_c)^{1/2} , \\
\xi &\sim (T - T_c)^{-\nu} \quad \text{con } \nu = \frac{1}{2} .
\end{aligned} \tag{4.80}$$

La lunghezza di correlazione diverge alla temperatura critica. In effetti già sappiamo che alla temperatura critica la funzione di correlazione decade come una potenza, cioè molto più lentamente di un esponenziale.

Chapter 5

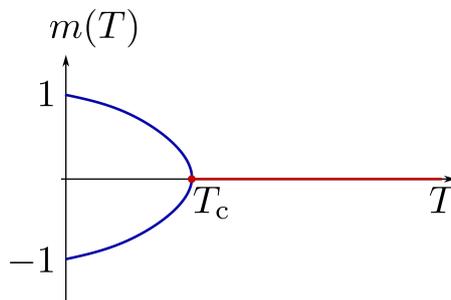
Transizioni di fase del 2° ordine

Abbiamo visto che vicino al punto critico la funzione di correlazione si comporta come

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(n) &\sim e^{-n/\xi} \quad n \rightarrow \infty \quad T > T_c, \\ \tilde{G}_0(n) &\sim n^{2-D} \quad T = T_c, \\ \xi &\sim (T - T_c)^{-\nu} \quad \nu = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

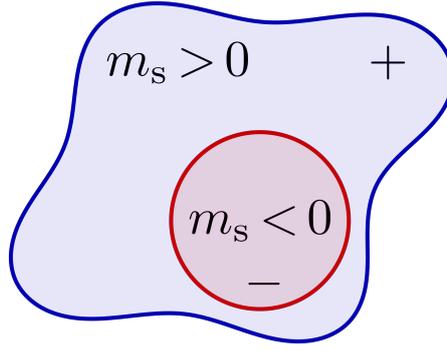
cioè la funzione di correlazione è esponenzialmente smorzata a tutte le temperature tranne alla temperatura critica dove la lunghezza di correlazione ξ va all'infinito. La funzione di correlazione è essenzialmente diversa da zero a distanza ξ solo se il sistema può avere una fluttuazione coerente di taglia ξ . Quindi la lunghezza di coerenza ha il significato del massimo raggio delle fluttuazioni possibili, cioè fluttuazioni di raggio più grande di ξ hanno probabilità esponenzialmente piccola. E' generalmente creduto che in un punto di transizione di fase del 2° ordine la lunghezza di coerenza va all'infinito.

Studiamo cosa accade quando $T \rightarrow T_c$ lungo la linea $h = 0$. Il punto critico $T = T_c$ è il punto finale di una linea di transizioni del 1° ordine. Per $T < T_c$ e



$h = \pm\epsilon$, m salta da $+m_s$ a $-m_s$, con f continua, ma non differenziabile in $h = 0$. Vogliamo dimostrare che se la differenza tra le due fasi (in questo caso le 2 fasi hanno una differente magnetizzazione spontanea $\pm m_s$ va a zero al punto critico, allora la lunghezza di correlazione deve andare all'infinito.

$$\delta m = m_+ - m_- \rightarrow_{T=T_c} 0 \quad \text{allora} \quad \xi \rightarrow_{T=T_c} \infty. \quad (5.2)$$



Consideriamo la possibilità di avere una bolla di grande raggio nella fase $m_s < 0$, mentre il resto del sistema è nella fase $m_s > 0$. La sola parte fuori dall'equilibrio sarà la superficie della sfera. Il contributo all'energia libera che viene dal bordo della sfera è intuitivamente proporzionale $R^{D-1}m_s^\alpha$, $\alpha > 0$. Le fluttuazioni sono permesse fino ad un raggio critico R_c : $f \sim \text{cost.} \sim R_c^{D-1}m_s^\alpha$ quindi fino a $R_c \sim m_s^{-\alpha/(D-1)}$ che chiaramente $\rightarrow \infty$ quando $m_s \rightarrow 0$. In sostanza quando ci avviciniamo al punto critico possiamo avere fluttuazioni coerenti su scale sempre più grandi. Esattamente al punto critico il raggio della fluttuazione diventa infinito e abbiamo che le funzioni di correlazioni decadono a potenza a grandi distanze. Inoltre $T = T_c$ è un punto di transizione di fase del secondo ordine in cui $\xi \rightarrow \infty$.

Il punto critico è quel punto in cui le due soluzioni $m_1, m_2 \rightarrow m = 0$, cioè

$$\left. \frac{d^2\phi}{dm^2} \right|_{m=0} = 0 \rightarrow \chi \sim (\phi'')^{-1} \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Riassumiamo i risultati ottenuti dal campo medio più correzioni

$$\begin{aligned} \xi(T, h)|_{h=0} &\sim |T - T_c|^{-\nu} & \nu_{\text{MF}} &= \frac{1}{2} & \chi(T, h)|_{h=0} &\sim |T - T_c|^{-\gamma} & \gamma_{\text{MF}} &= 1, \\ \tilde{G}(n)|_{T=T_c, h=0} &= n^{2-D-\eta} & \eta_{\text{MF}} &= 0 & C(T, h)|_{h=0} &\sim |T - T_c|^{-\alpha} & \alpha_{\text{MF}} &= D - 4, \\ m(T, h)|_{h=0} &\sim |T - T_c|^\beta & \beta_{\text{MF}} &= \frac{1}{2} & m(T, h)|_{T=T_c} &\sim |h|^{1/\delta} & \delta_{\text{MF}} &= 3. \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.1 Limite di volume infinito

Vogliamo calcolare la densità di energia libera nel limite di volume infinito. Se il problema è ben definito, la densità di energia libera di un sistema in una scatola finita deve avere un limite quando la taglia della scatola va all'infinito e il limite non dovrebbe dipendere dalle condizioni al bordo che abbiamo usato. Vediamo come questo è possibile nel modello di Ising a primi vicini e campo magnetico esterno zero.

Notiamo che l'energia totale di un sistema di N spin soddisfa

$$-DN \leq E \leq DN. \quad (5.5)$$

Il numero di configurazioni è 2^N , quindi la funzione di partizione $Z_N = \sum_{\{S\}} e^{-\beta H[S]}$ soddisfa

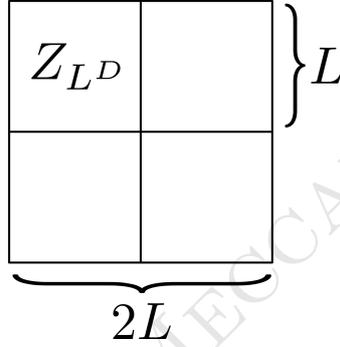
$$2^N e^{-\beta DN} \leq Z_N \leq 2^N e^{\beta DN} , \quad (5.6)$$

quindi l'energia libera soddisferà

$$-\frac{\log 2}{\beta} - D \leq f_N \leq -\frac{\log 2}{\beta} + D . \quad (5.7)$$

Queste disuguaglianze sono molto importanti poiché escludono la possibilità più pericolosa, cioè $f_N \rightarrow \infty$ quando $N \rightarrow \infty$.

Consideriamo il caso di una scatola cubica $N = L^D$ con condizioni al bordo libere e sia Z_{L^D} la corrispondente funzione di partizione. Se prendiamo una scatola di lato $2L$ avremo $Z_{(2L)^D}$.



Ora la differenza tra $Z_{(2L)^D}$ e $(Z_{L^D})^{2^D}$ è solo per i termini al bordo. Il contributo all'energia che viene dagli spin vicino al bordo è al massimo $D(2L)^{D-1}$, quindi

$$(Z_{L^D})^{2^D} \exp [-\beta D(2L)^{D-1}] \leq Z_{(2L)^D} \leq (Z_{L^D})^{2^D} \exp [\beta D(2L)^{D-1}] , \quad (5.8)$$

da cui

$$\begin{aligned} 2^D \log Z_{L^D} - D\beta(2L)^{D-1} &\leq \log Z_{(2L)^D} \leq 2^D \log Z_{L^D} + D\beta(2L)^{D-1} , \\ \rightarrow -D\beta(2L)^{D-1} &\leq \log Z_{(2L)^D} - 2^D \log Z_{L^D} \leq D\beta(2L)^{D-1} . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dividendo per $\beta(2L)^D$ troviamo:

$$\begin{aligned} -\frac{D}{2L} &\leq \frac{1}{\beta(2L)^D} (\log Z_{(2L)^D} - 2^D \log Z_{L^D}) \leq \frac{D}{2L} , \\ \rightarrow |f_{2L} - f_L| &\leq \frac{C}{L} , \end{aligned} \quad (5.10)$$

dove C è una costante indipendente da L . Di conseguenza esiste il limite della successione $f_{2^n L}$ per $n \rightarrow \infty$.

FLAVIANO MORONE - MECCANICA STATISTICA

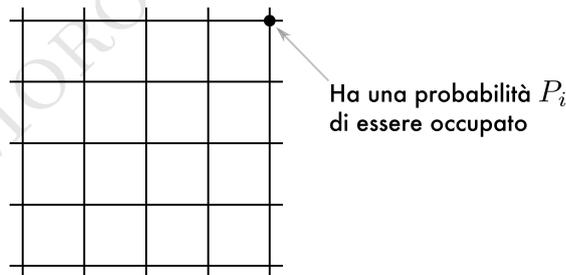
Chapter 6

Introduzione ai sistemi disordinati

6.1 Meccanismo per la creazione del disordine

- Transizione ordine-disordine attraverso la condensazione di difetti topologici.
- Creazione di disordine attraverso **diluizione**.
- Creazione di disordine attraverso campi magnetici aleatori.
- Creazione di disordine attraverso lo staccamento di domain-wall e altre fluttuazioni superficiali.
- Creazione di disordine attraverso **frustrazione**.

Consideriamo un esempio di sistema diluito. Prendiamo un reticolo di spin e assegnamo ad ogni sito una certa probabilità P_i di essere occupato o vuoto.



- Se $P_i = 1 \forall i$ avremo il modello di Ising.
- $P_i < 1$ avremo un modello di sistema diluito.

L'hamiltoniano sarà del tipo

$$H = - \sum' \sigma_i \sigma_j \epsilon_i \epsilon_j, \quad \epsilon = 0, 1. \quad (6.1)$$

Si può dimostrare che esiste una certa probabilità critica P_c tale che per $P \geq P_c$ compare un cluster di infiniti siti occupati (il sistema diventa percolante). La

percolazione è un caso speciale del **modello di Potts**, una generalizzazione del modello di Ising, in cui la variabile σ_i può prendere q valori $\sigma_i = 0, \dots, q - 1$.

Un altro esempio di sistema disordinato è il modello di Ising in campo magnetico aleatorio (RFIM), in cui $H = -J \sum' S_i S_j - \sum h_i S_i$ con $h_i : P(h_i) = \frac{1}{2}$. In questo modello la dimensione critica inferiore è $D_c^L = 2$. Inoltre un modello RFIM in D dimensioni coincide con un modello di Ising ordinario (in campo magnetico zero) in $D - 2$ dimensioni.

6.2 Frustrazione

Questo meccanismo è fondamentale dello studio di vetri di spin e vetri reali. Come esempio di sistema completamente frustrato consideriamo un antiferromagnete su un reticolo triangolare bidimensionale. Ai vertici di ciascun triangolo ci sono spin di Ising che sentono un'interazione di scambio antiferromagnetica. Indipendentemente da come gli spin sono orientati, ci sono due vertici in ciascuno triangolo con la proprietà che gli spin in quei vertici ricevono istruzioni conflittuali sul fatto di essere up o down. Come risultato ci sono molti stati fondamentali o stati quasi

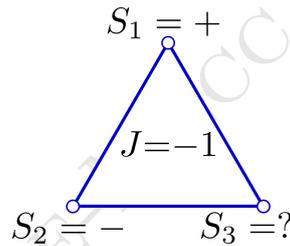


Figure 6.1: In sostanza ci sarà sempre almeno un legame non soddisfatto.

degeneri con lo stato fondamentale in questo sistema, che causano una violazione della 3^a legge della termodinamica, cioè l'entropia residua a temperatura zero è strettamente positiva. Se consideriamo il triangolo precedente avremo $E_{\min} = -1$ ($E_{\min} = -3$ per un ferromagnete) sia che $? = +$ che $? = -$ e avremo quindi due stati fondamentali degeneri, cosicché $S(T = 0) > 0$.

Un sistema tipico con **frustrazione random** è un **vetro di spin**.

Prendiamo un reticolo in \mathbb{Z}^D , cioè $n_{x_1} = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty, \dots, n_{x_D} = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty$. Ad ogni sito del reticolo è attaccato uno spin di Ising $\sigma_i = \pm 1$. Due spin σ_i, σ_j interagiscono attraverso una forza di scambio di intensità J_{ij} e J_{ij} è una variabile aleatoria con una distribuzione $d\rho(J_{ij})$ tale che il supporto di $d\rho$ non è interamente contenuto nel semiasse positivo (cioè $d\rho$ prende valori sia per $J > 0$ che $J < 0$). Ad esempio potremo prendere

$$J_{ij} = \pm 1 \quad \text{con probabilità} \frac{1}{2}, \quad (6.2)$$

oppure

$$d\rho(J_{ij}) = e^{-J_{ij}^2} dJ_{ij}. \quad (6.3)$$

6.3 Plaquette

Definiamo plaquette una regione del reticolo contenuta in un cammino chiuso elementare sul reticolo. Definiamo $J_{\mathcal{P}}$ la quantità

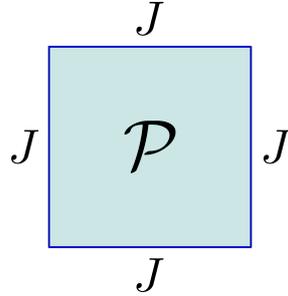


Figure 6.2: Plaquette.

$$J_{\mathcal{P}} \equiv \prod_{(i,j) \in \partial \mathcal{P}} J_{ij} , \quad (6.4)$$

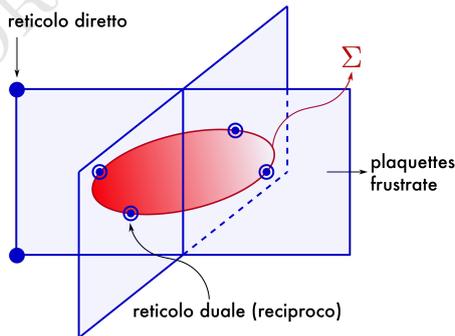
e

$$\tau_{\mathcal{P}} = \text{sign}(J_{\mathcal{P}}) . \quad (6.5)$$

Una plaquette per la quale $\tau_{\mathcal{P}} = -1$ è detta frustrata. Sia \square un cubo unitario in \mathbb{Z}^D . Avremo che

$$\prod_{\mathcal{P} \in \partial \square} \tau_{\mathcal{P}} = 1 , \quad (6.6)$$

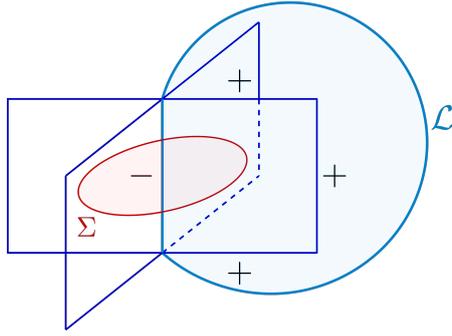
(infatti le facce di un cubo sono pari). Quindi le plaquettes per le quali $\tau_{\mathcal{P}} = -1$ sono duali a ipersuperfici chiuse, Σ , di dimensione $D - 2$. Ad esempio in $D = 3$ sono duali a cammini chiusi (loop).



Ora, su ogni loop \mathcal{L} (del reticolo diretto) che gira intorno a Σ c'è qualche sito j tale che lo spin in j riceve istruzioni conflittuali dai suoi vicini sul fatto di essere up o down.

Consideriamo il caso $h = 0$. In questo caso le configurazioni delle costanti di scambio $\{J_{ij}\}$ si dividono in classi di equivalenza. Due configurazioni J e J' sono equivalenti se e solo se esiste $\alpha = \{\alpha_j\} : \alpha_j \in \{-1, 1\}$ tale che

$$J'_{ij} = \alpha_i J_{ij} \alpha_j . \quad (6.7)$$



Se facciamo il cambio di variabili

$$\boxed{\sigma'_j = \alpha_j \sigma_j}, \quad (6.8)$$

avremo

$$\sum' \sigma'_i J'_{ij} \sigma'_j = \sum' \sigma_i \alpha_i \alpha_j J_{ij} \alpha_j \alpha_j \sigma_j = \sum' \sigma_i J_{ij} \sigma_j, \quad (6.9)$$

cioè due sistemi con costanti di scambio equivalenti sono completamente equivalenti (cioè hanno la stessa energia) per $h = 0$, ovvero descrivono la stessa fisica.

Le trasformazioni precedenti sono dette trasformazioni di gauge. Le quantità $J_{\mathcal{P}}$ e $\tau_{\mathcal{P}}$ sono invarianti sotto trasformazioni di gauge. Quindi la frustrazione è invariante di gauge. Ora poiché sistemi collegati gli uni agli altri da trasformazioni di gauge sono equivalenti (finché $h = 0$) è conveniente introdurre funzioni di correlazione invarianti di gauge.

Sia Γ_{ij} un cammino in \mathbb{Z}^D che parte dal sito i e arriva al sito j . Definiamo la funzione di correlazione C del cammino Γ come

$$\boxed{C(\Gamma_{ij}) = \sigma_i \left(\prod_{k,l \in \Gamma_{ij}} J_{kl} \right) \sigma_j}. \quad (6.10)$$

In particolare

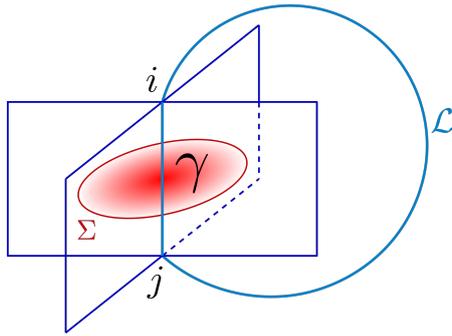
$$C(\langle i, j \rangle) = \sigma_i J_{ij} \sigma_j. \quad (6.11)$$

Sia Σ una superficie $D - 2$ dimensionale duale alle plaquettes frustrate e sia \mathcal{L} un loop arbitrario concatenato con Σ . Allora

$$\boxed{\prod_{\langle i, j \rangle \in \mathcal{L}} C(\langle i, j \rangle) = \prod_{\langle i, j \rangle \in \mathcal{L}} J_{ij} < 0}. \quad (6.12)$$

Quindi Σ è il bordo di un **domain wall** (parete) γ di dimensione $D - 1$ con la proprietà che per ogni legame $\langle i, j \rangle$ duale a γ :

$$C(\langle i, j \rangle) < 0. \quad (6.13)$$



Nel caso di interazioni a primi vicini, l'energia totale di una configurazione di domain walls $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ è data da:

$$H[\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}] = \sum_n E(\gamma_n) , \quad (6.14)$$

con

$$E(\gamma_n) = 2 \sum_{\langle i,j \rangle \text{ duale a } \gamma_n} |J_{ij}| . \quad (6.15)$$

Data una configurazione $\{J, \sigma\}$ e una equivalente $\{J', \sigma'\}$ queste sono descritte dagli stessi domain wall. In altre parole ogni classe di equivalenza di costanti di scambio J determina un'unica configurazione di superfici $D - 2$ dimensionali $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ duali a plaquettes frustrate che sono bordi di domain-wall. Il problema di calcolare l'energia dello stato fondamentale di un vetro di spin consiste nello scegliere domain-wall $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ in modo tale che

$$H[\{\gamma_1, \gamma_2, \dots\}] \text{ e' minima date } \Sigma_1, \Sigma_2, \dots \quad (6.16)$$

In generale ci saranno molti stati le cui energie sono quasi identiche all'energia dello stato fondamentale, poiché la scelta dei domain-wall non è unica data una piccola incertezza sull'energia. Ci si può aspettare che l'entropia a temperatura zero sia positiva o almeno che cresca molto rapidamente vicino $T = 0$ e che a basse temperature ci sia un'enormità di stati metastabili di vita media molto lunga collegati a configurazioni la cui energia è molto vicina all'energia di stato fondamentale, ma separate dallo stato fondamentale da barriere di energia molto alta.

Consideriamo un esempio bidimensionale con un **grafo planare**.

- le superfici Σ sono 0-dimensionali, ossia punti (i siti del reticolo duale).
- γ sono i link del reticolo duale.

Trovare lo **stato fondamentale** equivale a trovare il cammino più breve che unisce le plaquettes frustrate a due a due

$$E(\gamma_n) = -2 \sum_{\langle i,j \rangle \text{ duale a } \gamma} |J_{ij}| + \Lambda , \quad (6.17)$$

$$\Lambda \equiv \sum |J_{ij}| .$$

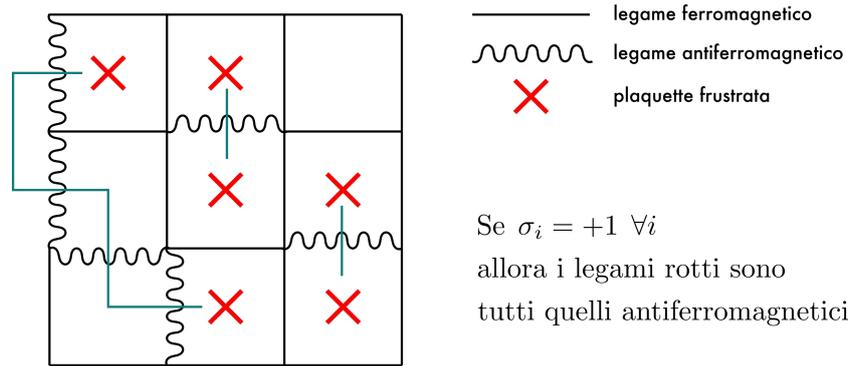


Figure 6.3: I legami rotti uniscono le plaquettes frustrate

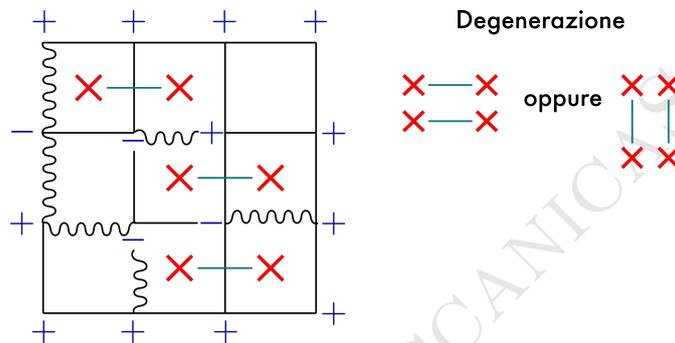


Figure 6.4: In questo caso lo stato fondamentale ha energia $E = 18$ e una degenerazione 2.

Consideriamo ora il seguente sistema diluito ad $h \neq 0$ su reticolo cubico D -dimensionale descritto dall'hamiltoniano:

$$H = - \sum' \sigma_i J_{ij} \sigma_j - h \sum \sigma_i, \quad (6.18)$$

con $\sigma_i = \pm 1$ e

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{con prob. } (1-p) \\ 1 & \text{con prob. } p \end{cases}. \quad (6.19)$$

Per $h \neq 0$ **non ci sono transizioni di fase**. Mettiamoci per il momento ad $h = 0$ e vediamo come evolve $T_c(p)$, cioè la temperatura critica in funzione della probabilità p . Ovviamente $T_c(1) = T_c^{\text{ISING}} = T_c^{\text{PURE}}$. Se $p < p_c$ dove $p_c \equiv$ probabilità di percolazione di legame D -dimensionale, allora

$$T_c(p < p_c) = 0. \quad (6.20)$$

Inoltre si verifica che

$$T_c(p) < p T_c(1). \quad (6.21)$$

Nella fase disordinata $T > T_c(p)$, ma $T < T_c(1)$, si hanno le cosiddette **singolarità di Griffiths** (ma non transizioni di fase), cioè l'espansione ad alta T diverge.

Diagramma di fase del ferromagnete diluito

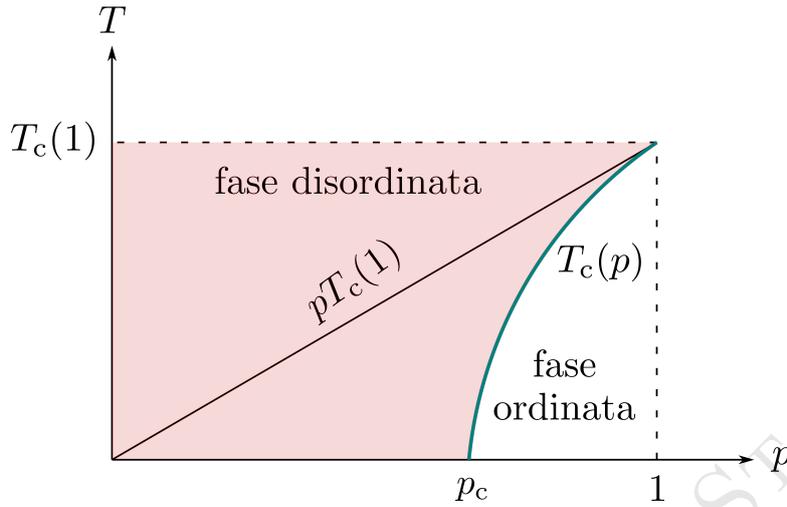


Figure 6.5: Diagramma di fase del ferromagnete diluito.

- Per $T > T_c(1)$ l'espansione ad alta T converge.
- Per $T < T_c(p)$ abbiamo la fase ordinata, ovverosia la possibilità di transizioni di fase. Inoltre quando T passa attraverso $T_c(p)$ la transizione è continua (ma gli esponenti critici possono cambiare –**criterio di Harris**–).

Consideriamo ora il RFIM descritto dall'hamiltoniano:

$$H = - \sum \sigma_i \sigma_j - \sum h_i \sigma_i, \quad (6.22)$$

con $h_i = \pm \epsilon$ con probabilità $p = \frac{1}{2}$ oppure $P(h_i) \approx e^{-h_i^2}$. Assumiamo che

$$\bar{h}_i = 0, \quad \bar{h}_i^2 = h^2. \quad (6.23)$$

6.4 Criterio di Harris e criterio di Harris esteso

Vogliamo studiare l'effetto dell'aggiunta di una piccola quantità di disordine in un sistema che esibisce una normale transizione del secondo ordine. Il disordine potrebbe essere irrilevante, nel qual caso il sistema continuerà a esibire il comportamento critico puro; oppure il disordine potrebbe essere rilevante, portando il sistema verso qualche nuovo comportamento, come una transizione del secondo ordine con esponenti critici nuovi. Il criterio di Harris nasce quindi dall'esaminare se è consistente per il sistema disordinato esibire una transizione del secondo ordine con esponenti puri, in particolare con l'esponente ν della lunghezza di correlazione pura. Quando il criterio fallisce ci aspettiamo che si verifichino nuovi comportamenti. In effetti si potrebbe dimostrare che il passaggio ad un nuovo

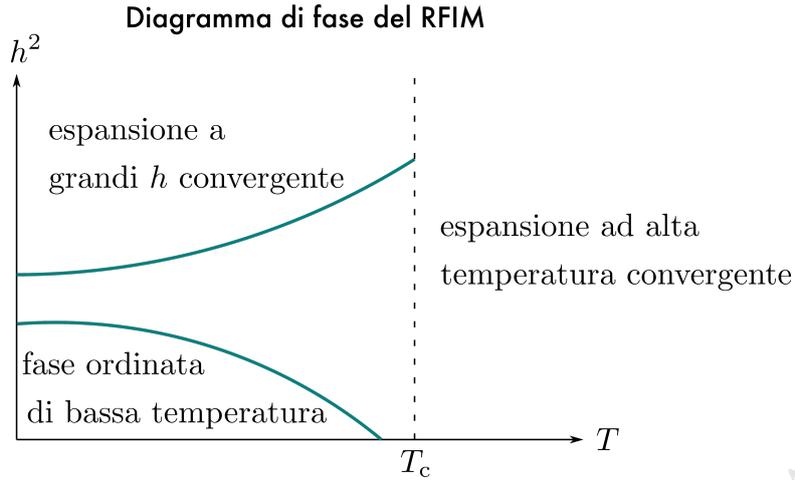


Figure 6.6: Diagramma di fase del ferromagnete in campo aleatorio

comportamento capita esattamente al punto in cui la transizione pura non è più consistente.

Enunciato— Consideriamo un sistema D -dimensionale e sia ν l'esponente critico della lunghezza di correlazione pura, cioè

$$\xi \sim_{T \rightarrow T_c} (T - T_c)^{-\nu} . \quad (6.24)$$

- Se $\nu < \frac{2}{D}$ il comportamento del sistema disordinato (diluito) è diverso da quello del sistema puro (ad esempio avremo una transizione del 2° ordine con esponenti critici diversi).
- Se $\nu \geq \frac{2}{D}$ il disordine è irrilevante e il sistema continuerà ad esibire il comportamento critico puro.

Alternativamente, sia

$$C_V \sim_{T \rightarrow T_c} |T - T_c|^{-\alpha} . \quad (6.25)$$

Dalla teoria dell'iperscaling:

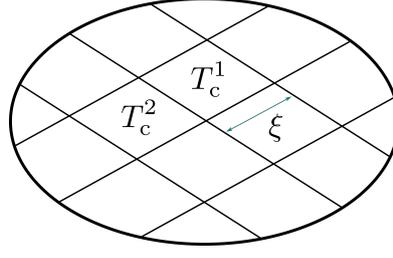
$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - D\nu , \\ \nu &= \frac{2 - \alpha}{D} . \end{aligned} \quad (6.26)$$

- Se $\alpha < 0$ il disordine è irrilevante.
- Se $\alpha > 0$ il disordine è rilevante (in particolare C_V diverge per $T \rightarrow T_c$).

Originariamente Harris derivò il criterio per il caso di un sistema con una temperatura critica locale efficace $T_c(\vec{x})$ con correlazioni solo a corto raggio nel disordine, cosicché $g(\vec{x})$ decresceva rapidamente con la distanza, dove

$$g(\vec{x} - \vec{y}) = \langle T_c(\vec{x})T_c(\vec{y}) \rangle_{\text{av}}^{\text{connessa}} \equiv \langle T_c(\vec{x})T_c(\vec{y}) \rangle_{\text{av}} - \langle T_c \rangle_{\text{av}}^2 , \quad (6.27)$$

con $\langle \dots \rangle_{\text{av}}^c$ la media connessa sulle impurezze.



Estendiamo ora l'argomento al caso di correlazioni a lungo raggio nel disordine che decrescono con una legge di potenza $g(\vec{x}) \sim |\vec{x}|^{-a}$ per grandi $|\vec{x}|$. Vogliamo, quindi, determinare se è consistente per il sistema esibire una transizione del secondo ordine con l'esponente critico puro della lunghezza di correlazione ν . A tale fine supponiamo di dividere il sistema in regioni di dimensioni lineari ξ , dove ξ è la lunghezza di correlazione del sistema puro. Ci chiediamo, allora, se la variazione nelle temperature critiche delle varie regioni diventa trascurabile quando $T \rightarrow T_c$. Ci aspettiamo che gli spin saranno ben correlati fino a distanze di ordine ξ , così prendiamo la temperatura di transizione di una regione di taglia ξ come la media di $T_c(\vec{x})$ sulla data regione. Definiamo la temperatura ridotta

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (6.28)$$

e la temperatura ridotta locale

$$t(\vec{x}) = \frac{T - T_c(\vec{x})}{T_c}, \quad (6.29)$$

cosicché avremo

$$\langle t(\vec{x}) \rangle_{\text{av}} = t \quad T_c = \langle T_c(\vec{x}) \rangle_{\text{av}}, \quad (6.30)$$

e la temperatura ridotta efficace di una regione

$$t_V = \frac{1}{V} \int_V d^D x t(\vec{x}) \quad \text{con } V = \xi^D. \quad (6.31)$$

La varianza di t_V sarà:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &\equiv \langle (t_V)^2 \rangle_{\text{av}}^{\text{conn}} = \frac{1}{V^2} \int_V d^D x \int_V d^D y \langle t(\vec{x}) t(\vec{y}) \rangle_{\text{av}}^{\text{conn}} = \\ &= \frac{1}{V^2} \frac{1}{T_c^2} \int_V d^D x \int_V d^D y g(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{\xi^D}{V^2 T_c^2} \int_V d^D x g(\vec{x}) = \\ &= \frac{\xi^D}{V^2 T_c^2} \Omega_D \int_V x^{D-1} g(x) dx \sim \xi^{-D} \int_0^\xi x^{D-1} g(x) dx, \end{aligned} \quad (6.32)$$

avendo assunto che $g(\vec{x}) = g(|\vec{x}|)$ è isotropa. Riassumendo:

$$\Delta^2 \sim \xi^{-D} \int_0^\xi x^{D-1} g(x) dx. \quad (6.33)$$

Prendendo $g(x) \sim x^{-a}$ per grandi x e T vicino a T_c , cosicché ξ è grande, avremo approssimativamente:

$$\Delta^2 \sim \xi^{-D} \int_0^\xi x^{D-1-a} dx, \quad (6.34)$$

quindi

$$\Delta^2 \sim \begin{cases} \xi^{-D} \text{cost} & a > D \\ \xi^{-D} \log \xi & a = D \\ \xi^{-D} \xi^{D-a} & a < D \end{cases}. \quad (6.35)$$

Vogliamo vedere se la variazione delle temperature critiche nelle varie regioni diventa trascurabile quando $T \rightarrow T_c$, nel qual caso il disordine sarà irrilevante e il comportamento del sistema disordinato sarà lo stesso del sistema puro. In altre parole una transizione del secondo ordine pura sarà consistente se

$$\frac{\Delta^2}{t^2} \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0. \quad (6.36)$$

Ora $\xi \sim t^{-\nu}$, cosicché

$$\frac{\Delta^2}{t^2} \sim \begin{cases} t^{D\nu-2} & a > D \\ t^{D\nu-2} \log t^{-\nu} & a = D \\ t^{a\nu-2} & a < D \end{cases}. \quad (6.37)$$

Quindi per la stabilità del comportamento critico del sistema puro dobbiamo avere

- impurezze poco correlate: $a \geq D$, $D\nu - 2 > 0$, allora $\nu > \frac{2}{D}$, ossia $D\nu - 2 = -\alpha > 0$ e quindi $\alpha < 0$.
- impurezze molto correlate $a < D$, $a\nu - 2 > 0$.

Per $a \geq D$ ritroviamo il criterio di Harris originale a corto raggio. In questo caso la coda a lungo raggio di $g(x)$ è irrilevante. Comunque per $a < D$ il fatto che $g(x)$ è a lungo raggio porta a nuove richieste per la stabilità del sistema puro. Inoltre per $a < D$:

$$a\nu - 2 < D\nu - 2, \quad (6.38)$$

cosicché questa nuova condizione $a\nu - 2 > 0$ è più stringente di quella originale $D\nu - 2 > 0$.

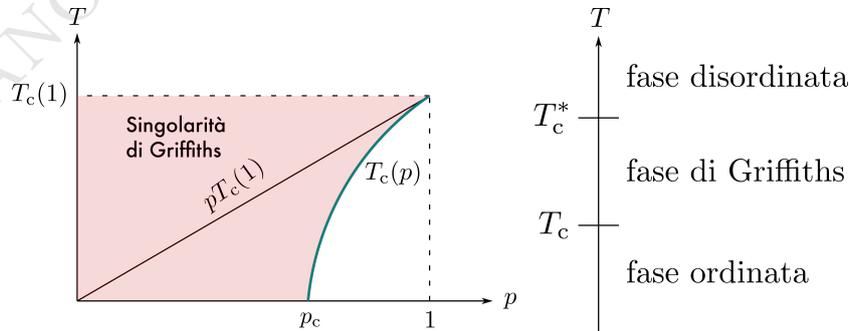
Chapter 7

Singularità di Griffiths

Vogliamo dimostrare che in un ferromagnete di Ising diluito in modo random (con diluizione $p < 1$) la magnetizzazione m è una funzione **non analitica** del campo h ad $h = 0$ in un range di temperature sopra quella in cui la magnetizzazione spontanea appare per la prima volta ($T_c(p)$).

Diciamo innanzitutto che il punto critico di un ferromagnete semplice rappresenta una terminazione della transizione di fase del primo ordine indicata dalla presenza della magnetizzazione spontanea e sopra la temperatura critica T_c dove questa magnetizzazione spontanea scompare, l'energia libera è una funzione analitica della temperatura T e del campo magnetico h . Cioè per $T > T_c$ non c'è transizione di "ordine superiore" che rappresenti una continuazione della transizione del primo ordine per $T < T_c$. Voglio dimostrare che nel caso di ferromagneti di Ising diluiti questo è falso e la temperatura T_c^* dove inizia la non analiticità quando T decresce è definitivamente superiore a $T_c (= T_c(p))$.

In un ferromagnete diluito casualmente (con diluizione p) solo una frazione dei siti del reticolo sono occupati con spin di Ising, i restanti sono vuoti e le interazioni di scambio esistono solo tra spin su coppie vicine di siti occupati. La probabilità p di occupazione di un dato sito è indipendente da h, T e dall'occupazione di altri siti. È piuttosto ben stabilito che $T_c(p)$ per un ferromagnete diluito varia con p . Inoltre



$$T_c(p) < pT_c(1) , \tag{7.1}$$

e

$$T_c(p) = 0 \quad \text{per} \quad p < p_c , \tag{7.2}$$

dove p_c è la soglia di percolazione di legame D -dimensionale.

Consideriamo una scatola Λ in \mathbb{Z}^D con condizioni periodiche al bordo e prendiamo l'hamiltoniano di un magnete in Λ della forma:

- **diluizione di sito:**

$$H = - \sum_{i,j} \sigma_i J_{ij} \sigma_j + h \sum_i \sigma_i \tau_i , \quad (7.3)$$

con

$$J_{ij} = \begin{cases} J \tau_i \tau_j & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} , \quad (7.4)$$

e

$$\begin{aligned} \tau_i = 1 & \quad \text{con } P(\tau_i = 1) = p \\ \tau_i = 0 & \quad \text{con } P(\tau_i = 0) = 1 - p \end{aligned} . \quad (7.5)$$

- **diluizione di legame:**

$$H = - \sum_{i,j} \sigma_i J_{ij} \sigma_j + h \sum_i \sigma_i , \quad (7.6)$$

con

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } |i - j| > 1 \\ 1 & \text{con prob. } p , |i - j| = 1 \\ 0 & \text{con prob. } (1 - p) , |i - j| = 1 \end{cases} . \quad (7.7)$$

Per questo sistema vogliamo mostrare che quando $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^D$ e per $T < T_c(1)$, ma T non troppo piccola, l'asse immaginario nel piano complesso h contiene una singolarità ad $h = 0$ (ed è presumibilmente pieno di singolarità), ma la magnetizzazione spontanea si annulla quando $h = 0$ lungo l'asse reale (anzi la magnetizzazione potrebbe essere C^∞ in h ad $h = 0$ in questa situazione).

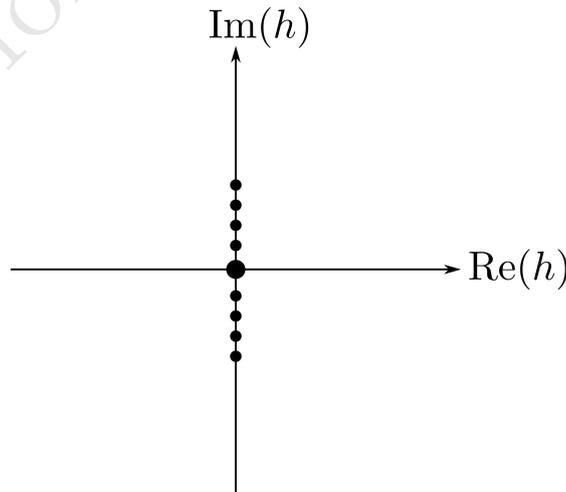
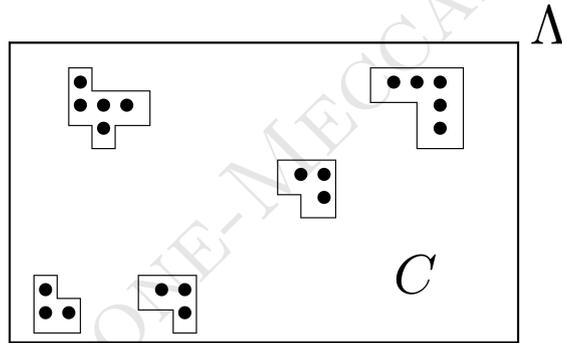


Figure 7.1: C'è una singolarità ad $h = 0$ nel piano complesso h ma la magnetizzazione non salta (cioè si annulla quando $h \rightarrow 0$ lungo l'asse reale).

7.1 Calcolo della magnetizzazione

Mettiamoci nel caso di diluizione di sito e chiamiamo j un sito occupato se e solo se $\tau_j = 1$, altrimenti è detto vuoto. Chiamiamo:

- $C \equiv$ configurazione arbitraria di siti occupati in Λ – possiamo pensare ad un singolo cluster di siti occupati o ad una famiglia di cluster connessi disgiunti di siti occupati (**def:** un **cluster connesso** \tilde{C} è un gruppo di ν siti occupati con la proprietà che tutti i siti contenuti in \tilde{C} sono connessi gli uni agli altri da legami a primi vicini e nessuno è connesso a primi vicini ad un sito che non appartiene \tilde{C}).
- $|C| \equiv$ numero di siti appartenenti a C .
- $P_{C,\Lambda} \equiv$ probabilità di occorrenza di C (ossia la probabilità di ottenere C mediante la percolazione di sito) calcolata con la probabilità p .
- $M_\Lambda \equiv$ magnetizzazione media per sito in Λ .
- $M_C \equiv$ magnetizzazione media per sito in C .



La magnetizzazione media per sito in Λ è:

$$M_\Lambda = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{C \in \Lambda} M_C |C| P_{C,\Lambda} . \quad (7.8)$$

Se indichiamo con $[C]$ tutte le possibili configurazioni in assoluto e con $\{C_p\}$ l'insieme di tutte le possibili configurazioni ottenibili riempiendo con probabilità p , avremo:

$$\sum_{C \in \Lambda} = \sum_{[C]_\Lambda} = \sum_{\cup_{p \in [0,1]} \{C_p\}_\Lambda} , \quad (7.9)$$

e

$$P_{C,\Lambda} = \frac{1}{N_{\{C_p\}}} \sum_{\{C_p\}} \delta[C - C_p] . \quad (7.10)$$

Allora

$$M_\Lambda = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{[C]_\Lambda} M_C |C| \frac{1}{N_{\{C_p\}}} \sum_{\{C_p\}} \delta[C - C_p] = \frac{1}{N_{\{C_p\}}} \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\{C_p\}} M_{C_p} |C_p| . \quad (7.11)$$

Inoltre

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{[C]_\Lambda} |C| P_{C,\Lambda} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{[C]} |C| \frac{1}{N_{\{C_p\}}} \sum_{\{C_p\}} \delta[C-C_p] = \frac{1}{|\Lambda| N_{\{C_p\}}} \sum_{\{C_p\}} |C_p| = \frac{|C_p|}{|\Lambda|} = p. \quad (7.12)$$

-----*/

Chiamiamo

$$z = e^{-2\beta h}, \quad (7.13)$$

e sia f_C l'energia libera per sito ristretta alla configurazione C , cioè

$$f_C = -\frac{1}{\beta|C|} \log Z_C. \quad (7.14)$$

Avremo

$$M_C = \frac{\partial f_C}{\partial h} = \frac{\partial f_C}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial h} = -2\beta z \frac{\partial f_C}{\partial z}. \quad (7.15)$$

Scrivendo

$$e^{-\beta h \sigma_i} = e^{\beta h} e^{-\beta h(\sigma_i+1)}, \quad (7.16)$$

e sommando su tutti i valori di σ_i , $i \in C$, si vede facilmente che $e^{-\beta h|C|} Z_C$ è un polinomio in z di grado $|C|$. Quindi avremo che

$$Z_C = \text{cost } z^{-\frac{|C|}{2}} \prod_{\alpha=1}^{|C|} (z - \zeta_\alpha(C)), \quad (7.17)$$

dove $\zeta_\alpha(C)$ è l' α -esimo zero di Z_C .

Ora, il teorema di Lee e Yang ci dice che

$$|\zeta_\alpha(C)| = 1 \quad \forall \alpha, \quad (7.18)$$

quindi avremo

$$\begin{aligned} M_C &= -2\beta z \frac{\partial}{\partial z} f_C = -2\beta z \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\beta|C|} \right) \log \left[\text{cost } z^{-\frac{|C|}{2}} \prod_{\alpha=1}^{|C|} (z - \zeta_\alpha(C)) \right] = \\ &= \frac{2z}{|C|} \left[-\frac{|C|}{2z} + \sum_{\alpha=1}^{|C|} \frac{1}{z - \zeta_\alpha(C)} \right] = -1 + \frac{2z}{|C|} \sum_{\alpha=1}^{|C|} \frac{1}{z - \zeta_\alpha(C)}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

e quindi

$$\begin{aligned} M_\Lambda &= -p + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{C \subset \Lambda} 2z P_{C,\Lambda} \sum_{\alpha=1}^{|C|} \frac{1}{z - \zeta_\alpha(C)} = \\ &= -p + 2z \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{C \subset \Lambda} \sum_{\alpha=1}^{|C|} P_{C,\Lambda} \frac{1}{z - \zeta_\alpha(C)} = \\ &= -p + 2z \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{a=1}^{N_\Lambda} \sum_{C: \zeta_\alpha(C) = \zeta_a \text{ per qualche } \alpha} P_{C,\Lambda} m_a(C) \frac{1}{z - \zeta_a}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

cioè invece di sommare su tutti gli zeri di una configurazione e poi sommare sulle configurazioni sommiamo prima su tutte le configurazioni che hanno un dato zero con la sua molteplicità e poi su tutti gli zeri diversi. Quindi

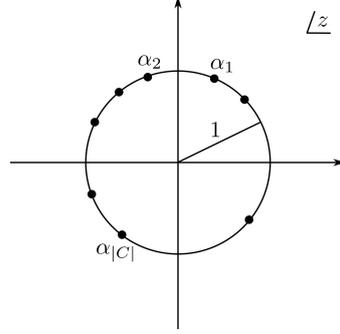


Figure 7.2: Elenco tutti gli zeri diversi in tutte le configurazioni e sommo su tutti gli zeri diversi e su tutte le configurazioni con il vincolo che gli zeri $\zeta_\alpha(C)$ della configurazione C siano uguali a ζ_α per qualche α . Sommando su tutti gli zeri diversi automaticamente si sommano anche tutti gli zeri di ogni configurazione.

$$M_\Lambda = -p + 2z \sum_{a=1}^{N_\Lambda} \eta_a \frac{1}{z - \zeta_a}, \quad (7.21)$$

dove

$$\eta_a = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{C: \zeta_\alpha(C) = \zeta_a \text{ per qualche } \alpha} P_{C,\Lambda} m_a(C) > 0, \quad (7.22)$$

dove N_Λ è il numero di zeri diversi; $m_a(C)$ è il numero di volte che ζ_a compare nell'insieme $\{\zeta_\alpha(C)\}_{\alpha=1}^{|C|}$.

Inoltre

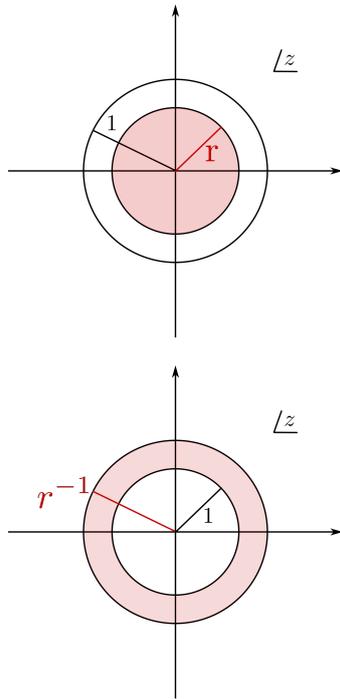
$$\sum_{a=1}^{N_\Lambda} \eta_a(\Lambda) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{C \subset \Lambda} \sum_{\alpha=1}^{|C|} P_{C,\Lambda} = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{C \subset \Lambda} P_{C,\Lambda} |C| = p. \quad (7.23)$$

Da M_Λ e $\sum_{a=1}^{N_\Lambda} \eta_a(\Lambda) = p$ possiamo concludere che, per $|z| \neq 1$, $M_\Lambda(z)$ è **limitata uniformemente in Λ** . Infatti, prendiamo $|z| \neq 1$ e consideriamo un cerchio di raggio $r < 1$. Avremo

$$|M_\Lambda| = \left| -p + 2z \sum_{a=1}^{N_\Lambda} \eta_a \frac{1}{z - \zeta_a} \right| \leq p + 2|z| \sum_{a=1}^{N_\Lambda} \eta_a \frac{1}{|z - \zeta_a|} \leq p + \frac{2pr}{1-r}. \quad (7.24)$$

Se $|z| > 1$ consideriamo un cerchio di raggio $\frac{1}{r} > 1$, avremo:

$$\begin{aligned} |M_\Lambda| &= p + 2|z| \sum_{a=1}^{N_\Lambda} \eta_a \frac{1}{|z - \zeta_a|} \leq p + 2|z| \sum_{a=1}^{N_\Lambda} \eta_a \frac{1}{\left| |z| - |\zeta_a| \right|} = \\ &= p + \frac{2|z|p}{|z| - 1} = p + \frac{2p}{1 - \frac{1}{|z|}} \leq p + \frac{2p}{1-r}. \end{aligned} \quad (7.25)$$



Quindi

$$|M_\Lambda| \leq p + \frac{2p}{1-r} \quad \forall |z| \neq 1, r < 1. \quad (7.26)$$

Ora per z positivi e $z \neq 1$, $M_\Lambda(z)$ converge a un limite quando $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^D$ poiché il limite termodinamico dell'energia libera quenched, $f_\Lambda(z)$, con condizioni periodiche al bordo, esiste per z positivi e inoltre vale

$$M_\Lambda(z) = -2\beta z \frac{\partial f_\Lambda}{\partial z} \quad z > 0, z \neq 1. \quad (7.27)$$

7.1.1 Teorema di Vitali

Sia $\{f_n(z)\}$ una successione di funzioni analitiche in una regione D e sia $|f_n(z)| \leq M \forall n, z \in D$. Supponiamo che $f_n(z)$ tenda a un limite quando $n \rightarrow \infty$ in un insieme di punti che ha un punto limite in D . Allora $f_n(z)$ tende uniformemente ad un limite in ogni regione limitata da un cammino interno a D e il limite è una **funzione analitica**.

Nell'applicazione del teorema di Vitali avremo

- $\{M_\Lambda(z)\}$ è una successione di funzioni analitiche nella regione $D = \mathbb{C} - \{z : |z| = 1\}$.
- $|M_\Lambda(z)| \leq C \forall \Lambda, z \in D$.
- $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} M_\Lambda(z)$ esiste per $z > 0$ e $z \neq 1$ e vale

$$M(z) = -2\beta z \frac{\partial f_\infty}{\partial z} \quad z > 0, z \neq 1, \quad (7.28)$$

quindi possiamo prendere come insieme $A = (0, 1) \cup (1, \infty)$ che ha ovviamente un punto limite in D (se $A \subset X$, un punto $x \in X$ è un punto limite di A se esiste una sequenza $\{x_n\}$ di punti distinti in A tali che $x = \lim x_n$).

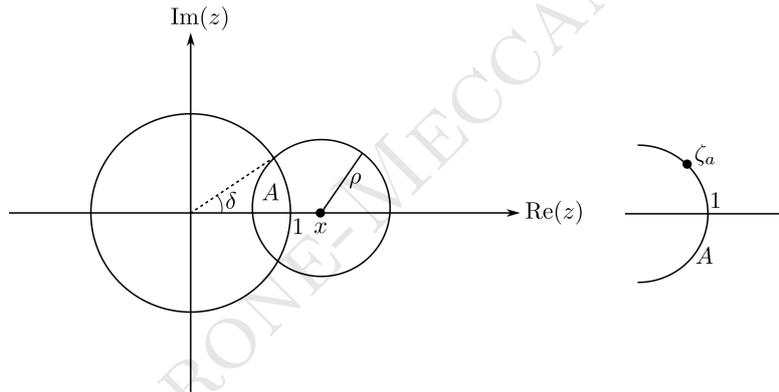
Ma allora

$$\boxed{M_\Lambda(z) \rightarrow M(z) \quad \text{per } \Lambda \nearrow \mathbb{Z}^D \quad \forall z \text{ tale che } |z| \neq 1}, \quad (7.29)$$

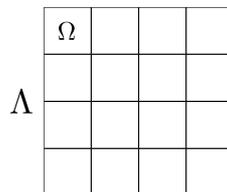
dove M è la magnetizzazione nel limite termodinamico (e quindi $f_\Lambda(z)$ converge, quando $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^D$, per tutti gli z con $|z| \neq 0, 1$).

Teorema– Per $\beta > \beta_c^{\text{puro}}$, $M(z)$ non può essere continuata analiticamente da $\{z : |z| > 1\}$ a $\{z : |z| < 1\}$, e viceversa, lungo l'asse reale.

Dimostrazione– Supponiamo vero il contrario. Allora esiste qualche x reale $x > 1$ e ρ reale $\rho > 0$ tali che $|x - \rho| < 1$ e la serie di Taylor di $M(z)$ intorno a $z = x$ ha raggio di convergenza ρ e il disco di convergenza della serie contiene un arco $A = \{z = e^{i\phi} : |\phi| < \delta\}$ per qualche $\delta > 0$. Dato $\beta > \beta_c^{\text{puro}}$ e $\delta > 0$



possiamo prendere Λ grande abbastanza cosicché A contiene qualche singolarità ζ_a di $M_\Lambda(z)$. Questo è sicuramente vero dal momento che, dato $\epsilon > 0$, per un volume sufficientemente grande esisterà un cluster connesso \mathcal{C} con la proprietà che $M_{\mathcal{C}}(z)$ ha una singolarità in ζ tale che $|\zeta - 1| < \epsilon$ (infatti prendendo il cluster sempre più grande $\zeta \rightarrow 1$ nel limite di volume infinito poiché il cluster si comporta come un sistema puro e per un sistema puro sappiamo che la magnetizzazione per $T < T_c$ ha una singolarità in $z = 1$, cioè ad $h = 0$). Quindi consideriamo un qualche cluster connesso in Λ tale che $M_{\mathcal{C}_a}(z)$ ha una singolarità in \mathcal{C}_a e sia Ω il cubo più piccolo che contiene \mathcal{C}_a supponiamo che Λ sia l'unione di N traslati disgiunti $\Omega(x)$ di Ω (con $x \in \Lambda$).



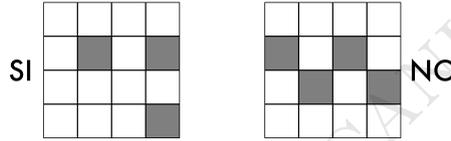
Consideriamo la seguente espressione

$$\sum_{k=1, \dots, N} \sum_{x_1, \dots, x_k} \sum_{C : C \cap \Omega(x_i) \supseteq \mathcal{C}_a(x_i)} k P_{C, \Lambda} . \quad (7.30)$$

Il significato della somma è il seguente:

- prendiamo k cubi fra N in Λ (ci sono $\binom{N}{k}$ modi) con $k = 1, \dots, N$;
- per ogni scelta di k cubi generiamo la configurazione C ;
- se $C \cap \Omega(x_i) \supseteq \mathcal{C}_a(x_i) \forall i = 1, \dots, k$ e $C \cap \Omega(x_i) \not\supseteq \mathcal{C}_a(x_i)$ per $x \notin \{x_1, \dots, x_k\}$, allora contiamo, altrimenti no;

Se sono 3 cubi



- andiamo avanti a generare tutte le configurazioni;
- ripetiamo tutto aumentando k di 1.

Ora ci vogliamo convincere che

$$\eta_a(\Lambda) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\substack{C : \zeta_\alpha(C) = \zeta_a \\ \text{per qualche } \alpha}} m_a(C) P_{C, \Lambda} \geq \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{k=1, \dots, N} \sum_{x_1, \dots, x_k} \sum_{C : C \cap \Omega(x_i) \supseteq \mathcal{C}_a(x_i)} k P_{C, \Lambda} . \quad (7.31)$$

Questo si può intuire se pensiamo al caso peggiore e cioè quando la configurazione C ha una singolarità (M ha la singolarità) solo se la configurazione stessa contiene qualche cluster \mathcal{C}_a per cui avremo

$$\sum_{C : \zeta_\alpha(C) = \zeta_a} m_a(C) P_{C, \Lambda} = \sum_{\substack{C : C \supseteq k \text{ volte } \mathcal{C} \\ k = 1, \dots, N}} k P_{C, \Lambda} , \quad (7.32)$$

che è proprio il 2° termine. Ora

$$\sum_{C : C \cap \Omega(x_i) \supseteq \mathcal{C}_a(x_i)} P_{C, \Lambda} = P_{\mathcal{C}_a}^k (1 - P_{\mathcal{C}_a})^{N-k} , \quad (7.33)$$

che è la probabilità di occorrenza di k cluster \mathcal{C}_a per la probabilità che non ne capitino di più. In altre parole la probabilità di occorrenza di soli k cluster \mathcal{C}_a , con

$$P_{\mathcal{C}_a} = p^{|\mathcal{C}_a|}(1-p)^{|\partial\mathcal{C}_a|}, \quad (7.34)$$

dove $|\partial\mathcal{C}_a|$ è il numero di siti in Ω a distanza 1 da \mathcal{C}_a che non sono contenuti in \mathcal{C}_a .

Ora

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_k \\ k=1, \dots, N}} k P_{\mathcal{C}_a}^k (1 - P_{\mathcal{C}_a})^{N-k} &= \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} P_{\mathcal{C}_a}^k (1 - P_{\mathcal{C}_a})^{N-k} k = \\ &= (1 - P_{\mathcal{C}_a})^N \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} k \left(\frac{P_{\mathcal{C}_a}}{1 - P_{\mathcal{C}_a}} \right)^k = (1 - P_{\mathcal{C}_a})^N \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} k q^k = \\ &= (1 - P_{\mathcal{C}_a})^N q \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} q^k = (1 - P_{\mathcal{C}_a})^N q \frac{d}{dq} [(q+1)^N - 1] = (1 - P_{\mathcal{C}_a})^N q N (q+1)^{N-1} = \\ &= (1 - P_{\mathcal{C}_a})^N \frac{P_{\mathcal{C}_a}}{1 - P_{\mathcal{C}_a}} N \frac{1}{(1 - P_{\mathcal{C}_a})^{N-1}} = N P_{\mathcal{C}_a}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Quindi

$$\boxed{\eta_a(\Lambda) \geq \frac{N}{|\Lambda|} P_{\mathcal{C}_a} = \frac{1}{|\Omega|} P_{\mathcal{C}_a} \equiv P_a > 0} \quad \text{uniformemente in } \Lambda. \quad (7.36)$$

Lemma

$$\boxed{|M_\Lambda(r\zeta_a)| \geq 2 \frac{\eta_a(\Lambda)}{r-1} \geq 2 \frac{P_a}{r-1}} \quad \text{per } r > 1, \text{ uniformemente in } \Lambda. \quad (7.37)$$

Avremo che $M_\Lambda(r\zeta_a)$ diverge a $+\infty$ quando $r \rightarrow 1$ e questo contraddice l'ipotesi che $M(z)$ è olomorfa in qualche intorno dell'arco A . Per $h \rightarrow -h$, $z \rightarrow z^{-1}$ e $M(z^{-1}) = -M(z)$ e quindi $M(z)$ non può nemmeno essere continuata analiticamente da $|z| < 1$ a $|z| > 1$ lungo l'asse reale.

FLAVIANO MORONE - MECCANICA STATISTICA

Chapter 8

Leggi di scaling

Vicino a un punto di transizione di fase continuo i sistemi critici esibiscono proprietà universali. Le correlazioni a grande distanza non sono sensibili a dettagli delle interazioni microscopiche. In altre parole nella regione critica la lunghezza di correlazione diventa più grande di qualsiasi dimensione lineare che caratterizza le forze di interazione tra le particelle del sistema. In questa situazione è naturale attendersi che il comportamento caratteristico delle forze d'interazione sia inessenziale per la descrizione delle proprietà critiche del sistema.

Nel modello di Ising sappiamo che le fluttuazioni hanno solo un effetto quantitativo in dimensione $D > D_c^u = 4$.

Il ruolo delle fluttuazioni diventa non banale in dimensione $D \leq D_c^u = 4$. Per $D > D_c^u = 4$ le fluttuazioni sono irrilevanti.

Definiamo il parametro

$$\theta = \frac{T - T_c}{T} , \quad (8.1)$$

cosicché

- $\theta > 0$: fase disordinata simmetrica;
- $\theta < 0$: fase ordinata dove la simmetria è spontaneamente rotta.

Una transizione continua è caratterizzata da una magnetizzazione spontanea che si annulla con continuità a $\theta = 0$. La taglia del dominio vicino $\theta = 0$ in cui il passo a , o più generalmente il range d'interazione, può essere trascurato rispetto alla lunghezza di correlazione ξ dipende dai parametri microscopici e può essere difficile da stimare nel caso concreto. Facciamo l'ipotesi che $\xi \gg a$. Questa lunghezza di correlazione può essere visualizzata considerando una configurazione tipica vicino $\theta = 0$ e stimando la taglia dei cluster di spin con la stessa orientazione. Assumiamo, inoltre, che le funzioni di correlazione diventino isotrope al punto critico ($T \rightarrow T_c$).

Consideriamo quindi un campo scalare $\phi(x)$ e misuriamo le lunghezze in termini di un passo microscopico a . La funzione di correlazione

$$G(x) = \langle \phi(x)\phi(0) \rangle , \quad (8.2)$$

soddisfa la condizione (ignorando anisotropie):

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \gamma\left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{r_2}{a}, \frac{r_1}{a}\right) = \gamma\left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{r_1}{a}\right), \quad (8.3)$$

dovendo essere il rapporto adimensionale e $\frac{r_2}{a} = \frac{r_2 r_1}{r_1 a}$, con $r = |x|$.

Il nostro scopo è di giustificare l'esistenza del limite critico

$$a \rightarrow 0 \text{ per } r_1 \text{ e } r_2 \text{ fissati}, \quad (8.4)$$

nel qual caso

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \gamma\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad r_1 \gg a, r_2 \gg a. \quad (8.5)$$

Ora la legge di gruppo

$$\frac{G(r_3)}{G(r_1)} = \frac{G(r_3)}{G(r_2)} \times \frac{G(r_2)}{G(r_1)}, \quad (8.6)$$

implica che

$$\gamma\left(\frac{r_3}{r_1}\right) = \gamma\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \gamma\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \quad (8.7)$$

e quindi che

$$\gamma(\rho) = c\rho^\alpha, \quad (8.8)$$

e inoltre

$$\gamma(1) = c\gamma\left(\frac{1}{1}\right) = \gamma(1)^2 \rightarrow c = 1, \quad (8.9)$$

e quindi

$$\boxed{\gamma(\rho) = \rho^\alpha}, \quad (8.10)$$

cioè $\gamma(\rho)$ è una funzione omogenea di ρ e uguale a 1 per $\rho = 1$. L'assenza di una scala di lunghezze implica questa legge di potenza.

In altre parole, nel regime critico:

$$\boxed{G(r_2) = G(r_1) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{d-2+\eta}} \quad \theta = 0, \quad (8.11)$$

dove η si annulla nell'approssimazione di campo medio. Quindi $\eta \neq 0$ corrisponde ad una teoria di campo non banale invariante di scala.

Riassumendo: l'ipotesi afferma che ξ è la sola lunghezza caratteristica che un sistema ha in un intorno di $\theta = 0$ e unita al fatto che ξ diverge a $\theta = 0$ porta alla conclusione che il sistema non ha una lunghezza caratteristica e che, quindi, è invariante sotto trasformazione di scala. Intuitivamente si può dire che invarianza di scala significa che, se una parte del sistema è ingrandita fino a quando non raggiunge le dimensioni del sistema iniziale, non si è in grado di dire quali differenze ci siano tra questo e la sua parte ingrandita.

Nella fase disordinata $\theta > 0$, molto vicino al punto critico, cosicché

$$\theta > 0 \text{ piccolo} \rightarrow \xi \gg a, \quad (8.12)$$

possiamo distinguere tre domini di lunghezza r grandi rispetto al passo reticolare (o ad ogni scala caratteristica di corte distanze):

- $a \ll r \ll \xi$: il sistema in questa regione corrisponde a quello analizzato precedentemente (poiché la lunghezza di correlazione può essere considerata infinita), cioè vale l'invarianza di scala e $\gamma(\rho) \sim \rho^\alpha$.
- $a \ll r \sim \xi$: zona di transizione dove comincia una deviazione dal comportamento omogeneo.
- $a \ll \xi \ll r$: in questa regione le funzioni di correlazione decadono esponenzialmente e non vale l'invarianza di scala.

La temperatura, caratterizzata dal parametro θ , è un parametro rilevante per il comportamento infrarosso della teoria (a grandi distanze). Cioè quando la distanza cresce il sistema diventa sempre più sensibile a una deviazione della temperatura critica ($\theta = 0$).

In altre parole potremo scrivere:

$$G(r, \theta) \sim r^{-(d-2+\eta)} g\left(\frac{r}{\xi(\theta)}\right), \quad (8.13)$$

con

$$g(x) = g\left(\frac{r}{\xi(\theta)}\right) \sim \begin{cases} \text{cost} & x \rightarrow 0 \\ e^{-x} & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (8.14)$$

Quando θ si annulla l'approssimazione di campo medio suggerisce una divergenza della lunghezza di correlazione in accordo a una legge di potenza:

$$\xi(\theta) \sim \xi_+ \theta^{-\nu} \quad \theta \rightarrow 0^+, \quad (8.15)$$

(dove ξ_+ dipende dalla struttura microscopica delle interazioni). Questo permette di collegare la scala di lunghezze alla temperatura.

Generalizzando queste idee si è naturalmente portati a una serie di legge di scaling per le varie quantità fisiche, che originano dall'ipotesi di scaling secondo cui ξ è la sola scala di lunghezza intrinseca rilevante (per θ vicino a zero).

Consideriamo l'energia libera per unità di volume.

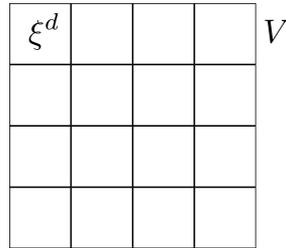


Figure 8.1: Le correlazioni tra i vari blocchi decrescono come $e^{-x/\xi}$. All'interno di ciascun blocco le grandezze fisiche sono correlate.

L'ipotesi di **hyperscaling** afferma che le fluttuazioni contribuiscono alla parte singolare della densità di energia come il rapporto tra il volume unitario e il volume $\xi(\theta)^d$, cioè

$$f_{\text{sing}}(\theta) \sim \frac{1}{\xi(\theta)^d} \sim \theta^{\nu d}. \quad (8.16)$$

Come conseguenza, l'esponente α della parte singolare del calore specifico, proporzionale alla derivata seconda di f , è dato da

$$C(\theta) \sim \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \sim \theta^{\nu d - 2} = \theta^{-\alpha}, \quad (8.17)$$

e allora

$$\boxed{\alpha = 2 - \nu d}. \quad (8.18)$$

- Per $\alpha > 0$ C_V diverge.
- Per $\alpha < 0$ C_V avrà in generale una cuspidè. (Nel modello di Ising 2-dimensionale abbiamo $\nu = 1$, $\alpha = 0$ e il calore specifico diverge logicamente).

Per giustificare questa ipotesi possiamo dare l'argomento seguente: supponiamo che la densità di energia libera abbia una parte singolare che si comporta come $\theta^{2-\alpha}$. Ad una temperatura maggiore della temperatura critica ($\theta > 0$), una fluttuazione che corrisponde ad un allontanamento da uno stato ordinato in un range ξ produce un aumento $\Delta f \sim \theta^{2-\alpha} \xi^d$ dell'energia libera. Ora la probabilità $e^{-\Delta f}$ di una tale fluttuazione diventa trascurabile quando $\Delta f \sim 1$ e si ottiene quindi la stima:

$$\xi \sim \theta^{-\frac{2-\alpha}{d}}. \quad (8.19)$$

Alternativamente possiamo dire che se ξ è la lunghezza di correlazione (ed è l'unica scala di lunghezza), allora la quantità di energia libera localizzata in volume spaziale di dimensione lineare ξ è dell'ordine di kT (o di $1/\beta$). Questo è consistente con l'idea che ξ sia l'unica scala di lunghezza, per cui non ci possono essere fluttuazioni con lunghezza d'onda più piccola di ξ . Quindi l'energia libera totale è dell'ordine di $\frac{kTV}{\xi^d}$ e quindi per $\theta \rightarrow 0$:

$$f \sim \xi^{-d} \sim \theta^{\nu d}. \quad (8.20)$$

La relazione $\alpha = 2 - \nu d$ è violata dall'approssimazione di campo medio dove troviamo $\alpha = 0$ e $\nu = \frac{1}{2}$ indipendentemente da d . Infatti il ragionamento precedente è incompatibile con l'approssimazione di campo medio, in cui le fluttuazioni sono ignorate. Nonostante ciò, per stimare la dimensione critica superiore D_c^u possiamo usare questi valori di campo medio per predire che le fluttuazioni (che sono trascurabili in dimensione alta) debbano diventare importanti quando la dimensione d scende sotto d_c che è data da

$$\alpha_{MF} = 2 - \nu_{MF} D_c^u \rightarrow D_c^u = 4. \quad (8.21)$$

Consideriamo la suscettività $\chi(\theta)$. χ sarà proporzionale all'integrale della funzione di correlazione a due punti, cioè

$$\chi(\theta) \sim \int_{|x| < \xi(\theta)} d^d x \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}} \approx \int d^d x \frac{1}{|x|^{d-2+\eta}} g\left(\frac{x}{\xi}\right), \quad (8.22)$$

quindi

$$\chi \sim \int_{|x| < \xi(\theta)} d^d x |x|^{-(d-2+\eta)} \sim \xi(\theta)^{2-\eta} \sim \theta^{-\nu(2-\eta)}, \quad (8.23)$$

allora

$$\chi \sim \theta^{-\gamma} \sim \theta^{-\nu(2-\eta)}, \quad (8.24)$$

e dunque

$$\boxed{\gamma = \nu(2-\eta)}. \quad (8.25)$$

In presenza di un campo magnetico esterno h , la transizione scompare. Per $\theta > 0$ la magnetizzazione $m(h, \theta)$ si annulla linearmente con h (con una pendenza $\chi(\theta)$).

Per $\theta < 0$, $m(h, \theta)$ tende alla magnetizzazione spontanea $m(\theta)$ quando $h \rightarrow 0^+$. Quando ci avviciniamo alla temperatura critica dal basso, la magnetizzazione spontanea $m(\theta)$ si annulla come

$$m(\theta) \sim m(-\theta)^\beta \quad \theta \rightarrow 0^-. \quad (8.26)$$

Inoltre, sempre alla temperatura critica, la magnetizzazione è singolare quando $h \rightarrow 0$, cioè

$$m(h, \theta = 0) \sim h^{1/\delta}, \quad (8.27)$$

quindi

$$h \sim m^\delta \sim (-\theta)^{\beta\delta}, \quad (8.28)$$

e cioè

$$h = m^\delta f_h(\theta m^{-1/\beta}). \quad (8.29)$$

Il primo zero (negativo) di f_h corrisponde alla magnetizzazione spontanea e il suo valore in zero dà il coefficiente di proporzionalità nell'equazione:

$$h \sim m^\delta \quad h \rightarrow 0. \quad (8.30)$$

Ora per $\theta > 0$, m e h sono collegati linearmente quando si annullano simultaneamente, cioè

$$m = \chi(\theta)h. \quad (8.31)$$

Chiamando $z = \theta m^{-1/\beta}$ avremo che $f_h(z)$ si comporta come

$$\begin{aligned} m &= (z\theta^{-1})^{-\beta} = z^{-\beta}\theta^\beta \rightarrow m^\delta = z^{-\beta\delta}\theta^{\beta\delta} \\ &\rightarrow h = z^{-\beta\delta}\theta^{\beta\delta} f_h(z) = \chi^{-1}m = \chi^{-1}z^{-\beta}\theta^\beta \\ &\rightarrow f_h(z) = hm^{-\delta} = \chi^{-1}z^{-\beta}\theta^\beta z^{\beta\delta}\theta^{-\beta\delta} \sim z^{\beta(\delta-1)} \quad z \gg 1, \end{aligned} \quad (8.32)$$

e quindi

$$h \sim \frac{m^\delta \theta^{\beta(\delta-1)}}{m^{\delta-1}} = m\theta^{\beta(\delta-1)} = m\chi^{-1} \sim m\theta^\gamma, \quad (8.33)$$

e dunque

$$\boxed{\gamma = \beta(\delta-1)}. \quad (8.34)$$

Allo stesso modo se la singolarità del calore specifico è la stessa sopra e sotto la temperatura critica possiamo scrivere ($C_v \sim \theta^{-\alpha}$ quindi $F_{\text{sing}} \sim \theta^{2-\alpha}$)

$$F_{\text{sing}}(\theta, h) \sim \theta^{2-\alpha} f_{\text{F}}(h\theta^{-\beta\delta}) . \quad (8.35)$$

Ora

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} \approx \theta^{2-\alpha} \frac{\partial^2 f_{\text{F}}}{\partial h^2} \sim \theta^{2-\alpha} \theta^{-2\beta\delta} \sim \chi(\theta) \sim \theta^{-\gamma} , \quad (8.36)$$

e quindi

$$2 - \alpha - 2\beta\delta = -\gamma , \quad (8.37)$$

ovverosia

$$\boxed{\gamma = 2\beta\delta + \alpha - 2} . \quad (8.38)$$

Riassumendo, i due esponenti critici η per il comportamento della funzione di Green al punto critico e ν per la lunghezza di correlazione nel dominio critico, danno gli altri 4 esponenti (usando l'ipotesi di scaling e hyperscaling) che sono:

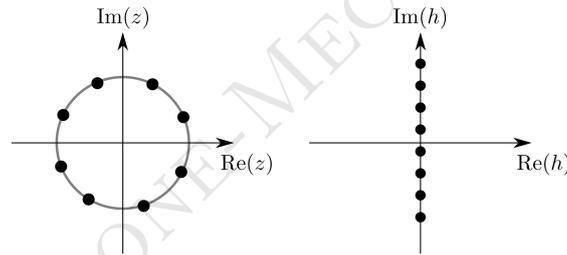
$$\begin{cases} \alpha = 2 - \nu d \\ \gamma = \nu(2 - \eta) \\ \gamma = (\delta - 1)\beta \\ \gamma = 2\beta\delta + \alpha - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - \nu d \\ \gamma = \nu(2 - \eta) \\ \beta = \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta) \\ \delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta} \end{cases} \quad (8.39)$$

(η è una misura della deviazione dall'approssimazione di campo medio).

Chapter 9

Teorema di Lee e Yang

Consideriamo un modello di Ising in un campo esterno arbitrario, in un dominio finito (ma arbitrariamente grande). Per h reale la funzione di partizione è una somma di termini positivi e non ha zeri ($V < \infty$). Per h complessi Z può avere zeri complessi. Il punto importante è che, per β reale, Z nel volume finito è un polinomio nella variabile $e^{-2\beta h} = z$. Il teorema afferma che gli zeri della funzione di partizione sono localizzati sul cerchio $|z| = 1$ nel piano complesso z , o equivalentemente sull'asse immaginario nel piano complesso h .



Per un valore finito il numero di zeri è finito, poiché la funzione di partizione è un polinomio nell'attività (z) e il grado di questo polinomio cresce con la taglia (con V). Nel limite di volume infinito, gli zeri "condenseranno" su un sottoinsieme del cerchio unitario. Finché β è scelto in un range appropriato (alta temperatura), questo insieme singolare non conterrà un intorno del punto $z = 1$. L'energia libera, quindi, rimarrà analitica in $z = 1$. Ma se β cresce può accadere che questo insieme arrivi a inglobare il punto $z = 1$ proibendo una continuazione analitica da $\text{Re}(h) > 0$ a $\text{Re}(h) < 0$ dell'energia libera, segnalando una transizione di fase a $h = 0$. Quando si considera l'energia libera lungo un cammino h reale (con h che attraversa $h = 0$) la transizione è del primo ordine, con un salto nella magnetizzazione, mentre l'energia libera a campo zero potrebbe avere una derivata continua in $\beta = \beta_c$ come in una transizione del secondo ordine.

Consideriamo un modello di Ising con N vertici e L link. Sia h_i il campo magnetico nel sito i . Definiamo quindi

$$\begin{array}{ll} \text{attività}' & \text{fugacità}' \\ \rho_i = e^{-2\beta h_i} & \tau = e^{-2\beta} \end{array} \quad (9.1)$$

Avremo

$$\begin{aligned}
 Z_N &= \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \sum' \sigma_i \sigma_j + \beta \sum h_i \sigma_i} = \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta L} e^{\beta \sum' (\sigma_i \sigma_j - 1)} e^{\beta \sum h_i} e^{\beta \sum (\sigma_i - 1) h_i} \\
 &= e^{\beta L} e^{\beta \sum h_i} \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \sum' (\sigma_i \sigma_j - 1) + \beta \sum (\sigma_i - 1) h_i} = e^{\beta L + \beta \sum h_i} P(\tau, \rho_i) ,
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

dove $P(\tau, \rho_i)$ è un polinomio in τ e ρ_i di grado 1 in ciascun ρ_i separatamente e globalmente di grado N in tutti i ρ_i . Ora per τ e ρ_i reali e positivi, P è positivo e non può annullarsi. Assumiamo che

$$0 < \tau < 1 , \tag{9.3}$$

cioè β reale e positivo. Ad esempio per un grafo a 2 vertici avremo

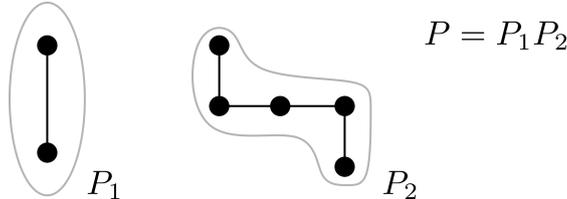
$$\begin{aligned}
 1 \text{ --- } 2 \quad P_{12} &= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \sum_{\sigma_2 = \pm 1} e^{\beta(\sigma_1 \sigma_2 - 1) + \beta h_1(\sigma_1 - 1) + \beta h_2(\sigma_2 - 1)} = \\
 &= 1 + e^{-2\beta - 2\beta h_2} + e^{-2\beta - 2\beta h_1} + e^{-2\beta h_1 - 2\beta h_2} = \\
 &= 1 + \tau(\rho_1 + \rho_2) + \rho_1 \rho_2 .
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

Per un grafo a 3 vertici

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \quad P_{123} &= (1 + \rho_1 \tau)(1 + \rho_3 \tau) + \rho_2(\tau + \rho_1)(\tau + \rho_2) .
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Ora, a meno di una funzione regolare, l'energia libera totale è il logaritmo di P . Le sue singolarità sono dunque gli zeri del polinomio. Se abbiamo una sequenza crescente di grafi, nel limite $N \rightarrow \infty$, l'energia libera rimarrà analitica in ogni regione che non contiene punti di accumulazione degli zeri.

Supponiamo di avere 2 grafi disconnessi; allora il polinomio P è il prodotto dei polinomi dei due grafi. Partendo da questa situazione possiamo generare un



nuovo grafo identificando un sito a dal primo grafo con un sito b dal secondo. Ora

$$\begin{aligned}
 \rho_a &= e^{-2\beta h_a} , \\
 \rho_b &= e^{-2\beta h_b} ,
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

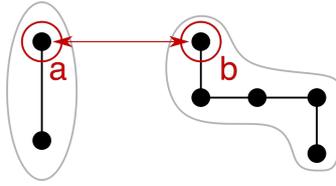


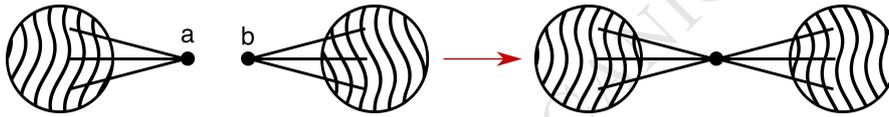
Figure 9.1: Chiamiamo P_{12} il polinomio corrispondente in cui a coincide con b .

e P_1 è lineare in ρ_a e P_2 è lineare in ρ_b , in modo tale che

$$\begin{aligned} P_1 &= A_+ + \rho_a A_- , \\ P_2 &= B_+ + \rho_b B_- , \end{aligned} \quad (9.7)$$

dove A_+ e B_+ si riferiscono ai contributi con $\sigma_a = +1$ e $\sigma_b = +1$, e A_- e B_- a quelli con $\sigma_a = -1$ e $\sigma_b = -1$.

Quando a e b sono identificati, una nuova variabile ρ_{ab} è attaccata al sito e avremo il seguente processo di contrazione



$$\begin{aligned} P_1 P_2 &= A_+ B_+ + \rho_a A_- B_+ + \rho_b A_+ B_- + \rho_a \rho_b A_- B_- , \\ P_{12} &= A_+ B_+ + \rho_{ab} A_- B_- , \\ P_1 P_2 &\rightarrow P_{12} , \end{aligned} \quad (9.8)$$

e non ci possono essere termini del tipo $A_+ B_-$ o $A_- B_+$ dal momento che i siti a e b sono identificati.

Il processo di contrazione ci permette di ottenere il polinomio P per un grafo arbitrario partendo dal risultato elementare per il grafo più semplice di due siti uniti da un link. In questo caso il polinomio si annulla per $1 + \tau \rho_1 + \tau \rho_2 + \rho_1 \rho_2 = 0$, cioè per

$$\boxed{\rho_1 = -\frac{1 + \tau \rho_2}{\tau + \rho_2}} . \quad (9.9)$$

Questa relazione definisce una mappa globale uno a uno dal piano complesso ρ_2 al piano ρ_1 . Inoltre, per τ reale, lascia invariante il cerchio unitario e per $0 < \tau < 1$ scambia l'interno del cerchio unitario con l'esterno. Quindi se

$$|\rho_1| < 1 \quad \text{e} \quad |\rho_2| < 1 \quad \text{oppure} \quad |\rho_1| > 1 \quad \text{e} \quad |\rho_2| > 1 , \quad (9.10)$$

il polinomio non può annullarsi.

Questa proprietà si generalizza nel fatto che, per un grafo arbitrario, se tutti i ρ_i giacciono fuori, ovvero tutti i ρ_i giacciono dentro al cerchio unitario, allora P è diverso da zero. Per dimostrare che questo è vero è sufficiente controllare che questa proprietà sopravvive dopo il processo di contrazione. Ora poniamo tutti i $\rho_i = \rho$ cosicché avremo un campo uniforme. Quindi il polinomio $P(\tau, \rho)$ (e

di conseguenza la funzione di partizione) può annullarsi solo sul cerchio $|\rho| = 1$. Vediamo due casi limite. A temperatura infinita, $\tau = 1$ e P si riduce a

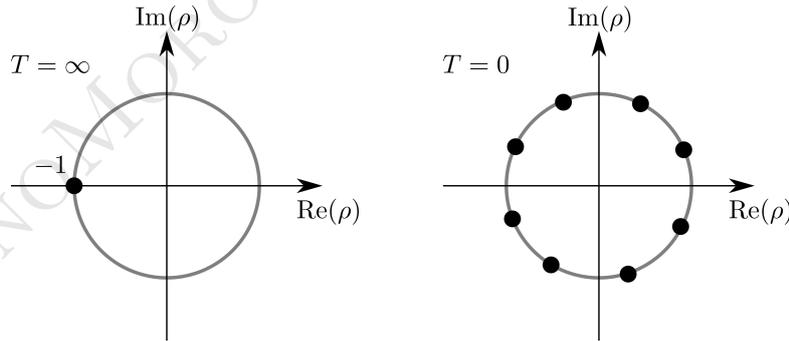
$$P(1, \rho) = \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta h \sum (\sigma_i - 1)} = \left(\sum_{\sigma=\pm 1} e^{\beta h (\sigma - 1)} \right)^N = (1 + \rho)^N, \quad (9.11)$$

e quindi si ha uno zero in $\rho = -1$ con molteplicità N , mentre a temperatura zero, $\tau = 0$ e

$$\begin{aligned} P(0, \rho) &= \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \sum (\sigma_i \sigma_{j-1}) + \beta h \sum (\sigma_i - 1)} = \\ &= \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta h \sum (\sigma_i - 1)} \left[\delta\left(\sum_i \sigma_i - N\right) + \delta\left(\sum_i \sigma_i + N\right) \right] = \\ &= 1 + \rho^N, \end{aligned} \quad (9.12)$$

(dove nel secondo passaggio abbiamo usato il fatto che sopravvivono solo le configurazioni con tutti $\sigma_i = +1$ o $\sigma_i = -1$) e quindi si ha una distribuzione uniforme $\rho_k = \exp\left(\frac{i\pi(2k+1)}{N}\right)$ di zeri sul cerchio.

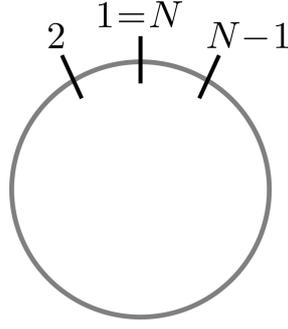
Decrescendo τ si parte da uno zero degenero con molteplicità N in $\rho = -1$ a temperatura infinita e si arriva a una distribuzione uniforme a temperatura zero. Questo teorema comunque non prova l'esistenza di transizioni di fase, cioè



l'accumularsi degli zeri nel punto $\rho = 1$ quando $V \rightarrow \infty$.

9.1 Caso unidimensionale

Prendiamo condizioni periodiche al bordo. La funzione di partizione sarà data da



$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta(\sigma_1\sigma_2-1)+\beta h(\sigma_1-1)+\beta h(\sigma_2-2)+\beta(\sigma_2\sigma_3-1)+\beta h(\sigma_3-1)+\dots} = \\
&= \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta(\sigma_1\sigma_2-1)+\beta h(\sigma_1-1)/2+\beta h(\sigma_2-1)/2} e^{\beta(\sigma_2\sigma_3-1)+\beta h(\sigma_2-1)/2+\beta h(\sigma_3-1)/2} \times \dots = \\
&= e^{\beta N+\beta N h} \sum_{\{\sigma\}} \left[e^{\beta(\sigma_1\sigma_2-1)+\beta h(\sigma_1-1)/2+\beta h(\sigma_2-1)/2} \right] \times \left[e^{\beta(\sigma_2\sigma_3-1)+\beta h(\sigma_2-1)/2+\beta h(\sigma_3-1)/2} \right] \times \\
&\times \dots \left[e^{\beta(\sigma_{N-1}\sigma_1-1)+\beta h(\sigma_{N-1}-1)/2+\beta h(\sigma_1-1)/2} \right].
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Chiamo $T_{\sigma_1\sigma_2}$ la matrice di trasferimento:

$$T_{\sigma_1\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & \tau\sqrt{\rho} \\ \tau\sqrt{\rho} & \rho \end{pmatrix}, \tag{9.14}$$

cosicché

$$Z = e^{\beta N+\beta N h} \sum_{\{\sigma\}} T_{\sigma_1\sigma_2} T_{\sigma_2\sigma_3} \dots T_{\sigma_{N-1}\sigma_1} = \left(e^{\beta+\beta h} \right)^N \text{tr}(T^N). \tag{9.15}$$

Siano λ_+ e λ_- gli autovalori di T . Avremo quindi

$$\text{tr}(T^N) = \lambda_+^N + \lambda_-^N, \tag{9.16}$$

con

$$\lambda_{\pm} = \frac{1+\rho}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-\rho)^2}{4} + \rho\tau^2}. \tag{9.17}$$

Nel limite termodinamico $N \rightarrow \infty$, per $\rho > 0$ (h reale) e $0 < \tau < 1$ contribuisce solo λ_+ per cui

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_N = \beta + \beta h + \log \left(\frac{1+\rho}{2} + \sqrt{\frac{(1-\rho)^2}{4} + \rho\tau^2} \right). \tag{9.18}$$

Le singularità in ρ nascono quando la radice quadrata si annulla e cioè quando

$$1 + \rho^2 - 2\rho + 4\rho\tau^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \rho^2 + 2\rho(2\tau^2 - 1) = 0, \tag{9.19}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\rho_c &= -(2\tau^2 - 1) \pm \sqrt{(2\tau^2 - 1)^2 - 1} = (1 - 2\tau^2) \pm \sqrt{4\tau^4 - 4\tau^2} = \\ &= (1 - 2\tau^2) \pm 2\tau\sqrt{\tau^2 - 1} = (1 - 2\tau^2) \pm 2i\tau\sqrt{1 - \tau^2},\end{aligned}\quad (9.20)$$

e

$$|\rho_c|^2 = (1 - 2\tau^2)^2 + 4\tau^2 (\sqrt{1 - \tau^2})^2 = 1 + 4\tau^4 - 4\tau^2 + 4\tau^2 - 4\tau^4 = 1. \quad (9.21)$$

Per $\tau = 1$, $\rho_c = -1$; per $\tau = 0$, $\rho_c = +1$, cioè la temperatura critica per il modello unidimensionale è $T_c = 0$ e quindi non ci sono transizioni di fase a temperatura finita.

Chapter 10

Vetro di Spin unidimensionale

Vogliamo analizzare le proprietà dipendenti dal tempo di una catena di Ising con legami random distribuiti gaussianamente (cioè un vetro di spin in 1 dimensione). In particolare, dopo che un campo magnetico è stato applicato a un vetro di spin si osserva sempre una magnetizzazione rimanente, che decade non esponenzialmente. Al fine di ottenere una chiara visione del meccanismo che sta dietro al fenomeno della rimanenza e al suo decadimento non esponenziale, consideriamo il modello più semplice possibile che esibisce tale comportamento: un modello di Ising a primi vicini in 1 dimensione con hamiltoniano

$$H = - \sum_{i=1}^N J_i \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_i \sigma_i \quad \sigma_i = \pm 1 , \quad (10.1)$$

dove ciascuna J_i è una variabile random distribuita gaussianamente, cioè

$$P(J) \propto e^{-\frac{J^2}{2s^2}} . \quad (10.2)$$

Studiamo come nel limite di temperatura zero la magnetizzazione decade a un valore rimanente di $\frac{1}{3}$ e rimane costante successivamente, mentre a temperatura $T \neq 0$ si osserva un decadimento lento verso il valore di equilibrio $m = 0$.

10.1 Equilibrio

Le funzioni termodinamiche del modello si derivano facilmente per $h = 0$. Notiamo dapprima che uno stato di una catena di spin (con i due spin finali liberi) può essere specificato sia dando lo stato di ciascuno spin, o alternativamente specificando uno spin finale più lo stato di ciascun legame. La funzione di partizione per un singolo legame J_i è $e^{\beta J_i} + e^{-\beta J_i}$, e, poiché l'energia del sistema è la somma delle energie dei legami, segue che la funzione di partizione per un sistema di N legami è data da

$$Z = 2 \prod_{i=1}^N 2 \cosh(\beta J_i) , \quad (10.3)$$

dove il 2 è dovuto ai due possibili stati di uno spin finale che sono necessari per specificare completamente lo stato del sistema in aggiunta allo stato di ciascun legame. L'energia libera per spin sarà data da (nel limite $N \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned}
 -\beta f &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int dP_1 \dots dP_N \log \left[2 \prod_{i=1}^N 2 \cosh(\beta J_i) \right] = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int dP_1 \dots dP_N \sum_{i=1}^N \log[2 \cosh(\beta J_i)] = \\
 &= \int \log[2 \cosh(\beta J)] P(J) dJ ,
 \end{aligned} \tag{10.4}$$

e quindi

$$\boxed{f = -kT \int \log[2 \cosh(\beta J)] P(J) dJ} . \tag{10.5}$$

La suscettività a campo zero χ_0 sarà data da:

$$\chi_0 = \frac{\beta}{N} \sum_{ij} \left[\overline{\langle \sigma_i \sigma_j \rangle} - \overline{\langle \sigma_i \rangle} \overline{\langle \sigma_j \rangle} \right] , \tag{10.6}$$

dove $\langle \cdot \rangle$ è la media termica e $\overline{\cdot}$ è la media sul disordine.

Ora $\langle \sigma_i \rangle = \langle \sigma_j \rangle = 0$ poiché in 1 dimensione non ci possono essere transizioni

di fase. Inoltre per $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \sigma_i \sigma_j \rangle} &= \int dJ_1 \dots dJ_N P(J_1) \dots P(J_N) \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_j e^{\beta \sum_k \sigma_k J_k \sigma_{k+1}} = \\
&= \int dJ_1 \dots dJ_N P(J_1) \dots P(J_N) \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_j e^{\beta \sigma_{i-1} J_{i-1} \sigma_i + \beta \sigma_i J_i \sigma_{i+1} + \beta \sum_{\text{resto}} \sigma_k J_k \sigma_{k+1}} = \\
&= \int dJ_1 \dots dJ_N P(J_1) \dots P(J_N) \times \\
&\times \frac{1}{Z} \sum_{\substack{\sigma_i = \pm 1 \\ \{\tilde{\sigma}\}}} -(-\sigma_i) \sigma_j e^{\beta \sigma_{i-1} (-J_{i-1}) (-\sigma_i) + \beta (-\sigma_i) (-J_i) \sigma_{i+1} + \beta \sum_{\text{resto}} \sigma_k J_k \sigma_{k+1}} = \\
&= \int dJ_1 \dots dJ_N P(J_1) \dots P(J_N) \times \\
&\times \frac{1}{Z} \sum_{\substack{\mu_i = \pm 1 \\ \{\tilde{\sigma}\}}} -(\mu_i) \sigma_j e^{\beta \sigma_{i-1} (-J_{i-1}) (\mu_i) + \beta (\mu_i) (-J_i) \sigma_{i+1} + \beta \sum_{\text{resto}} \sigma_k J_k \sigma_{k+1}} = \\
&= \int dJ_1 \dots dJ_N P(J_1) \dots P(J_N) \times \\
&\times \frac{1}{Z} \sum_{\substack{\mu_i = \pm 1 \\ \{\tilde{\sigma}\}}} -\mu_i \sigma_j e^{\beta \sigma_{i-1} J_{i-1} \mu_i + \beta \mu_i J_i \sigma_{i+1} + \beta \sum_{\text{resto}} \sigma_k J_k \sigma_{k+1}} = -\overline{\langle \sigma_i \sigma_j \rangle},
\end{aligned} \tag{10.7}$$

Avendo chiamato $\mu_i = -\sigma_i$ nel terzo passaggio, usato il fatto che $P(J) = P(-J)$ nel quarto passaggio, e richiamato $\mu_i = \sigma_i$ nel quinto passaggio. Quindi

$$\overline{\langle \sigma_i \sigma_j \rangle} = 0 \quad \text{per } i \neq j, \tag{10.8}$$

mentre

$$\overline{\langle \sigma_i \sigma_i \rangle} = \overline{\langle \sigma_i^2 \rangle} = 1 \quad \text{per } i = j, \tag{10.9}$$

e allora

$$\chi_0 = \frac{\beta}{N} \sum_{i,j} \overline{\langle \sigma_i \sigma_j \rangle} = \frac{\beta}{N} \sum_{i,j} \delta_{ij} = \beta \quad \rightarrow \quad \boxed{\chi_0 = \beta}. \tag{10.10}$$

10.2 Rimanenza

Partiamo da uno stato iniziale con tutti gli spin +1 e senza campo magnetico esterno presente. A basse temperature si osservano due regimi distinti: a) un decadimento veloce iniziale da $m = 1$ a $m \sim \frac{1}{3}$; b) un decadimento lento verso il valore di equilibrio ($m = 0$).

Vogliamo derivare i valori rimanenti della magnetizzazione e dell'energia dopo il rilassamento veloce iniziale. Sarà conveniente seguire il seguente approccio, cioè,

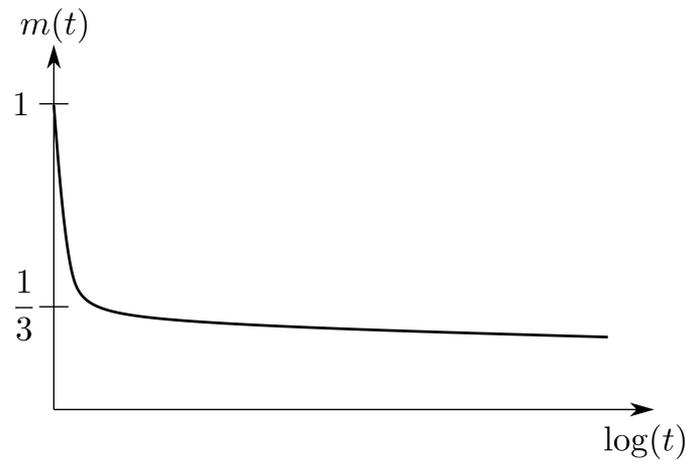


Figure 10.1: Dopo il decadimento rapido il valore rimanente sembra rilassare logaritmicamente.

invece di considerare gli spin, consideriamo i legami. Ad esempio, guardiamo il valore assoluto degli accoppiamenti di una sezione della catena in figura 10.2 .

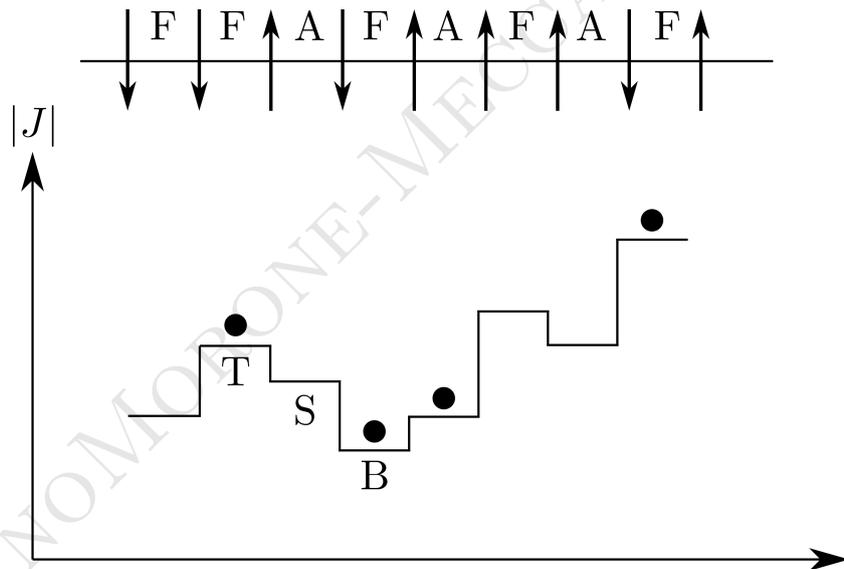


Figure 10.2

Avremo 3 tipi possibili di legami: **top**, **step** e **bottom**. (Un top è un legame che ha a destra e a sinistra due accoppiamenti in modulo più piccoli). Inoltre ogni legame **rotto** lo marchiamo con un \bullet .

Con il passare del tempo i \bullet si muovono lungo la catena. Le possibilità sono 3, come in figura 10.3.

Ora possiamo capire perché c'è rimanenza del sistema. Consideriamo prima il limite $T \rightarrow 0$. L'energia **deve diminuire** in ogni processo e di conseguenza i \bullet possono solo scendere verso i **bottom** dove arrivano dopo pochi passi. Da questo momento in poi i \bullet sono intrappolati e non possono muoversi ulteriormente. Così

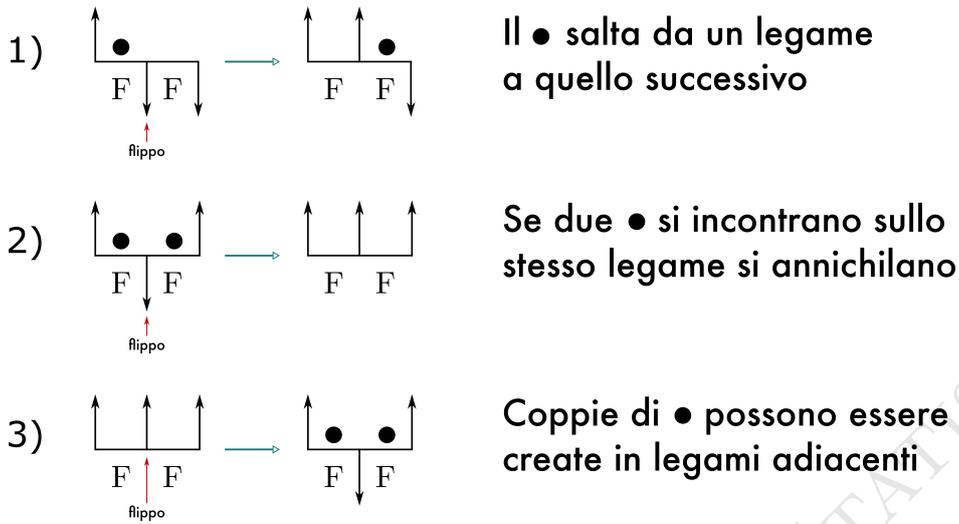


Figure 10.3

il sistema finisce in uno stato metastabile e non può raggiungere il vero equilibrio (cioè assenza di ●). A temperatura bassa ma finita, i ● hanno una probabilità non nulla di saltare le barriere e annichilarsi e di conseguenza c'è una lenta evoluzione verso l'equilibrio dopo il decadimento rapido iniziale. Valutiamo ora il valore dell'energia rimanente. Notiamo dapprima che la probabilità che un **bottom sia rotto** alla fine del rilassamento rapido è $\frac{1}{2}$. Infatti all'inizio la probabilità che un legame sia rotto è $\frac{1}{2}$ dato che $P(J_i < 0) = P(J_i > 0) = \frac{1}{2}$ e inoltre dopo il rilassamento i soli legami rotti sono di tipo bottom, perché tutti i ● scendono nelle valli. Quindi la probabilità che un bottom sia rotto è $\frac{1}{2}$ alla fine del rilassamento rapido.

Così la metà dei legami compresi tra due legami più grandi in modulo rimane rotta nel limite $T \rightarrow 0$. Per calcolare quanta energia compete a questa configurazione notiamo dapprima che la probabilità che un legame sia di intensità J che sia un bottom è data da

$$P_b(J) = P(J) \left[2 \int_{|J|}^{\infty} P(J') dJ' \right]^2. \quad (10.11)$$

Ora l'energia di una configurazione sarà

$$NE = - \sum_i |J_i| + 2 \sum_{\text{rotti}} |J_i| = - \sum_i |J_i| + 2 \sum_i |J_i| P_b(J_i), \quad (10.12)$$

dove $P_b(J_i)$ è la probabilità che J_i sia rotto. Quindi la differenza di energia rispetto all'energia di equilibrio ($-\sum |J_i|$) mediata sulle configurazioni è data da

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} P(J) \Delta E(J) dJ \quad \text{e} \quad \Delta E(J) = \frac{2}{N} \sum_i |J_i| P_b(J_i), \quad (10.13)$$

allora

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{2}{N} \int \sum_i |J_i| P_b(J_i) P(J_1) \dots P(J_N) dJ_1 \dots dJ_N = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} P(J) |J| \frac{1}{2} P_b(J) dJ = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |J| \frac{1}{2} \left[2 \int_{|J|}^{\infty} P(J') dJ' \right]^2 P(J) dJ ,\end{aligned}\quad (10.14)$$

quindi l'energia rimanente media per legame è

$$\boxed{\Delta E = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |J| P(J) \frac{1}{2} \left[2 \int_{|J|}^{\infty} P(J') dJ' \right]^2 dJ \sim 0.112 \quad (\sigma = 1)}, \quad (10.15)$$

(mentre l'energia di equilibrio, cioè l'energia dello stato fondamentale è $E_0 \sim -0.798$ –sempre $\sigma = 1$ –).

Calcoliamo ora la magnetizzazione rimanente.

Per ottenere la magnetizzazione rimanente nel limite $T \rightarrow 0$ (tutti i \bullet devono scendere in questo limite) consideriamo prima gli spin che non sono legati da un legame di tipo **top**. Vogliamo dimostrare che la probabilità che uno spin che non è legato da un top punta in basso, cioè sia -1 , è uguale a $\frac{1}{2}$. A tale fine diciamo che:

1. lo spin sarà -1 se sarà attraversato da un numero dispari di \bullet ;
2. i \bullet che lo attraversano vengono tutti dalla stessa parte (e cioè dove sta il legame di intensità più grande);
3. la probabilità che i legami più alti che lo precedono (o lo seguono) abbiano un \bullet inizialmente è $\frac{1}{2}$.

Quindi lo spin punterà giù se il numero di \bullet tra esso e quelli più alti che lo precedono (o seguono), uno più alto dell'altro, è dispari. Supponiamo che ci siano N legami tra lo spin in questione e quello più alto. Poiché ogni legame ha probabilità $\frac{1}{2}$ di avere un \bullet , la probabilità di averne k , $P(k)$, è la probabilità di averne k per la probabilità di non averne $(N - k)$ per i modi possibili di averne k fra N , cioè

$$P(k) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{k}. \quad (10.16)$$

Quindi la probabilità di averne un numero dispari è

$$P = \frac{1}{2^N} \sum_{k \text{ dispari}} \binom{N}{k}. \quad (10.17)$$

Usando il fatto che

$$\sum_{k \text{ dispari}} \binom{N}{k} = \sum_{k \text{ pari}} \binom{N}{k} = \frac{1}{2} \sum_k \binom{N}{k} = 2^{N-1}, \quad (10.18)$$

avremo che

$$\boxed{P = \frac{1}{2^N} 2^{N-1} = \frac{1}{2}} . \quad (10.19)$$

Consideriamo, quindi, tutti gli altri spin, cioè le coppie di spin connesse da legami top. Ora, se un top è inizialmente rotto uno, uno dei due spin flipperà, per cui il \bullet sul legame cadrà. D'altra parte tutte le coppie di spin legate da legami che sono inizialmente soddisfatti (cioè ferromagnetici) rimarranno \uparrow , poiché nel limite $T \rightarrow 0$ nessun \bullet può muoversi in alto verso un legame top.

Quindi riassumendo, uno spin non legato da un top sarà up o down con probabilità $\frac{1}{2}$ e quindi ne avremo metà su e metà giù. Due spin legati da un top saranno up se il top non è rotto e saranno $\uparrow\downarrow$ se il top è rotto. Quindi la magnetizzazione rimanente m è uguale al doppio della frazione di legami top ferromagnetici. Ora la probabilità che un legame J sia un top è

$$\left[\int_{-|J|}^{|J|} P(J') dJ' \right]^2 , \quad (10.20)$$

e la probabilità che sia un top non rotto è

$$\frac{1}{2} \left[\int_{-|J|}^{|J|} P(J') dJ' \right]^2 , \quad (10.21)$$

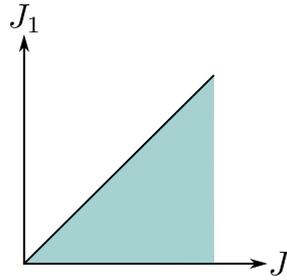
per cui

$$m_R(J) = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\int_{-|J|}^{|J|} P(J') dJ' \right)^2 \right] , \quad (10.22)$$

e quindi la magnetizzazione media rimanente per spin è:

$$\begin{aligned} m_R &= \int_{-\infty}^{\infty} dJ P(J) 2 \frac{1}{2} \left[\int_{-|J|}^{|J|} P(J') dJ' \right]^2 = 8 \int_0^{\infty} P(J) dJ \left[\int_0^{|J|} P(J') dJ' \right]^2 = \\ &= 8 \int_0^{\infty} P(J) dJ \int_0^{|J|} P(J_1) dJ_1 \int_0^{|J|} P(J_2) dJ_2 = \frac{8}{3} \left[\int_0^{\infty} P(J) dJ \right]^3 = \frac{1}{3} , \\ &\rightarrow \boxed{m_R = \frac{1}{3}} . \end{aligned} \quad (10.23)$$

Diamo ora un argomento semplice che mostra perchè la magnetizzazione rimanente decade logicamente al suo valore d'equilibrio. Dopo il rilassamento iniziale i difetti d'energia saranno concentrati sui bottom o in prossimità dei bottom a bassa temperatura. Abbiamo visto che metà delle valli saranno occupate. Ora il sistema deve disperdere questi difetti di energia per raggiungere l'equilibrio. Differenti difetti nel sistema devono sormontare differenti barriere per incontrarsi con altri difetti di energia e annichilarsi a coppie. Ricordiamo che gli spin che devono essere flippati sono quelli uniti dai top ferromagnetici e ogni coppia flipperà



quando un difetto di energia si arrampica sul top. Quindi il rate di cambiamento della magnetizzazione è proporzionale al rate a cui i top vengono saltati e quindi:

$$\boxed{\frac{dm}{dt} \approx -\lambda m}, \quad (10.24)$$

che usando la soluzione diventa

$$\frac{dm}{dt} \sim -m_0 \lambda e^{-\lambda t}. \quad (10.25)$$

Questo vale per una data barriera per la quale il tempo di salto è $\frac{1}{\lambda}$. Quindi mediando sulle varie barriere otteniamo

$$\frac{d}{dt} \langle m \rangle \sim -\frac{1}{3} \int_0^\infty \lambda P(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda, \quad (10.26)$$

dove $P(\lambda)$ è la densità di probabilità che il tempo di salto di una barriera sia $\frac{1}{\lambda}$. A questo punto possiamo stimare λ come

$$\lambda \sim \frac{1}{\tau} e^{-\beta \Delta E}, \quad (10.27)$$

dove ΔE è l'energia di attivazione, cioè l'energia necessaria per arrampicarsi sulla barriera e τ è un tempo tipico della dinamica di rilassamento. (Ad esempio il tempo di un Montecarlo-step per spin).

Facendo il cambio di variabili

$$\begin{aligned} P(\lambda) \left| \frac{d\lambda}{d(\Delta E)} \right| &= P(\Delta E), \\ \rightarrow \beta \lambda P(\lambda) &= P(\Delta E), \end{aligned} \quad (10.28)$$

otteniamo

$$\frac{d}{dt} \langle m \rangle \sim +\frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(\Delta E)}{\beta} \exp\left(-\frac{t}{\tau} e^{-\beta \Delta E}\right) d\Delta E. \quad (10.29)$$

Assumiamo ora che

$$P(\Delta E) \sim \begin{cases} \text{cost} & \Delta E \leq \Delta J \\ 0 & \Delta E > \Delta J \end{cases} \quad (10.30)$$

e allora

$$\beta\lambda P(\lambda) \sim \begin{cases} \text{cost} & \frac{A}{\tau} < \lambda < \frac{1}{\tau} \\ 0 & \text{fuori} \end{cases} \quad \text{con } A = e^{-\beta\Delta J} \quad (10.31)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle m \rangle &\sim -\frac{1}{3\beta\Delta J} \int_{\lambda_1}^{\frac{1}{\tau}} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad \lambda_1 = \frac{1}{\tau} e^{-\beta\Delta J}, \\ &= -\frac{1}{3\beta\Delta J} \frac{e^{-\lambda_1 t} - e^{-t/\tau}}{t}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Ora per

$$\frac{t}{\tau} \gtrsim 1 \quad \text{e} \quad \lambda_1 t \lesssim 1 \quad \rightarrow \quad \frac{t}{\tau} e^{-\beta\Delta J} \lesssim 1 \quad \rightarrow \quad \log\left(\frac{t}{\tau}\right) \lesssim \beta\Delta J, \quad (10.33)$$

quindi

$$\frac{d}{dt}\langle m \rangle \sim -\frac{1}{3\beta\Delta J} \frac{1}{t}, \quad \langle m \rangle \sim -\frac{1}{3\beta\Delta J} \int_{\tau}^t \frac{1}{t'} dt', \quad (10.34)$$

da cui otteniamo infine:

$$\boxed{\langle m \rangle \sim \frac{1}{3} - \frac{kT}{3\Delta J} \log\left(\frac{t}{\tau}\right)}. \quad (10.35)$$

FLAVIANO MORONE - MECCANICA STATISTICA

Chapter 11

Modello di Ising in un campo magnetico aleatorio

Vogliamo dimostrare l'equivalenza, vicino al punto critico, di un sistema di spin D -dimensionale in campo magnetico esterno random con un sistema di spin $(D-2)$ -dimensionale in assenza di campo magnetico.

Definiamol'energia libera mediata su un campo magnetico random distribuito gaussianamente attraverso l'integrale funzionale

$$\begin{aligned} F[h] &= \log \int \delta\phi \exp \left[- \int d^D x \mathcal{L}(x) + h(x)\phi(x) \right] , \\ \mathcal{F} &= \int \delta h F[h] \exp \left[- \frac{1}{2} \int d^D x h^2(x) \right] , \\ \mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{2}\phi(x)\Delta\phi(x) + V(\phi(x)) , \end{aligned} \quad (11.1)$$

ad esempio $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\phi^4$.

Nell'espansione perturbativa di $F[h]$ teniamo solo i diagrammi ad albero (ci interessa solo il comportamento infrarosso della teoria). L'approssimazione ad albero corrisponde all'approssimazione semiclassica ottenuta mediante il metodo del punto di sella. Quindi avremo

$$F[h] \sim \log e^{-\mathcal{S}(\phi_0, h)} , \quad (11.2)$$

dove \mathcal{S} è valutata intorno alla soluzione dell'equazione del moto:

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi} = 0 \rightarrow -\Delta\phi_0 + V'(\phi_0) + h = 0 , \quad (11.3)$$

e assumiamo che $\phi_0 \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$, cosicché la soluzione è unica.

In questa approssimazione

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle_h = \frac{\int \delta\phi \phi(x)\phi(0) e^{-\mathcal{S}(\phi, h)}}{\int \delta\phi e^{-\mathcal{S}(\phi, h)}} \sim \frac{\phi_0(x)\phi_0(0) e^{-\mathcal{S}_0(\phi_0, h)}}{e^{-\mathcal{S}_0(\phi_0, h)}} = \phi_0(x)\phi_0(0) . \quad (11.4)$$

Mediando su h avremo

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle \sim \int \delta h \phi_0(x)\phi_0(0) \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x h^2(x) \right] . \quad (11.5)$$

Usando il fatto che

$$\int \delta \chi \delta[\chi] = 1 = \int \delta[-\Delta\phi + V'(\phi) + h] \left| \det[-\Delta + V''(\phi)] \right| \delta\phi . \quad (11.6)$$

Inseriamo l'identità scritta in questo modo. Grazie alla δ possiamo sostituire ϕ_0 con ϕ e inoltre possiamo omettere il segno del determinante (perché non si annulla mai). Quindi avremo

$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle \sim \int \delta\phi \delta h \phi(x)\phi(0) \delta(-\Delta\phi + V'(\phi) + h) \det[-\Delta + V''(\phi)] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x h^2(x) \right] . \quad (11.7)$$

Ora

$$\det[-\Delta + V''(\phi)] = \int \delta c \delta \bar{c} \exp \left\{ - \int \bar{c} [-\Delta + V''(\phi)] c d^D x \right\} . \quad (11.8)$$

Passando inoltre alla trasformata di Fourier funzionale della δ otteniamo

$$\delta(-\Delta\phi + V'(\phi) + h) = \int \delta\lambda \exp \left[i \int d^D x \lambda(x) (-\Delta\phi + V'(\phi) + h) \right] . \quad (11.9)$$

Avremo

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)\phi(0) \rangle \sim & \int \delta\phi \delta h \delta\lambda \phi(x)\phi(0) \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x h^2(x) + \right. \\ & \left. + i \int d^D y \lambda(y) (-\Delta\phi + V'(\phi) + h) \right] \det[-\Delta + V''(\phi)] . \end{aligned} \quad (11.10)$$

A questo punto l'intergrale è gaussiano in h e si risolve cercando i punti stazionari e facendo un cambio di variabile. I punti stazionari soddisfano:

$$h(x) - i\lambda(x) = 0 . \quad (11.11)$$

Facendo il cambio

$$h(x) = h'(x) + \tilde{h}(x) , \quad (11.12)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} & \int \delta h \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x (h^2(x) - 2i\lambda(x)h(x)) \right] = \\ & = \int \delta h' \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^D x ((h')^2 + \tilde{h} + 2h'\tilde{h} - 2i\lambda h' - 2i\lambda\tilde{h}) \right] = \\ & = \exp \left(\frac{1}{2} i\lambda\tilde{h} d^D x \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda^2(x) d^D x \right) . \end{aligned} \quad (11.13)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\langle \phi(x)\phi(0) \rangle &\sim \int \delta\phi\delta\lambda \phi(x)\phi(0) e^{-\frac{1}{2} \int \lambda^2(x) d^D x + \int \lambda(x) [-\Delta\phi + V'(\phi)] d^D x} \det[-\Delta + V''(\phi)] = \\
&= \int \delta\phi\delta\lambda\delta c\delta\bar{c} e^{-\frac{1}{2} \int \lambda^2(x) d^D x + \int \lambda(x) [-\Delta\phi + V'(\phi)] d^D x} e^{-\int d^D x \bar{c}(x) [-\Delta\phi + V'(\phi)] c(x)} \phi(0)\phi(x) = \\
&= \int \delta\phi\delta\lambda\delta c\delta\bar{c} \exp\left(-\int d^D x \tilde{L}\right) \phi(0)\phi(x),
\end{aligned} \tag{11.14}$$

con

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \lambda^2(x) - \lambda(x) (-\Delta\phi + V'(\phi)) + \bar{c}[-\Delta + V''(\phi)]c. \tag{11.15}$$

\tilde{L} è invariante sotto le **trasformazioni supersimmetriche**

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\phi &= -\bar{a}\epsilon_\mu x_\mu c & \delta c &= 0 \\ \delta\lambda &= 2\bar{a}\epsilon_\mu \partial_\mu c & \delta\bar{c} &= \bar{a}(\epsilon_\mu x_\mu \lambda + 2\epsilon_\mu \partial_\mu \phi) \end{aligned}}. \tag{11.16}$$

Introduciamo ora il superspazio, caratterizzato da D dimensioni x_i , con x_i coordinate commutanti, e 2 dimensioni $\theta, \bar{\theta}$, con θ e $\bar{\theta}$ variabili grassmaniane. Inoltre introduciamo il supercampo:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi(x) + \bar{\theta}c(x) + \bar{c}(x)\theta + \bar{\theta}\theta\lambda(x). \tag{11.17}$$

Si verifica che

$$\int \tilde{L}(\phi, c, \bar{c}, \lambda) d^D x = \int \mathcal{S}_{\text{SUSY}}(\Phi) d^D x d\theta d\bar{\theta}, \tag{11.18}$$

con

$$\mathcal{S}_{\text{SUSY}}(\Phi) = -\frac{1}{2} \Phi \Delta_{\text{SS}} \Phi + V(\Phi), \tag{11.19}$$

con

$$\Delta_{\text{SS}} = \Delta + \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\bar{\theta}} \tag{11.20}$$

il laplaciano nel superspazio.

Le trasformazioni di supersimmetria a questo punto sono semplicemente rotazioni nel superspazio che lasciano invariante la metrica $x^2 + \bar{\theta}\theta$.

L'interpretazione delle due coordinate grassmaniane è che esse equivalgono a sottrarre (piuttosto che aggiungere) 2 dimensioni allo spazio D -dimensionale, in integrali invarianti per **rotazioni**. Per dimostrare ciò consideriamo un integrale nel superspazio $(x, \theta, \bar{\theta})$ e sia f una funzione con decrescita rapida all'infinito. Consideriamo l'integrale

$$-\frac{1}{\pi} \int d^D x d\theta d\bar{\theta} f(x^2 + \theta\bar{\theta}) = -\frac{1}{\pi} \int d^D x f'(x^2). \tag{11.21}$$

Usiamo le coordinate polari $x^2 = r$, $S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$. Avremo

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi} \int d^D x f'(r^2) &= -\frac{S_D}{\pi} \int r^{D-1} dr f'(r^2) = -\frac{S_D}{2\pi} \int r^{D-2} dr^2 f'(r^2) = \\
&= \frac{S_D}{2\pi} \left(\frac{D-2}{2} \right) \int (r^2)^{\frac{D}{2}-2} f(r^2) dr^2 = \frac{S_D}{2\pi} \left(\frac{D-2}{2} \right) \int (r)^{k-2} f(r^2) dr^2 = \\
&= \frac{S_D}{2\pi} \frac{k}{2} \int r^{k-1} f(r^2) dr = \frac{S_D}{2\pi} k \int r^{k-1} f(r^2) dr,
\end{aligned} \tag{11.22}$$

dove $k = D - 2$. Ora

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} = \frac{2\pi^{\frac{D-2}{2}} \pi}{\Gamma\left(\frac{D}{2}-1\right) \left(\frac{D}{2}-1\right)} = \frac{S_k 2\pi}{k}. \tag{11.23}$$

Allora

$$\frac{k}{2\pi} \frac{2\pi}{k} S_k \int r^{k-1} dr f(r^2) = \int d^k r f(r^2) = \int d^{D-2} x f(x^2), \tag{11.24}$$

e quindi

$$\boxed{-\frac{1}{\pi} \int d^D x d\theta d\bar{\theta} f(x^2 + \theta\bar{\theta}) = \int d^{D-2} x f(x^2)}. \tag{11.25}$$

Questa equazione è sufficiente a dimostrare che le funzioni di Green calcolate nello spazio $(D-2)$ -dimensionale sono le stesse di quelle nel superspazio D -dimensionale.

La conclusione è che il modello D -dimensionale supersimmetrico (che è il modello originario con campo random h) è equivalente ad un modello puramente bosonico (cioè un modello ferromagnetico puro senza campo aleatorio) in $(D-2)$ dimensioni.

Quindi, ad esempio, nel modello bosonico sappiamo che $D_L^c = 1$, quindi ci aspettiamo che in un modello con campo magnetico aleatorio $D_L^c = 3$.

11.1 Argomento di Imry e Ma

Consideriamo un ferromagnete di Ising in campo magnetico aleatorio in D dimensioni:

$$H = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i, \tag{11.26}$$

con h_i indipendenti distribuiti gaussianamente

$$P(h_i) \sim e^{-h_i^2/2\epsilon} \quad h_i \bar{h}_j = h^2 \delta_{ij}. \tag{11.27}$$

Supponiamo che il sistema in presenza di un campo esterno random si magnetizzi spontaneamente. Vogliamo vedere se l'ordine a lungo raggio è stabile rispetto alla formazione di domain-wall, cioè pareti fra regioni con valori differenti del parametro d'ordine.

Poiché il campo random varia da punto a punto, ci saranno regioni nelle quali alla magnetizzazione converrà riorientarsi in modo da abbassare l'energia di interazione nel campo esterno locale. Si formerà, allora, un dominio a patto che la sua parete non costi troppa energia. Poiché il campo ha fluttuazioni gaussiane, il suo valor medio su un dominio è proporzionale a $L^{d/2}$. Quindi riorientandosi il dominio guadagna un'energia proporzionale a $L^{d/2}$. D'altra parte perde un'energia a causa della parete che è proporzionale a L^{d-1} . Quindi il costo energetico di un dominio è

$$U = c_1 L^{d-1} - c_2 L^{d/2} = c_1 L^{d-1} \left(1 - \frac{c_2}{c_1} L^{-\frac{d+2}{2}} \right). \quad (11.28)$$

Di conseguenza, se $d > 2$ per L sufficientemente grande, U sarà positiva e quindi la formazione del dominio è energeticamente sfavorita e di conseguenza l'ordine a lungo raggio è stabile.

Se $d < 2$ per L sufficientemente grande, U è negativa e il dominio si formerà distruggendo l'ordine a lungo raggio.

Per $d = 2$ il termine negativo domina ancora per L abbastanza grande, perché si tratta di un'energia di volume contrapposta ad un'energia di superficie e quindi il dominio si forma. La **dimensione critica inferiore** è quindi $D_L^c = 2$ (e non $D_L^c = 3$).

FLAVIANO MORONE - MECCANICA STATISTICA

Chapter 12

Vetri di spin

- Un vetro di spin è una collezione di spin il cui stato di bassa temperatura è uno stato **disordinato congelato**. Per produrre un tale stato occorre competizione tra le differenti interazioni tra i momenti, nel senso che non c'è una singola configurazione favorita dalle interazioni (**frustrazione**), e queste interazioni devono essere almeno parzialmente random.

- Come osserviamo un tale stato?

La descrizione "disordine congelato" suggerisce che stiamo considerando uno stato in cui la magnetizzazione locale spontanea $m_i \langle \sigma_i \rangle$ in un dato sito i è non nulla sebbene la magnetizzazione media $m = \frac{1}{N} \sum_i m_i$ è zero. Lo stato di bassa temperatura non è antiferromagnetico come indicano gli esperimenti di scattering con neutroni, che non mostrano picchi di Bragg magnetici che indicherebbero ordine a lungo raggio.

Ora, le magnetizzazioni spontanee fanno sentire la loro presenza in un esperimento poiché **riducono** la suscettività dal valore che essa avrebbe altrimenti.

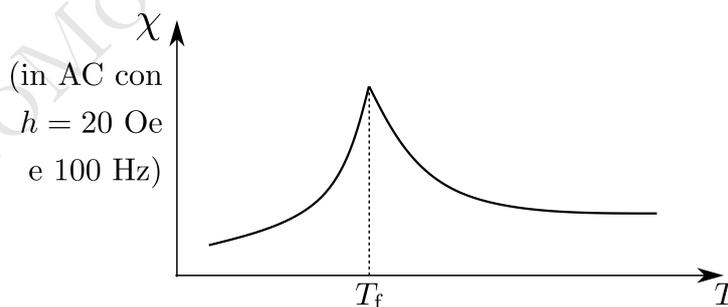


Figure 12.1: La suscettività esibisce una cuspidè marcata suggerendo una transizione di fase del 2° ordine tra stato paramagnetico disordinato e uno stato di spin glass caratterizzato da magnetizzazioni locali spontanee m_i non nulle.

Per rendere più esplicita la connessione tra suscettività e l'esistenza di momenti congelati supponiamo di avere un sistema di Ising e consideriamo la suscettività di singolo sito χ_{ii} (definita come la quantità di magnetizzazione m_i indotta in un

sito i da un campo esterno h_i che agisce solo su questo sito):

$$\chi_{ii} = \frac{\partial m_i}{\partial h_i}. \quad (12.1)$$

Per il teorema di fluttuazione-dissipazione

$$\chi_{ii} = \beta \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\text{connessa}} = \beta(1 - m_i^2). \quad (12.2)$$

Se mediamo su tutti i siti nel sistema otteniamo

$$\chi_{\text{loc}} = \frac{1}{N} \sum_i \chi_{ii} = \frac{1}{N} \beta \sum_i (1 - m_i^2) = \beta - \frac{\beta}{N} \sum_i m_i^2 = \beta \left(1 - \frac{1}{N} \sum_i m_i^2 \right), \quad (12.3)$$

e quindi otteniamo una riduzione della suscettività locale media rispetto al valore che essa avrebbe se i momenti fossero liberi. In questo modo la misura di questa riduzione è una misura della magnetizzazione spontanea locale quadratica media nello stato **congelato**.

- La temperatura di freezing T_f , definita dalla cuspidè nella suscettività AC, appare dipendere dalla frequenza del campo magnetico applicato. La vera T_f dovrebbe dunque essere definita dal limite $\omega \rightarrow 0$.

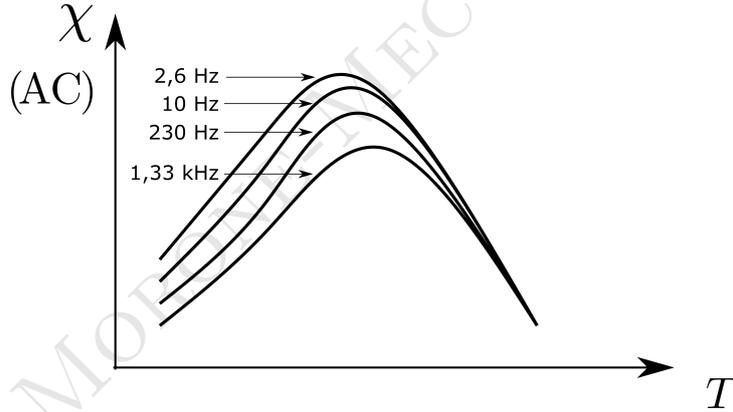


Figure 12.2: La dipendenza dalla frequenza si estende su molti ordini di grandezza, dalle frequenze microscopiche caratteristiche, fino all'inverso del tempo di misura sperimentale più lungo. Questa caratteristica pone gli spin-glass in una categoria a parte rispetto ai magneti convenzionali, dove non si osserva nessuna dipendenza dalla frequenza per frequenze molto più basse delle frequenze microscopiche del sistema.

- La presenza di questo comportamento "vetroso" con tempi caratteristici così lunghi suggerisce la possibile presenza di molti stati (configurazioni di spin) metastabili con una certa distribuzione di barriere di energia che li separa.

- Un'altra caratteristica importante di tutti gli **spin-glass** è l'effetto di rimanenza sotto T_f . Per illustrare questo fenomeno osserviamo il comportamento della suscettività in DC. Si osserva che, per $T < T_f$, χ_{DC} dipende fortemente dal modo in cui l'esperimento è effettuato.

Supponiamo di applicare un campo esterno sopra T_f e quindi di raffreddare il campione in questo campo sotto T_f . Questo processo risulta reversibile, cioè si può andare su e giù in temperatura e misurare la stessa magnetizzazione, indipendentemente dalla storia (come in figura 12.3).

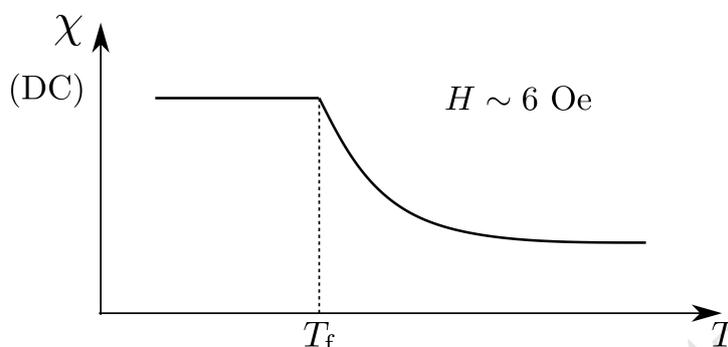


Figure 12.3

Mentre se raffreddiamo il campione in campo zero sotto T_f e poi applichiamo un campo osserviamo l'andamento in figura 12.4.

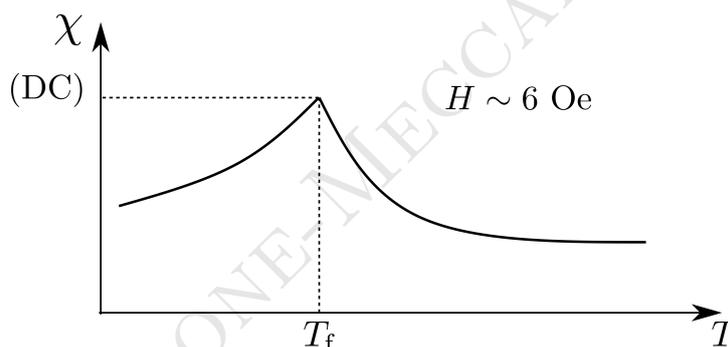


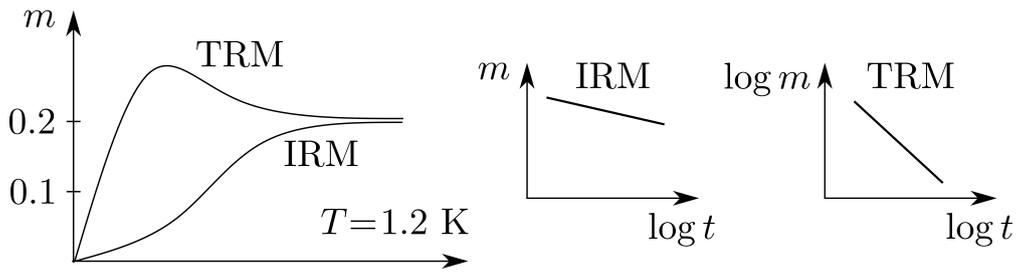
Figure 12.4

Il motivo di questo comportamento è sempre la natura di spin-glass del sistema sotto T_f , cioè ci sono molte configurazioni di spin equivalenti e lo stato che è raggiunto dipende crucialmente dai dettagli dell'esperienza (come frequenza e intensità del campo applicato, velocità a cui si raffredda e se si raffredda in campo zero oppure no).

- Un'altra differenza è presente a campi più intensi tra la magnetizzazione rimanente quando si raffredda a campo zero (nel qual caso il campo è applicato a una certa temperatura di misura e poi spento di nuovo)-**IRM**- e la magnetizzazione termorimanente-**TRM**- che è la magnetizzazione rimanente quando il campo è spento dopo il raffreddamento.

- In un ferromagnete, l'approccio alla fase ferromagnetica quando si abbassa la temperatura verso T_c è accompagnato da una crescita nel range (supporto) delle correlazioni di spin, che poi diverge a T_c . Poiché

$$\chi_{ij} = \frac{\partial m_i}{\partial h_j} = \beta \langle (\sigma_i - \langle \sigma_i \rangle) (\sigma_j - \langle \sigma_j \rangle) \rangle, \quad (12.4)$$



questo porta ad una χ divergente al punto di Curie.

Un fenomeno corrispondente capita anche nei vetri di spin, ma non è la funzione di correlazione di spin $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ che acquista un comportamento a lungo raggio (ci aspettiamo che la casualità sia sufficientemente forte che in media la correlazione non si estende su più di pochi spin), ma piuttosto il suo quadrato. Questo porta alla divergenza, nel punto di transizione, della quantità

$$\chi_{\text{SG}} = \frac{1}{N} \sum_{ij} \chi_{ij}^2 = \frac{\beta^2}{N} \sum_{ij} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^2. \quad (12.5)$$

12.1 La media sul disordine

Normalmente non possiamo calcolare proprietà di un singolo campione con un particolare insieme di valori delle interazioni random J_{ij} anche se le conoscessimo (in verità lo si potrebbe fare al computer, ma sarebbe più un esperimento che teoria, nel senso che avremmo informazioni sui valori di qualche quantità, ma non una visione chiara della fisica del sistema). Di conseguenza dobbiamo ricorrere a medie statistiche. Nella meccanica statistica ordinaria sappiamo che le fluttuazioni relative dell'energia intorno al suo valor medio termico sono di ordine $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ e di conseguenza si annullano per $N \rightarrow \infty$. Allo stesso modo ci aspettiamo che le sue fluttuazioni da campione a campione vadano a zero nel limite di sistema grande. Una quantità che ha questa proprietà è detta essere **automediante**. Se sappiamo che una quantità è automediante, allora ci aspettiamo gli stessi risultati in esperimenti su differenti campioni macroscopici. Non solo, ma ci aspettiamo anche che un calcolo teorico del valor medio di tale quantità sull'intero ensemble dia la stessa risposta degli esperimenti.

Quindi la strategia generale è sempre cercare di concentrarsi su quantità automedianti e cercare di calcolare i loro valori medi sulla distribuzione delle interazioni random nell'ensemble statistico. Molte quantità non sono automedianti, ad esempio il campo interno locale in un sito particolare i , che dipende sensibilmente dall'ambiente locale. Per le quantità estensive (esprese come somme o integrali sul volume del campione) le fluttuazioni statistiche diventano piccole per campioni grandi, generalmente.

Nella meccanica statistica dei sistemi random dobbiamo effettuare due tipi di media: la media termica usuale da effettuare su ogni campione, e la media sulla distribuzione dei parametri random. Si parte con una funzione di partizione che

è una funzione delle interazioni J per quel campione fissate. Quindi si calcola l'energia libera:

$$F[J] = -\frac{1}{\beta} \log Z[J] . \quad (12.6)$$

Ora $F[J]$ è una variabile estensiva e ci aspettiamo che sia automediante. La quantità sperimentalmente rilevante è dunque

$$F = F[\bar{J}] \equiv \int dP[J] F[J] = -\frac{1}{\beta} \int dP[J] \log Z[J] . \quad (12.7)$$

Quindi dobbiamo mediare $\log Z[J]$ e non $Z[J]$. Questo perché $Z[J]$ non è una quantità estensiva e quindi non ci aspettiamo che sia automediante, cosicché $F[\bar{J}]$ non è una quantità fisicamente rilevante.

La magnetizzazione misurata in un campione è

$$M = M[\bar{J}] = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} \log \bar{Z}[J] , \quad (12.8)$$

e le funzioni di correlazione

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c = -\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial}{\partial h_i \partial h_j} \log \bar{Z}[J] . \quad (12.9)$$

Come si valutano queste medie?

E' spesso utile poter effettuare la media formalmente dall'inizio. Questo ci lascerà con un problema in cui il disordine non appare più esplicitamente. Vediamo quindi che tipo di problema non-random effettivo otteniamo con questo approccio.

- Notiamo che se fosse Z piuttosto che $\log Z$ a dover essere mediata, il calcolo potrebbe essere piuttosto semplice.

Modello di Edwards-Anderson (EA). Consideriamo una collezione di spin su un reticolo regolare (invariante per traslazioni) e supponiamo che le interazioni siano random. L'hamiltoniano è

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \quad \sum_i |\vec{\sigma}_i|^2 = 1 , \quad (12.10)$$

dove le J_{ij} sono variabili random indipendenti con una distribuzione che dipende solo dalla separazione $\vec{R}_i - \vec{R}_j$. In particolare è conveniente considerare il caso di una distribuzione gaussiana simmetrica o a doppia δ :

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_{ij}}} e^{-\frac{J_{ij}^2}{2\Delta_{ij}}} , \quad (12.11)$$

$$P(J_{ij}) = \frac{1}{2} \delta[J_{ij} - \Delta_{ij}^{1/2}] + \frac{1}{2} \delta[J_{ij} + \Delta_{ij}^{1/2}] ,$$

con $\Delta_{ij} \equiv \Delta(\vec{R}_i - \vec{R}_j)$. Se prendiamo $\vec{\sigma}_i = \sigma_i = \pm 1$, otteniamo un modello tipo Ising con Δ_{ij} a primi vicini o almeno a corto raggio. Nell'approssimazione di

campo medio o di range infinito, Δ_{ij} è indipendente da i e j . In questo caso si ha il modello di **Sherrington-Kirkpatrick** (SK).

Consideriamo per esempio un modello di Ising EA con distribuzione dei legami gaussiana. Avremo

$$Z[J] = \sum_{\{\sigma\}} \int \prod_{\langle ij \rangle} \frac{dJ_{ij}}{\sqrt{2\pi\Delta_{ij}}} \exp\left(-\frac{J_{ij}^2}{2\Delta_{ij}} + \beta J_{ij} \sigma_i \sigma_j\right), \quad (12.12)$$

e ciascun integrale potrebbe essere risolto completando il quadrato.

Comunque è chiaro che mediare Z dà la fisica sbagliata. L'espressione per $\overline{Z[J]}$ ha la forma di una funzione di partizione per un **sistema non random** in cui sia gli spin che le J_{ij} sono variabili termodinamiche su cui andiamo a tracciare. In altre parole, sia gli spin σ_i che J_{ij} sono liberi di prendere valori che tendono a minimizzare l'energia totale e efficace

$$H_{\text{annealed}}[\sigma, J] = \sum_{\langle ij \rangle} \left(\frac{J_{ij}^2}{2\Delta_{ij}\beta} - J_{ij} \sigma_i \sigma_j \right). \quad (12.13)$$

Ma la situazione reale è che le J_{ij} sono fissate per ciascun campione. Si può immaginare di riscaldare il campione cosicché le interazioni tra gli spin cambino il loro valore e vengano all'equilibrio con gli spin. Questo tipo di sistema è chiamato **annealed** ed è descritto dall'hamiltoniano H_{ann} . Nel tipo di materiali che ci interessano le J_{ij} sono congelate in valori fissati dal rapido raffreddamento. Un tale sistema è detto **quenched** e le J_{ij} variabili quenched. La media $\overline{\log Z}$ è detta una media quenched.

Per effettuare la media $\overline{\log Z[J]}$ si ricorre al **metodo delle repliche**. Questo metodo fa uso dell'identità

$$\log Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n}, \quad (12.14)$$

e del fatto che $\overline{Z^n}$ si può calcolare per n intero quasi come \overline{Z} . Ora

$$\overline{Z^n[J]} = \sum_{\{\sigma^1\}} \cdots \sum_{\{\sigma^n\}} \exp\left(-\beta \sum_{\alpha=1}^n H[\sigma^\alpha, J]\right), \quad (12.15)$$

dove la distribuzione delle J è la stessa per tutte le repliche (stesso disordine). α è un indice di replica.

La media di $Z^n[J]$ sulla distribuzione di legame gaussiana è

$$\begin{aligned} \overline{Z^n[J]} &= \sum_{\{\sigma^\alpha\}} \int \prod_{\langle ij \rangle} \frac{dJ_{ij}}{\sqrt{2\pi\Delta_{ij}}} \exp\left(-\frac{J_{ij}^2}{2\Delta_{ij}} + \beta J_{ij} \sum_{\alpha} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha\right) = \\ &= \sum_{\{\sigma^\alpha\}} \exp\left[\sum_{\langle ij \rangle} \left(\beta \sum_{\alpha} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha\right)^2 \frac{\Delta_{ij}}{2}\right] = \sum_{\{\sigma^\alpha\}} \exp\left[\frac{1}{4}\beta^2 \sum_{\langle ij \rangle} \Delta_{ij} \sum_{\alpha, \beta} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \sigma_i^\beta \sigma_j^\beta\right] = \\ &= \sum_{\{\sigma^\alpha\}} e^{-\beta H_{\text{eff}}}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Riassumendo

$$\overline{Z^n[J]} = \sum_{\{\sigma^\alpha\}} \exp \left[\frac{1}{4} \beta^2 \sum_{\langle ij \rangle} \Delta_{ij} \sum_{\alpha, \beta} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \sigma_i^\beta \sigma_j^\beta \right] = \sum_{\{\sigma^\alpha\}} e^{-\beta H_{\text{eff}}} , \quad (12.17)$$

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \beta \sum_{\langle ij \rangle} \Delta_{ij} \sum_{\alpha, \beta} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \sigma_i^\beta \sigma_j^\beta$$

Il problema disordinato è stato convertito in un problema non random che coinvolge interazioni a 4 spin tra spin a n componenti

$$\sigma_i^\alpha = \begin{pmatrix} \sigma_i^1 \\ \vdots \\ \sigma_i^n \end{pmatrix} . \quad (12.18)$$

Dopo aver risolto questo problema per n arbitrario dobbiamo prendere il limite $n \rightarrow 0$.

L'hamiltoniana è invariante sotto l'operazione d'inversione di tutti gli spin

$$\sigma_i^\alpha \rightarrow -\sigma_i^\alpha \quad \forall \alpha , \quad (12.19)$$

ma anche sotto permutazioni nello spazio degli indici di replica

$$\sigma_i^\alpha \rightarrow \sigma_i^\beta \quad \forall \alpha, \beta \quad \text{e} \quad \forall i . \quad (12.20)$$

Per descrivere uno stato di simmetria rotta abbiamo bisogno di un parametro d'ordine. Quale tipo di parametro d'ordine è possibile per questo modello? Il tipo più semplice sarebbe uno del tipo $\langle \sigma_i^\alpha \rangle$. Questo è infatti il tipo di parametro d'ordine che sarebbe importante in un magnete random ordinato ferromagneticamente e, infatti, si può usare quando studiamo sistemi in cui gli ordinamenti per ferromagnetici e di spin-glass competono. Ma un altro tipo di possibile quantità che potrebbe descrivere uno stato di simmetria spontaneamente rotta è la matrice $\langle \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta \rangle$, una sorta di parametro d'ordine "quadripolare" nello spazio delle repliche.

12.2 Parametro d'ordine di spin-glass e rottura di ergodicità

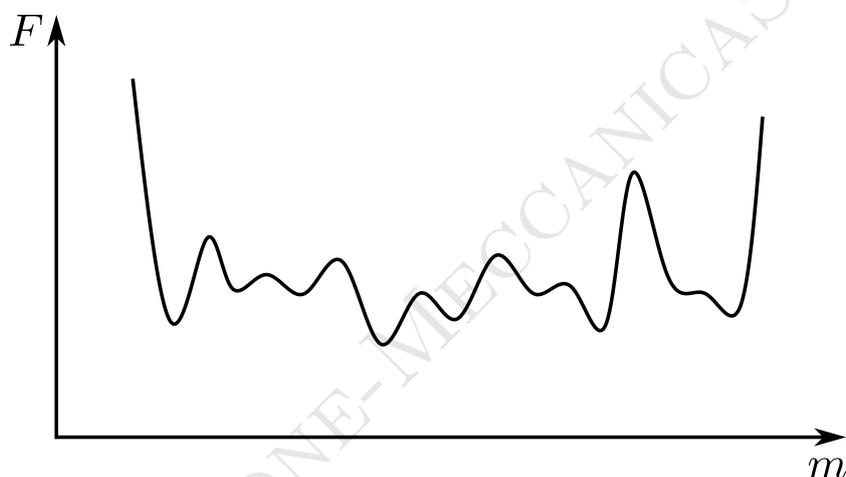
Se uno stato di **spin-glass** è qualitativamente differente da una fase paramagnetica disordinata, vorremmo caratterizzare la differenza attraverso un parametro d'ordine. Supponiamo che così come uno stato ferromagnetico puro è descritto da un valore non nullo di $M = \langle \sigma_i \rangle$, che è indipendente da i , uno stato di spin-glass è caratterizzato, sotto una temperatura di transizione (freezing), da

$$m_i \equiv \langle \sigma_i \rangle \neq 0 , \quad (12.21)$$

senza alcun ordine periodico a lungo raggio nei loro valori. Dobbiamo fare attenzione al significato preciso di media termica che appare qui. Se fosse una media

su **tutto** lo spazio delle configurazioni, allora si annullerebbe identicamente in assenza di campi esterni (H è simmetrica per $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$). Al fine di ottenere un valore non nullo possiamo restringere la media termica *ad hoc* in un'opportuna regione dello spazio delle configurazioni (ad esempio restringere la media a stati con magnetizzazione totale positiva in un ferromagnete), oppure applicare un piccolo campo esterno che varia da sito a sito, che abbia lo stesso effetto (e poi prendiamo $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty}$ e non l'inverso). Ora, se lo spin-glass ha una sola coppia di stati stabili collegati da uno spin-flip globale, allora si può usare anche un campo esterno **uniforme** per selezionare uno dei due stati.

Comunque in un vetro di spin dobbiamo considerare anche le possibilità di una rottura di ergodicità non banale, cioè il caso in cui ci sono molti stati stabili. Si può visualizzare questa situazione come un paesaggio a molte valli nell'energia libera. Cioè si immagina di poter imporre al sistema magnetizzazioni locali arbitrarie m_i e, per ciascun insieme di valori, calcolare l'energia libera $F(m_1, \dots, m_N)$. I minimi



locali di F , cioè le soluzioni di $\frac{\partial F}{\partial m_i} = 0$ con autovalori della matrice $\frac{\partial^2 F}{\partial m_i \partial m_j}$ tutti positivi, corrispondono a configurazioni di magnetizzazione localmente stabili. Se nel limite di grandi N qualche barriera tra questi minimi diventa infinita, allora possiamo dividere l'intero spazio degli stati in valli mutuamente inaccessibili. Ciascuna di queste valli corrisponde ad una fase termodinamica, ovvero ad uno stato (alla stessa stregua degli stati magnetizzati up-down di un ferromagnete).

Etichettiamo questi stati con un indice a che va da 1 al numero N_s di stati e indichiamo con m_i^a le loro magnetizzazioni spontanee locali e con F_a l'energia libera. (All'interno di una data valle possono esserci molte sotto-valli che sono minimi locali di F , ma con barriere finite che le separano. Tutti questi stati, tranne il più basso, corrispondono a configurazioni di magnetizzazione **metastabili**). Microscopicamente, le configurazioni $\{\sigma_i\}$ che contribuiscono alla funzione di partizione in una particolare fase a giacciono tutte nella regione dello spazio delle configurazioni degli spin vicino m_i^a , cioè in una singola valle nel paesaggio dell'energia libera. Sopra T_f questo paesaggio scompare e rimane solo una valle concentrata in $m_i = 0$.

Quando un sistema viene a trovarsi in una di queste valli esibisce **proprietà** che, in generale, **sono specifiche** della data valle— queste proprietà differiscono

dalle vere proprietà di equilibrio, che coinvolgono medie su tutte le valli con appropriati pesi termici relativi-. Per esempio potrebbero esserci valli con magnetizzazioni molto differenti (questa è l'origine della rimanenza osservata in tutti gli spin-glass). Per poter calcolare le proprietà del sistema in una singola valle, la somma sulle configurazioni nella funzione di partizione deve essere ristretta alla valle appropriata. Se ci sono molti stati possibili, allora un campo magnetico infinitesimo esterno scorrelato con ogni m_i^a (per esempio uniforme) non seleziona più una singola fase. Inoltre non sappiamo come usare un campo h_i^a proporzionale a m_i^a per restringere la somma sulle configurazioni, poiché non conosciamo h_i^a a priori (dal momento che non conosciamo m_i^a).

Una conseguenza naturale dell'esistenza di molte fasi è che uno spin-glass non può essere descritto da un **singolo** parametro d'ordine, ma piuttosto ne richiede molti.

Fin qui abbiamo considerato lo stato congelato per un singolo campione, ma vogliamo considerare quantità che sono medie sulla distribuzione dei legami. L'unica quantità bond-mediata che è lineare in $\langle \sigma_i \rangle$ è $\overline{\langle \sigma_i \rangle}$. Questo è il parametro d'ordine di un ferromagnete e dunque non è un parametro d'ordine opportuno per uno spin-glass. Infatti si annulla nel limite di campo esterno nullo se la distribuzione di legame è simmetrica ($\bar{J} = 0$). Dobbiamo cercare momenti di ordine più alto.

Consideriamo, quindi, i possibili tipi di momenti secondi che otteniamo per differenti modi di rottura dell'ergodicità.

- Se consideriamo la rottura di ergodicità come un fenomeno essenzialmente dinamico, il parametro d'ordine più naturale da considerare è quello introdotto originariamente da EA:

$$q_{\text{EA}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\langle \sigma_i(t_0) \sigma_i(t + t_0) \rangle} , \quad (12.22)$$

dove la media è fatta su un grande insieme di tempi di riferimento t_0 . In campo esterno nullo, q_{EA} si annulla se il sistema è ergodico (il sistema perde memoria della condizione iniziale) e sarà non nullo se è intrappolato in una singola fase. Ovviamente bisogna prendere prima $N \rightarrow \infty$ altrimenti il sistema finito si scorrela sempre a tempi lunghi (può passare da una valle all'altra) e q_{EA} farebbe sempre zero.

Perché un sistema infinito non può mai scappare dalla valle in cui si trova, q_{EA} **misura la magnetizzazione spontanea locale quadratica media della singola valle**, mediata su tutte le possibili valli. In altri termini, cioè in termini di medie termiche:

$$q_{\text{EA}} = \overline{\sum_a^{N_s} P_a (m_i^a)^2} , \quad (12.23)$$

con

$$P_a = \frac{e^{-\beta F_a}}{\sum_a e^{-\beta F_a}} . \quad (12.24)$$

Assumendo che q_{EA} sia **automediante**, possiamo anche scrivere

$$q_{\text{EA}} = \frac{1}{N} \sum_a P_a \overline{\sum_i (m_i^a)^2} . \quad (12.25)$$

• q_{EA} non è la magnetizzazione d'equilibrio quadratica media locale che è data da

$$q = \overline{\langle \sigma_i \rangle^2} = \overline{m_i^2} = \overline{\left(\sum_a P_a m_i^a \right)^2} = \overline{\sum_{ab} P_a P_b m_i^a m_i^b} = \frac{1}{N} \sum_i \overline{\sum_{ab} P_a P_b m_i^a m_i^b} . \quad (12.26)$$

Possiamo anche definire una q per un singolo campione:

$$q_J = \frac{1}{N} \sum_i m_i^2 = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{ab} P_a P_b m_i^a m_i^b . \quad (12.27)$$

Inoltre q_J non è automediante, cosiché $\overline{q_J^2} > \overline{q_J}^2$.

Tutte queste quantità si annullano il campo esterno nullo. Per avere un valore non nullo dobbiamo imporre un campo esterno uniforme o random (cioè scorrelato con le magnetizzazioni delle valli) e prendere il limite $h \rightarrow 0$ dopo $N \rightarrow \infty$.

• La misura della suscettività locale dà un'informazione diretta su questi parametri d'ordine. Dalla definizione

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_i \chi_{ii} = \chi_{\text{loc}} = \beta \left(1 - \frac{1}{N} \sum_i m_i^2 \right)} , \quad (12.28)$$

avremo che per un sistema con legami a media nulla in una **singola fase** si misura

$$\tilde{\chi}_{\text{loc}} = \beta(1 - q_{EA}) \quad 1 \text{ FASE} . \quad (12.29)$$

Mentre la suscettività d'equilibrio locale media si ottiene con l'espressione d'equilibrio $m_i = \sum_a P_a m_i^a$ e vale

$$\chi_{\text{loc}} \equiv \overline{\chi_J} = \beta(1 - q) \quad \text{TUTTE LE FASI} . \quad (12.30)$$

• Se abbiamo molte fasi è interessante considerare non solo la magnetizzazione quadrata media in un singolo stato, come in q_{EA} , ma anche la correlazione tra gli stati e cioè l'overlap (per un singolo campione)

$$\boxed{q_{ab} = \frac{1}{N} \sum_i m_i^a m_i^b} . \quad (12.31)$$

Quando a e b variano su un gran numero di fasi, molti valori possibili di q_{ab} si otterranno in generale. E' quindi utile considerare la sua distribuzione. Per un singolo campione avremo

$$P_J(q) \equiv \langle \delta(q - q_{ab}) \rangle \equiv \sum_{ab} P_a P_b \delta(q - q_{ab}) , \quad (12.32)$$

e possiamo definire anche la quantità bond-mediata

$$P(q) \equiv \overline{P_J(q)} . \quad (12.33)$$

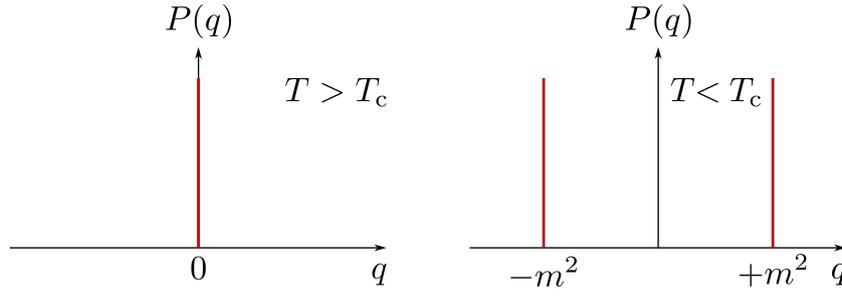


Figure 12.5: $P(q)$ per un ferromagnete.

Se il sistema ha solo 2 fasi, $P(q)$ è proprio la somma di una coppia di funzioni δ . Ad esempio per un ferromagnete si ha il comportamento mostrato in figura 12.5 Possiamo esprimere q in termini di $P(q)$ come

$$\langle q \rangle = \int_{-1}^1 P(q') q' dq' \quad \langle q_J \rangle = \int_{-1}^1 P_J(q') q'_J dq'_J. \quad (12.34)$$

• Il fatto che q o q_J si annulli in campo esterno nullo rende conveniente considerare la quantità

$$q^{(2)} = \lim_{|R_i - R_j| \rightarrow \infty} \overline{\langle \sigma_i \sigma_j \rangle^2}. \quad (12.35)$$

Questo modo di definire un parametro d'ordine è analogo a definire un parametro d'ordine ferromagnetico come

$$m^2 = \lim_{|R_i - R_j| \rightarrow \infty} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle. \quad (12.36)$$

Se c'è rottura di ergodicità avremo $q^{(2)} > q^2$. Infatti in una singola fase a :

$$\lim_{|R_i - R_j| \rightarrow \infty} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_a = m_i^a m_j^a, \quad (12.37)$$

e quindi $q^{(2)}$ può essere scritto come

$$q^{(2)} = \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \overline{\sum_{ab} P_a P_b m_i^a m_j^b m_j^a m_j^b} = \int P(q) q^2 dq > q^2 = \left(\int P(q) q dq \right)^2. \quad (12.38)$$

Vediamo come esprimere i parametri d'ordine di spin-glass nel formalismo delle repliche.

Per cominciare consideriamo il caso di un parametro d'ordine ferromagnetico:

$$M = \overline{m_i} = \frac{\overline{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i e^{-\beta H[\sigma, J]}}}{Z[J]}. \quad (12.39)$$

Moltiplichiamo sopra e sotto, dentro la media su J , per $Z^{n-1}[J]$ e avremo

$$M = \frac{\overline{\sum_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}} \sigma_i^\alpha e^{-\beta \sum_{\gamma=1}^n H[\sigma^\gamma, J]}}}{Z^n[J]}. \quad (12.40)$$

Effettuando la media sui legami otteniamo (tenendo conto che $Z^n \rightarrow 1$ per $n \rightarrow 0$):

$$M = \frac{\sum_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}} \sigma_i^\alpha e^{-\beta H_{\text{eff}}}}{\sum_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}} e^{-\beta H_{\text{eff}}}} = \langle \sigma_i^\alpha \rangle_{\text{eff}} , \quad (12.41)$$

cioè la media è una media termica su un ensemble con hamiltoniano efficace H_{eff} . La soluzione non deve dipendere dall'indice di replica α se la simmetria delle repliche non è rotta. • Consideriamo ora il caso di un parametro d'ordine di spin-glass q :

$$\begin{aligned} q = \overline{\langle \sigma_i \rangle^2} &= \frac{\overline{\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i e^{-\beta H[\sigma, J]} \sum_{\{\mu\}} \mu_i e^{-\beta H[\mu, J]}}}{Z^2[J]} = \frac{\overline{\sum_{\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}} \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta e^{-\beta \sum_{\gamma=1}^n H[\sigma^\gamma, J]}}}{Z^n[J]} = \\ &= \langle \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta \rangle_{\text{eff}} \equiv q^{\alpha\beta} \quad \forall \alpha, \beta \quad \text{con} \quad \alpha \neq \beta . \end{aligned} \quad (12.42)$$

Se la soluzione rompe la simmetria delle repliche si deve mediare su tutti i modi possibili in cui si può rompere e cioè avremo

$$q = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\alpha \neq \beta} q^{\alpha\beta} , \quad (12.43)$$

e analogamente

$$q^{(2)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\alpha \neq \beta} (q^{\alpha\beta})^2 , \quad (12.44)$$

e quindi

$$P(q) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\alpha \neq \beta} \delta(q - q^{\alpha\beta}) , \quad (12.45)$$

($P(q) = \overline{P_J(q)} = \overline{\sum_{a,b} P_a P_b \delta(q - q^{a\beta})}$). Da qui si può notare che la distribuzione dei valori degli elementi di matrice $q^{\alpha\beta}$ in una soluzione con rottura della simmetria delle repliche deve essere lo stesso tipo di distribuzione degli overlap tra stati differenti quando ci sono molti stati. Così vediamo che c'è un'intima connessione tra **rottura di ergodicità** e **rottura della simmetria delle repliche**.

Possiamo anche identificare q_{EA} con il più grande fra i $q^{\alpha\beta}$ in una soluzione con simmetria delle repliche rotta:

$$q_{\text{EA}} = \max_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta} . \quad (12.46)$$