Ottica viano Morone Flaviano Morone Flaviano Morone

FUMMANONOROME

## Contents

1	Equ	azione delle onde elettromagnetiche	<b>5</b>
	1.1	Velocità di gruppo	6
	1.2	Natura vettoriale della luce	8
	1.3	Flusso di energia e vettore di Poynting	8
	1.4	Polarizzazione lineare	9
	1.5	Polarizzazione parziale	9
	1.6	Polarizzazione circolare ed ellittica	10
	1.7	Rappresentazione matriciale della polarizzazione - calcolo di Jones .	10
	1.8	Riflessione e rifrazione	11
		1.8.1 Ampiezza delle onde riflessa e rifratta	12
	1.9	Angolo di Brewster	15
	1.10	Onda evanescente nella riflessione totale	17
<b>2</b>	Coe	renza e Interferenza	19
	2.1	Principio di sovrapposizione lineare	19
	2.2	Esperimento di Young - divisore di fronte d'onda	20
	2.3	Interferometro di Michelson - divisore di ampiezza	21
	2.4	Teoria della coerenza parziale: visibilità delle frange	23
	2.5	Tempo di coerenza e lunghezza di correlazione	24
	2.6	Coerenza spaziale	28
	2.7	Interferenza con fasci multipli	31
	2.8	Interferometro di Fabry & Perot (etalon)	34
		2.8.1 Risoluzione di un Fabry-Perot	35
3	Diff	razione	39
	3.1	Formula di Kirchhoff-Fresnel	40
	3.2	Principio di Babinet	41
	3.3	Diffrazione di Fresnel e di Fraunhofer	42
		3.3.1 Pattern diffrattivo di Fraunhofer	43
	3.4	Reticolo di diffrazione	47
		3.4.1 Potere risolutiovo del reticolo	49
		3.4.2 Pattern diffrattivo di Fresnel	50
4	Otti	ica dei solidi	57
	4.1	Equazione d'onda generale	58
	4.2	Propagazione della luce in dielettrici isotropi: dispersione	59

4.3	Propagazione della luce in mezzi conduttori	62
4.4	Riflessione e rifrazione alla frontiera di un mezzo assorbente	64
4.5	Propagazione della luce nei cristalli	68
4.6	Doppia rifrazione all'interfaccia	71
4.7	Prisma polarizzante	73
Laser		
5.1	Emissione stimolata e radiazione termica	77
5.2	Amplificazione in un mezzo	78
5.3	Sistema a 3 livelli	80

 $\mathbf{5}$ 

FUMMANONORONE

## Chapter 1

## Equazione delle onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti sono

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ,$$
  

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 (\mathbf{J} - \epsilon_0 / \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{t}}) .$$
(1.1)

Se non ci sono sorgenti si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} ,$$
  

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} ,$$
(1.2)

da cui otteniamo l'equazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto

$$\nabla^{2}\mathbf{E} = \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2}\mathbf{E}}{\partial t^{2}} ,$$
  

$$\nabla^{2}\mathbf{H} = \frac{1}{c^{2}} \frac{\partial^{2}\mathbf{H}}{\partial t^{2}} ,$$
(1.3)

(3 equazioni, una per ciascuna componente del campo).

In un mezzo isotropo non conduttore si ha

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\mathbf{u}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \mathbf{t}^2} , \quad \mathbf{u} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \mu}} .$$
 (1.4)

L'indice di rifrazione è definito come

$$n = \frac{c}{u} . (1.5)$$

In mezzi trasparenti (non-magnetici) si ha

$$\mu = \mu_o \mu_r \sim \mu_0 \to u = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \to n = \frac{c}{u} = \sqrt{\epsilon_r} .$$
(1.6)

In generale l'indice di rifrazione varia con la frequenza,  $n = n(\omega)$ . Questo fenomeno è chiamato **dispersione**.

In una dimensione si ha

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad \to \quad U(z,t) = U_0 \cos(kz - \omega t) , \qquad (1.7)$$

dove  $\omega/k = u$ . La lunghezza d'onda è la distanza tra due picchi dell'onda (o tra



Figure 1.1: La distanza tra due punti qualsiasi con la stessa fase è:  $\Delta z = u\Delta t$ , detta **lunghezza d'onda**. La grandezza  $u = \frac{\Delta z}{\Delta t}$  è chiamata **velocità di fase**.

due punti qualsiasi con la stessa fase):

$$\lambda = uT = \frac{\omega}{k} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k} . \tag{1.8}$$

In 3 dimensioni l'equazione dell'**onda piana monocromatica** che generalizza il caso unidimensionale precedente è la seguente:

$$U(\vec{r},t) = U_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) . \qquad (1.9)$$

La radiazione elettromagnetica è prodotto da cariche elettriche oscillanti. Se in una data sorgente le cariche oscillano tutte all'unisono la sorgente è detta essere **coerente**. Al contrario, se le cariche oscillano indipendentemente e casualmente la sorgente è detta **incoerente**.

L'equazione di un'onda sferica si scrive come

$$U(\vec{r},t) = U_0 \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}{r} .$$
 (1.10)

#### 1.1 Velocità di gruppo

Supponiamo di avere due onde di stessa ampiezza, ma frequenze leggermente diverse  $\omega + \Delta \omega$  e  $\omega - \Delta \omega$ . Anche i numeri d'onda saranno in generale diversi, per cui avremo  $k + \Delta k$  e  $k - \Delta k$ . Supponiamo che le due onde si propaghino lungo l'asse z. La loro sovrapposizione sarà data da

$$U = U_0 \exp i[(k + \Delta k)z - (\omega + \Delta \omega)t] + U_0 \exp i[(k - \Delta k)z - (\omega - \Delta \omega)t] =$$
  
=  $U_0 e^{i(kz - \omega t)} \left[ e^{i(\Delta kz - \Delta \omega t)} + e^{-i(\Delta kz - \Delta \omega t)} \right] =$   
=  $2U_0 e^{i(kz - \omega t)} \cos(\Delta kz - \Delta \omega t)$ . (1.11)

L'espressione finale può essere interpretata come una singola onda  $2U_0e^{i(kz-\omega t)}$  che è modulata da  $\cos(\Delta kz - \Delta \omega t)$  come mostrato in figura 1.2. Questa modulazione



Figure 1.2

non viaggia alla velocità di fase  $\omega/k$  delle singole onde, bensì ad una velocità

 $u_{\rm g} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk} , \qquad (1.12)$ 

chiamata velocità di gruppo.

Nei mezzi ottici, in generale, l'indice di rifrazione  $n = \frac{c}{u}$  è una funzione della frequenza (**dispersione**), per cui avremo

$$n = \frac{c}{u} = \frac{c}{\omega}k \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{ck}{n} \quad , \tag{1.13}$$

da cui

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} + ck\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c}{n} - \frac{ck}{n^2}\frac{dn}{dk} = u\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right) .$$
(1.14)

Ora, in un mezzo in cui la velocità di fase (o l'indice di rifrazione) è costante, allora velocità di gruppo e di fase coincidono. Per molti mezzi ottici l'indice di rifrazione cresce con la frequenza, cosicché

$$\frac{dn}{dk} > 0 \tag{1.15}$$

e in tali mezzi la velocità di gruppo è minore della velocità di fase. Poiché ogni segnale può essere considerato come la modulazione di qualche tipo di onda continua, un segnale viaggerà con una velocità di gruppo che generalmente è più piccola della velocità di fase.

#### 1.2 Natura vettoriale della luce

Per onde **piane** valgono le relazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \to -\imath \omega \\ \vec{\nabla} \to \imath \vec{k} \end{cases}$$
(1.16)

Consideriamo le equazioni di Maxwell

da cui otteniamo

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} , \quad \nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} , \quad \nabla \cdot H = 0$$

$$(1.17)$$

$$E = \mu \omega H \qquad \vec{k} \times \vec{E} = \mu \omega \vec{H}$$

 $\vec{k}, \vec{H}, \vec{E}$  costituiscono una terna ortogonale, cioè Il campo elettrico e il campo magnetico sono ortogonali ed entrambi sono perpendicolari alla direzione di propagazione. Quindi le intensità dei campi sono collegate da

$$H = \frac{\epsilon \omega E}{k} = \epsilon u E , \qquad (1.19)$$

e poiché n = c/u possiamo scirvere in<br/>oltre

$$H = \frac{c}{u} \frac{u}{c} \epsilon u E = n \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0^2 \epsilon_r^2}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_0 \mu_0 \mu_r}} E = n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E , \qquad (1.20)$$

che possiamo scrivere come

$$H = \frac{n}{Z}E , \qquad (1.21)$$

dove

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sim 377 \ \Omega \tag{1.22}$$

è l'**impedenza caratteristica del vuoto**. Abbiamo dunque trovato che  $\frac{H}{E} \propto n$ . Ad esempio, passando da aria a vetro ( $n \sim 1.5$ ) questo rapporto cresce di un fattore 1.5.

#### 1.3 Flusso di energia e vettore di Poynting

Il flusso di energia del campo elettromagnetico per unità di superficie è dato dal vettore di Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (W/m^2) . \tag{1.23}$$

Se consideriamo 2 onde piane  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$  e  $\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ , allora possiamo scrivere

$$\vec{S} = \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) , \qquad (1.24)$$

e, mediando, otteniamo

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 . \qquad (1.25)$$

Il vettore di Poynting  $\vec{S}$ ha la stessa direzione del vettore d'onda  $\vec{k},$ cosicché

$$\langle \vec{S} \rangle = I \hat{n} \quad (\hat{n}//\vec{k}) , \qquad (1.26)$$

dove

$$I = \frac{1}{2}E_0H_0 = \frac{n}{2Z}E_0^2 \tag{1.27}$$

è l'irradianza (intensità del flusso di energia).

#### 1.4 Polarizzazione lineare

Consideriamo le onde piane

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ,$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} .$$
(1.28)

Se le ampiezze  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$  sono vettori reali **costanti** l'onda è detta polarizzata **linearmente**.

#### 1.5 Polarizzazione parziale

La luce parzialmente polarizzata può essere considerata un mix di luce polarizzata e non polarizzata. Il grado di polarizzazione in questo caso è definito come la frazione dell'intensità totale che è polarizzata, cioè

$$V = \frac{I_p}{I_p + I_{np}} . \tag{1.29}$$

Nel caso di luce con polarizzazione lineare parziale se consideriamo l'intensità trasmessa da un polarizzatore quando viene fatto ruotare di  $360^{\circ}$  si ha

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} . (1.30)$$

Infatti

e si ritrova la definizione precedente.

#### 1.6 Polarizzazione circolare ed ellittica

L'equazione

$$\vec{E} = E_0[\hat{i}\cos(kz - \omega t) + \hat{j}\sin(kz - \omega t)]$$
(1.32)

rappresenta un'onda in cui il campo elettrico è costante in intensità, ma ruota con una frequenza angolare  $\omega$ . Scrivendo

$$\vec{E} = E_0(\hat{i} \pm i\hat{j})e^{i(kz-\omega t)} , \qquad (1.33)$$

il segno+ descrive la polarizzazione circolare sinistra, mentre il segno- descrive la polarizzazione circolare destra.

L'equazione

$$\vec{E} = E_0 \hat{i} \cos(kz - \omega t) + E'_0 \hat{j} \sin(kz - \omega t) , \qquad (1.34)$$

con  $E_0 \neq E_0',$ rappresenta un'onda in cui il campo elettrico ruota e cambia di intensità. Scrivendo

$$\vec{E}_0 = \hat{i}E_0 + i\hat{j}E'_0 , \qquad (1.35)$$

allora

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} , \qquad (1.36)$$

descrive un'onda polarizzata ellitticamente.

# 1.7 Rappresentazione matriciale della polarizzazione - calcolo di Jones

L'ampiezza complessa precedente

$$\vec{E}_0 = \hat{i}E_0 + i\hat{j}E'_0 , \qquad (1.37)$$

non è la più generale possibile. Un modo più generale è scrivere

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{i} + E_{0y}\hat{j} , \qquad (1.38)$$

con  $E_{0x}, E_{0y} \in \mathcal{C}$ , cosicché

$$\begin{aligned}
E_{0x} &= |E_{0x}|e^{i\phi_x} \\
E_{0y} &= |E_{0y}|e^{i\phi_y} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} E_{0x} \\
E_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_{0x}|e^{i\phi_x} \\
|E_{0y}|e^{i\phi_y} \end{pmatrix} . 
\end{aligned} \tag{1.39}$$

In particolare avremo

$$\begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} \quad \text{polarizz. lineare lungo } x \\ \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} \quad \text{polarizz. lineare lungo } y \\ \begin{pmatrix} 1\\i \end{pmatrix} \quad \text{polarizz. circolare sinistra} \\ \begin{pmatrix} 1\\-i \end{pmatrix} \quad \text{polarizz. circolare destra}$$
 (1.40)

Due onde sono polarizzate ortogonalmente se  $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0.$ 

Un autovettore di una matrice di Jones rappresenta una particolare polarizzazione di un'onda che, al momento del passaggio attraverso l'elemento ottico in questione, emerge con la stessa polarizzazione con cui è entrata (possono cambiare ovviamente ampiezza e fase).

#### 1.8 Riflessione e rifrazione



Figure 1.3: xz: interfaccia. xy: piano d'incidenza.

La dipendenza spazio-temporale delle tre onde incidente, riflessa, e rifratta è data da

$$\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)]$$

$$\exp[i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega t)]$$

$$\exp[i(\vec{k}''\cdot\vec{r}-\omega t)],$$
(1.41)

(per la continuità temporale  $\omega = \omega' = \omega''$ ). Per la continuità spaziale occorre avere invece

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r} = \vec{k}'' \cdot \vec{r} , \qquad (1.42)$$

che implica che i 3 vettori siano complanari e che le loro proiezioni sull'interfaccia siano uguali, e quindi

$$k\sin\theta = k'\sin\theta' = k''\sin\phi . \qquad (1.43)$$

Nel semipiano xy positivo l'onda incidente e l'onda riflessa stanno viaggiando nello stesso mezzo e quindi i vettori d'onda hanno la stessa intensità (la lunghezza d'onda cambia solo attraversando mezzi differenti), e quindi

$$|k| = |k'| \rightarrow \theta = \theta'$$
 legge della riflessione . (1.44)

D'altra parte vale la relazione

$$k\sin\theta = k''\sin\phi , \qquad (1.45)$$

e quindi possiamo scrivere

$$\frac{k}{k''} = \frac{\omega/u}{\omega/u''} = \frac{u''}{u} = \frac{u''/c}{u/c} \to \frac{k''}{k} = \frac{n_2}{n_1} = n , \qquad (1.46)$$

da cui otteniamo la legge di Snell della rifrazione:

$$\boxed{\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{k''}{k} = \frac{n_2}{n_1}}.$$
(1.47)

#### 1.8.1 Ampiezza delle onde riflessa e rifratta

Dalle equazioni di Maxwell sappiamo che

$$\nabla \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \rightarrow \imath \vec{k} \times \vec{H} = -\imath \omega \epsilon \vec{E} ,$$
  

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \rightarrow \imath \vec{k} \times \vec{E} = \imath \omega \mu \vec{H} ,$$
(1.48)

combinando le quali otteniamo

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\omega}\vec{k}\times\vec{E} \quad . \tag{1.49}$$

Consideriamo ora un'onda che incide su una interfaccia con il campo elettrico parallelo all'interfaccia (perpendicolare al piano d'incidenza). Questo è il caso chiamato **trasverso elettrico** (TE). Il caso complementare (H// all'interfaccia) è il **trasverso magnetico** (TM).

#### -Caso TE-

Le condizioni di raccordo per i campi all'interfaccia sono

$$E_{1t} = E_{2t} , H_{1t} - H_{2t} = 0 ,$$
 (1.50)

cioè

$$E + E' = E'',$$
  

$$-H\cos\theta + H'\cos\theta = -H''\cos\phi,$$
  

$$-kE\cos\theta + kE'\cos\theta = -k''E''\cos\phi.$$
(1.51)



Si definisce coefficiente di riflessione  $r_s$  la quantità:

$$r_s = \left| \frac{E'}{E} \right|_{\text{TE}} \,. \tag{1.52}$$

Si definisce coefficiente di trasmissione  $t_s$  la quantità:

$$t_s = \left| \frac{E''}{E} \right|_{\text{TE}} \,. \tag{1.53}$$

Ora abbiamo

$$\frac{E'}{E} = \frac{E''}{E} - 1 , \qquad (1.54)$$

е

$$E'' = \frac{k\cos\theta}{k''\cos\phi}(E - E') = (E - E')\frac{\cos\theta}{\cos\phi}\frac{\omega}{u}\frac{u''}{\omega} = \frac{(E - E')}{n}\frac{\cos\theta}{\cos\phi}$$
(1.55)

(avendo usato il fatto che $u^{\prime\prime}/u=1/n),$ e quindi

$$\frac{E'}{E} = \frac{(E - E')}{En} \frac{\cos \theta}{\cos \phi} - 1 = \frac{(E - E')\cos \theta - En\cos \phi}{En\cos \phi} \rightarrow \rightarrow E' = \frac{E\cos \theta}{n\cos \phi} - \frac{E'\cos \theta}{n\cos \phi} - E ,$$

$$\rightarrow E' \left(1 + \frac{\cos \theta}{n\cos \phi}\right) = E\left(\frac{\cos \theta}{n\cos \phi} - 1\right) ,$$
(1.56)

e dunque troviamo

$$\frac{E'}{E} = \frac{\cos\theta - n\cos\phi}{n\cos\phi + \cos\theta} = rs \quad , \tag{1.57}$$

(analogamente per  $t_s$  eliminando E'). Per  $\theta = 0 \rightarrow \phi = 0$  l'incidenza è normale e avremo

$$r_s = \frac{1-n}{1+n} \quad . \tag{1.58}$$

Il segno di questa quantità è positivo o negativo a seconda che n sia minore o maggiore di 1. Un valore negativo di E'/E implica che la fase dell'onda riflessa è cambiata di 180° rispetto all'onda incidente. Questo è quello che succede ad esempio nel passaggio della luce da un mezzo ad un altro più denso (aria-vetro). Sapendo che

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \phi \rightarrow \sin \phi = \frac{\sin \theta}{n} \rightarrow \cos \phi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}},$$
 (1.59)

da cui

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{n} , \qquad (1.60)$$

e quindi

$$r_s = \frac{\cos\theta - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} \qquad (1.61)$$

Ora distinguiamo 2 casi:

1. n > 1 - riflessione esterna;

#### 2. n < 1 - riflessione interna.

Nel caso 1) l'onda incidente si avvicina alla frontiera dalla parte del mezzo meno denso, cioè con indice di rifrazione minore; mentre nel caso 2) l'onda incidente è nel mezzo più denso.

- Nel caso n > 1 (riffessione esterna)  $r_s$  è reale per qualsiasi valore di  $\theta$ .
- Nel caso n < 1 (riflessione interna), poiché n < 1, esisterà un angolo  $\theta$  tale che sin  $\theta = n$  e anche angoli per cui sin  $\theta > n$ .

L'angolo

$$\theta_c = \sin^{-1} n \quad , \tag{1.62}$$

è detto **angolo critico** (aria-vetro  $\theta_c = \sin^{-1} 1/1.5 \sim 41^o$ ). Quando  $\theta > \theta_c \rightarrow E'/E = r_s$  diventa complesso, cioè

$$r_s = \frac{\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}}{\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n^2}} \quad . \tag{1.63}$$

Definiamo ora la **riflettanza** come la frazione di energia dell'onda incidente che è riflessa

$$R_{s} = |r_{s}|^{2} = \left|\frac{E'}{E}\right|^{2}_{\text{TE}},$$

$$R_{p} = |r_{p}|^{2} = \left|\frac{E'}{E}\right|^{2}_{\text{TM}}.$$
(1.64)

Per  $\theta = 0$  si ha **incidenza normale**:

$$R_s = R_p = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$
 (1.65)

Per  $\theta = 90^{\circ}$  si ha incidenza radente:

$$R_s = R_p = 1 {.} (1.66)$$

Nel caso della **riflessione interna** quando  $\theta > \theta_c$ :

$$R_s = R_p = 1 av{1.67}$$

abbiamo cioè riflessione interna totale.

#### 1.9 Angolo di Brewster



Dalle condizioni di raccordo abbiamo

$$H - H' = H'' \rightarrow kE - kE' = k''E''$$
, (1.68)

e quindi

$$E - E' = nE'' . (1.69)$$

Inoltre sappiamo che

$$E \cos \theta + E' \cos \theta = E'' \cos \phi ,$$
  

$$E + E' = E'' \frac{\cos \phi}{\cos \theta} = \frac{\cos \phi}{n \cos \theta} (E - E') ,$$
  

$$\rightarrow E' \left( 1 + \frac{\cos \phi}{n \cos \theta} \right) = E \left( \frac{\cos \phi}{n \cos \theta} - 1 \right) ,$$
(1.70)

da cui

$$\frac{E'}{E} = r_p = \frac{\cos\phi - n\cos\theta}{n\cos\theta + \cos\phi} = \frac{-n\cos\theta + \cos\phi}{n\cos\theta + \cos\phi} \quad . \tag{1.71}$$

Poiché

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = n , \qquad (1.72)$$

allora

$$\sin\phi = \frac{1}{n}\sin\theta , \qquad (1.73)$$

e dunque avremo

$$r_p = \frac{-n\cos\theta + \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}}{n\cos\theta + \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}} = \boxed{\frac{-n^2\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{n^2\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}}.$$
 (1.74)

Se  $\theta = \tan^{-1}(n)$  avremo



 $\sin\theta = n\cos\theta \; ,$ 

e quindi

$$r_p = \frac{-n\sin\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{n\sin\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} , \qquad (1.76)$$

da cui ricaviamo che

$$\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} - n \sin \theta = \sqrt{n^2 - n^2 \cos^2 \theta} - n \sin \theta = n \sin \theta - n \sin \theta = 0 , \quad (1.77)$$

$$r_p = 0 \quad \text{per} \quad \theta_B = \tan^{-1}(n) \ , \tag{1.78}$$

dove  $\theta_B$  è detto **angolo di Brewster**. L'angolo di Brewster è una funzione della lunghezza d'onda a causa della dispersione. Ad ogni modo, la variazione sullo spettro visibile è molto piccola.

Se luce non polarizzata incide su una superficie ad angolo di Brewster, la luce riflessa è **polarizzata linearmente** con il vettore elettrico ortogonale al piano di incidenza. Sebbene la luce riflessa sia polarizzata, solo una piccola frazione della luce incidente è riflessa (cioè la luce riflessa ha bassa intensità). La luce trasmessa è, invece, parzialmente polarizzata.

#### 1.10 Onda evanescente nella riflessione totale



Sebbene l'energia incidente è totalmente riflessa quando l'angolo d'incidenza supera **l'angolo critico**  $\theta_c$ , esiste ancora un'onda elettromagnetica al di là della frontiera. Infatti l'onda trasmessa sarà:

$$\vec{E}_T = \vec{E}'' e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t)} , \qquad (1.79)$$

con

$$\vec{k}'' \cdot \vec{r} = k'' x \sin \phi - k'' y \cos \phi . \qquad (1.80)$$

Ora

$$\cos\phi = \sqrt{1 - \sin^2\phi} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}} = \sqrt{-\left(\frac{\sin^2\theta}{n^2} - 1\right)} = i\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2} - 1}, \quad \cos\sin\theta > n \quad (1.81)$$

Usando il fatto per cui

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = n \ \to \ \sin\phi = \frac{\sin\theta}{n} \ , \tag{1.82}$$

cioè

avremo

$$\vec{r} - \omega t = k'' x \sin \phi - k'' y \cos \phi - \omega t =$$

$$= k'' x \frac{\sin \theta}{n} - i k'' y \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1} - \omega t =$$

$$= k_1 x - i \alpha y - \omega t ,$$
(1.83)

dove

$$k_1 = k'' \frac{\sin \theta}{n} ,$$

$$\alpha = k'' \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1} ,$$
(1.84)

e dunque troviamo

 $\vec{k}$ 

$$\vec{E}_T = \vec{E}'' e^{i(k_1 x - i\alpha y - \omega t)} = \vec{E}'' e^{-\alpha |y|} e^{i(k_1 x - \omega t)} .$$
(1.85)

L'equazione (1.85) mostra chiaramente come l'ampiezza dell'onda evanescente decresca rapidamente quando ci si allontana dalla frontiera (interfaccia). Inoltre l'onda viaggia lungo l'asse x ad una velocità  $\omega/k_1$ , cioé

$$\widetilde{u} = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\omega}{k''} \frac{n}{\sin\theta} = \frac{\omega}{k''} \frac{n_2}{n_1} \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\omega}{k''} \frac{c}{u_2} \frac{u_1}{c} \frac{1}{\sin\theta} = \frac{u_1}{\sin\theta} , \qquad (1.86)$$

dove  $u_1$  è la velocità di fase nel mezzo più denso  $(\tilde{u} > u_1)$ .

A distanza  $d \sim 1/\alpha \sim 1/k \sim \lambda$  l'onda è quasi completamente soppressa. Sperimentalmente si può verificare l'esistenza dell'onda evanescente ponendo in prossimità dell'interfaccia una punta metallica molto appuntita come mostrato pittoricamente in figura 1.4.



Figure 1.4

## Chapter 2

## Coerenza e Interferenza

#### 2.1 Principio di sovrapposizione lineare

La teoria dell'interferenza ottica è basata essenzialmente sul principio di sovrapposizione dei campi elettromagnetici. In accordo a questo principio il campo elettrico prodotto in un punto dello spazio vuoto da differenti sorgenti è pari alla somma vettoriale

$$\vec{E} = \vec{E}_{(1)} + \vec{E}_{(2)} + \cdots,$$
 (2.1)

dove  $\vec{E}_{(1)}, \vec{E}_{(2)}, \cdots$  sono i campi prodotti nel punto in questione dalle differenti sorgenti separatamente.

Consideriamo ad esempio due onde armoniche piane polarizzate linearmente di stessa frequenza  $\omega$ . I campi elettrici saranno dati da:

$$\vec{E}_{(1)} = \vec{E}_1 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)} ,$$
  
$$\vec{E}_{(2)} = \vec{E}_2 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)} .$$
 (2.2)

Ora, se la differenza di fase  $\phi_1 - \phi_2$  è **costante** nel tempo le due onde (o le due sorgenti) sono dette **coerenti**. Consideriamo, quindi, 2 onde monocromatiche coerenti. L'intensità dell'onda è data (a meno di un fattore costante) dal quadrato dell'ampiezza del campo, cioè:

$$I = |E|^2 = \vec{E} \cdot \vec{E^*} = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2\vec{E_1} \cdot \vec{E_2} \cos\theta I_1 + I_2 + 2\vec{E_1} \cdot \vec{E_2} \cos\theta , \quad (2.3)$$

dove $\theta$ è dato da

$$\theta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \phi_2 . \qquad (2.4)$$

Il termine  $2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \cos \theta$  è chiamato termine d'**interferenza**. L'intensità totale I sarà allora più grande o più piccola della somma  $I_1 + I_2$  a seconda del valore di  $\theta$ . Poiché  $\theta$  dipende da  $\vec{r}$  ci sarà una variazione spaziale periodica dell'intensità. Queste variazioni danno luogo alle frange d'interferenza:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2 \cos \theta(\vec{r})} .$$
(2.5)

Se le due onde sono polarizzate allora il termine d'interferenza dipende anche dalla polarizzazione. In particolare se le polarizzazioni sono **ortogonali** allora  $\vec{E_1} \cdot \vec{E_2} = 0$  e non si osservano frange d'interferenza. Questo è vero non solo per la polarizzazione lineare, ma anche per quella circolare ed ellittica. Il termine d'interferenza dipende da  $\vec{r}$  e dalla polarizzazione dei campi.

#### 2.2 Esperimento di Young - divisore di fronte d'onda



Figure 2.1: La luce è fatta passare attraverso una fenditura S in modo da illuminare altre 2 fenditure  $S_1$  e  $S_2$ . La fenditura S serve a fornire la coerenza necessaria tra le 2 sorgenti  $S_1$  e  $S_2$ .

Assumendo che le onde siano sferiche con fattori di fase della forma  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ allora la differenza di fase nel punto P sarà  $k(d_2 - d_1)$ . Per avere interferenza costruttiva occorre avere

$$k(d_2 - d_1) = \pm 2n\pi$$
,  
 $|d_2 - d_1| = n\lambda$ , (2.6)

cioè la differenza di cammino ottico deve essere un **multiplo** intero di lunghezza d'onda. Possiamo anche scrivere

$$\left[x^{2} + \left(y + \frac{h}{2}\right)\right]^{1/2} - \left[x^{2} + \left(y - \frac{h}{2}\right)\right]^{1/2} = \pm n\lambda .$$
 (2.7)

Supponendo che  $y,h\ll x$ otteniamo

$$[x^{2} + yh]^{1/2} - [x^{2} - yh]^{1/2} = \pm n\lambda .$$
(2.8)

Usando il fatto che  $\sqrt{1+z} = 1 + z/2 + O(z^2)$  troviamo

$$\frac{yh}{x} \sim \pm n\lambda \rightarrow y \sim \pm \frac{n\lambda x}{h} ,$$
 (2.9)

dove n è detto indice d'interferenza.



Figure 2.3: Se l'onda non è perfettamente monocromatica la larghezza delle frange è:  $\Delta y = \frac{x}{h} \Delta \lambda$ .

#### 2.3 Interferometro di Michelson - divisore di ampiezza

- Divisore di fronte d'onda: in questa classe d'interferometri una singola sorgente emette onde in differenti direzioni. Queste onde sono infine portate a coincidere per mezzo di specchi, prismi o lenti per produrre le frange.
- Divisore di ampiezza: in questo caso un singolo fascio è diviso in 2 o più fasci per riflessione parziale.

Poiché

$$I_T = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2 \cos \theta} = 2I_0 (1 + \cos \theta) , \qquad (2.10)$$

troviamo che l'intensità totale  $I_T$  è proporzionale a  $I_T \propto 1 + \cos \theta$ , ed essendo  $\theta$  dato da

$$\theta = kd = \frac{2\pi d}{\lambda} , \qquad (2.11)$$

troviamo

$$I_T \propto 1 + \cos \frac{2\pi d}{\lambda}$$
 (2.12)



Figure 2.4: La luce emessa da S è parzialmente riflessa dallo specchio A verso lo specchio D e parzialmente trasmessa C. Il compensatore è necessario per assicurare ai due fasci lo stesso cammino ottico (i.e. il fatto che attraversino lo stesso spessore di vetro). Le frange d'interferenza vengono osservate in E.



Figure 2.5: La luce è come se provenisse da due sorgenti  $S_1$  e  $S_2$  coerenti poste a distanza d, dove d è proprio la differenza di cammino tra i due raggi che giungono in E.

#### 2.4 Teoria della coerenza parziale: visibilità delle frange

L'intensità di un fascio di luce è definita come

$$I = \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \rangle , \qquad (2.13)$$

dove  $\langle \rangle$  indica la media temporale:

$$\langle f \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt \,, \qquad (2.14)$$

e abbiamo supposto che il campo  $\vec{E}$  sia la sovrapposizione di 2 campi  $\vec{E_1}$  e  $\vec{E_2}$ . Supponiamo inoltre che i due campi abbiano la stessa polarizzazione, cosicché la loro natura vettoriale può essere ignorata. Quindi avremo:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \langle E_1 E_2^* \rangle$$
, (2.15)

 $\operatorname{con}$ 

$$I_1 = \langle |E_1|^2 \rangle ,$$
  

$$I_2 = \langle |E_2|^2 \rangle .$$
(2.16)

Negli esperimenti classici d'interferenza i campi  $E_1$  e  $E_2$  provengono da una sorgente comune e differiscono a causa di una differenza nei loro cammini ottici come in figura 2.6. Sia t il tempo che l'onda impiega per coprire il cammino 1 e  $t + \tau$  il



tempo per coprire il cammino 2. Avremo quindi che il termine d'interferenza sarà dato da

$$2\operatorname{Re}\langle E_1(t)E_2^*(t+\tau)\rangle = 2\operatorname{Re}\Gamma_{12}(\tau) \rightarrow \Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t)E_2^*(t+\tau)\rangle , \qquad (2.17)$$

dove  $\Gamma_{12}$  è la funzione di correlazione, mentre  $\Gamma_{11}$  è la funzione di autocorrelazione. Per definizione

$$\Gamma_{11}(0) = I_1 ,$$

$$\Gamma_{22}(0) = I_2 .$$
(2.18)

Possiamo, inoltre, definire una funzione di correlazione normalizzata  $\gamma_{12}(\tau)$ , altrimenti chiamata **grado di coerenza parziale**, nel modo seguente:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1I_2}} .$$
(2.19)

In questo modo l'intensità I può essere scritta come

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re}\gamma_{12}(\tau) . \qquad (2.20)$$

 $\gamma_{12}(\tau)$  è in generale una funzione periodica di  $\tau$ . Distinguiamo i 3 casi seguenti:

$$\begin{cases} |\gamma_{12}(\tau)| = 1 & \text{coerenza totale }, \\ 0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1 & \text{coerenza parziale }, \\ |\gamma_{12}(\tau)| = 0 & \text{incoerenza }. \end{cases}$$
(2.21)

In un pattern di frange d'interferenza l'intensità varia tra un limite massimo  $I_{MAX}$ e uno minimo  $I_{min}$  dati da:

$$I_{\text{MAX}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| ,$$
  

$$I_{\text{min}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}| .$$
(2.22)

Si definisce **visibilità** della frangia il rapporto

$$V = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|}{I_1 + I_2} .$$
(2.23)

In particolare se  $I_1 = I_2$  avremo

$$V = |\gamma_{12}| . (2.24)$$

### 2.5 Tempo di coerenza e lunghezza di correlazione

Consideriamo una sorgente 'quasi monocromatica' che ha le seguenti proprietà: l'oscillazione, e quindi il campo, varia in modo sinusoidale per un certo tempo  $\tau_0$ e poi cambia fase repentinamente. Questa sequenza si ripete indefinitamente.  $\tau_0$ è il **tempo di coerenza**.

Il cambiamento di fase che si verifica dopo ogni tempo di coerenza si considera distribuito uniformemente tra  $0 e 2\pi$ . Ora, la parte temporale del campo è

$$E(t) = E_0 e^{-\iota \omega t} e^{\iota \phi(t)}$$
 . (2.25)

Supponiamo che il fascio di luce venga diviso in due fasci che poi vengono sovrapposti per produrre interferenza. Supponiamo inoltre che  $|E_1| = |E_2| = |E|$ . Stiamo parlando evidentemente di autocorrelazione. Il grado di coerenza parziale sarà allora

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E(t)E^*(t+\tau)\rangle}{\langle |E|^2\rangle} , \qquad (2.26)$$

ovverosia

$$\gamma(\tau) = \langle e^{i\omega\tau} e^{i[\phi(t) - \phi(t+\tau)]} \rangle = e^{i\omega\tau} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i[\phi(t) - \phi(t+\tau)]} dt .$$
(2.27)



Figure 2.7: Andamento della fase di una sorgente 'quasi monocromatica' in funzione del tempo.  $\tau_0$  è il tempo di coerenza.

Per  $0 < t < \tau_0$  avremo:

$$\begin{cases} \phi(t) - \phi(t+\tau) = 0 & 0 < t < \tau_0 - \tau ,\\ \phi(t) - \phi(t+\tau) = \Delta & \tau_0 - \tau < t < \tau_0. \end{cases}$$
(2.28)

Di conseguenza l'integrale sarà

$$\frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0 - \tau} dt + \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0 - \tau}^{\tau_0} e^{i\Delta} dt = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} + \frac{\tau}{\tau_0} e^{i\Delta} , \qquad (2.29)$$

dove  $\Delta$  è la differenza di fase casuale. Poiché il termine  $\Delta$  è distribuito uniformemente tra 0 e  $2\pi$ , il termine  $e^{i\Delta}$  ha media nulla. D'altra parte, poiché il termine  $(\tau_0 - \tau)/\tau_0$  è lo stesso per tutti gli intervalli, il valor medio dell'integrale è proprio  $(\tau_0 - \tau)/\tau_0$ .

Ovviamente se  $\tau > \tau_0$  la differenza di fase è sempre casuale e l'intera media è sempre nulla. In definitiva troviamo

$$\gamma(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{\imath \omega \tau} \qquad \tau < \tau_0 ,$$
  

$$\gamma(\tau) = 0 \qquad \tau \ge \tau_0 , \qquad (2.30)$$
  

$$\gamma(\tau)| = \begin{cases} 1 - \tau/\tau_0 & \tau < \tau_0 , \\ 0 & \tau \ge \tau_0 . \end{cases}$$

 $|\gamma(\tau)|$  in questo caso è anche uguale alla visibilità delle frange, per cui V si annulla per  $\tau \geq \tau_0$ . Questo significa che la differenza di cammino tra i due fasci non deve superare il valore

$$\ell = c\tau_0 , \qquad (2.31)$$

(denominato lunghezza di coerenza) se si vogliono ottenere frange d'interferenza.



Consideriamo il caso di un fascio non perfettamente monocromatico. Supponiamo di avere un treno d'onda del tipo mostrato in figura 2.8 e descritto matem-

aticamente dall'equazione seguente:

$$E(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t} & -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2} \\ , \\ 0 & \text{altrimenti }. \end{cases}$$
(2.32)

Prendendo la trasformata di Fourier otteniamo:



L'energia (i.e. l'intensità) è data da:

$$I(\omega) \propto |E(\omega)|^2$$
, (2.34)

ed è maggiormente concentrata nella regione fra  $(\omega_0 - 2\pi/\tau_0, \omega_0 + 2\pi/\tau_0)$ . Ora, la larghezza della distribuzione di frequenza  $\Delta \omega$  è

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{\tau_0} \to \frac{\Delta \nu}{=} \frac{1}{\tau_0} . \qquad (2.35)$$

Se abbiamo una sequenza di treni d'onda ciascuno della durata di  $\tau_0$ , ma che avvengono in modo casuale, la distribuzione in frequenza è esattamente la stessa del singolo treno d'onda. Se, invece, gli impulsi non hanno la stessa durata occorrerà considerare un tempo medio  $\langle \tau_o \rangle$ . In ogni caso la larghezza sarà:

$$\Delta \nu = \frac{1}{\langle \tau_o \rangle} \ . \tag{2.36}$$

Ragionando al contrario, supponiamo ora di avere una sorgente con larghezza  $\Delta \nu$  in frequenza. Allora, il tempo di coerenza medio sarà:

$$\langle \tau_o \rangle = \frac{1}{\Delta \nu} \rightarrow \ell_c = c \langle \tau_o \rangle = \frac{c}{\Delta \nu}$$
 (2.37)

Inoltre, poiché  $\Delta \nu / \nu = |\Delta \lambda| \lambda$ , la lunghezza di coerenza si può esprimere nel modo seguente

$$\ell_c = \frac{c}{\nu} \frac{\nu}{\Delta \nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} . \tag{2.38}$$

Inoltre, dalla relazione  $\Delta \nu = 1/\langle \tau_o \rangle$  vediamo che quanto più la sorgente è **monocromatica**, tanto più lungo sarà il tempo di **coerenza**.

### 2.6 Coerenza spaziale

Supponiamo di avere una singola sorgente quasi monocromatica (puntiforme) e consideriamo 3 punti riceventi  $P_1, P_2, P_3$  come raffigurato in figura 2.9. I campi



Figure 2.9

nei 3 punti saranno rispettivamente  $E_1, E_2, E_3$ . I punti  $P_1 \in P_3$  giacciono sulla stessa direzione e differiscono solo per la loro distanza S. La **coerenza** tra i campi  $E_1 \in E_3$  è una misura della loro coerenza **spaziale longitudinale**. I punti  $P_1 \in P_2$ , invece, si trovano alla stessa distanza da S. In questo caso la coerenza tra  $E_1$  ed  $E_2$  è una misura della loro **coerenza spaziale trasversa**. La coerenza longitudinale dipenderà solo dalla distanza  $r_{13}$  confrontata con la lunghezza di coerenza della sorgente, ovverosia dal valore della grandezza  $t_{13} = r_{13}/c$  confrontato con il tempo di coerenza  $\tau_0$ . Ci sarà quindi un'elevata coerenza tra  $E_1 \in E_3$  se  $t_{13} \ll \tau_0$ , mentre ci sarà poca o nessuna coerenza se  $t_{13} \gg \tau_0$ .

Considerando la coerenza trasversa, se S è una vera sorgente puntiforme, la dipendenza temporale dei due campi  $E_1$  e  $E_2$  sarà esattamente la stessa e quindi essi saranno **completamente coerenti**. Ci sarà coerenza **parziale** tra  $E_1$  e  $E_2$  solo se la sorgente ha un'estensione spaziale.

Consideriamo ora il caso di 2 sorgenti **puntiformi**  $S_a \in S_b$  quasi monocromatiche mostrato in figura 2.10. Le sorgenti  $S_a \in S_b$  sono identiche tranne per il fatto che le loro fasi variano casualmente e indipendentemente, cioè sono **incoerenti** l'una rispetto all'altra. Avremo che



$$E_1 = E_{1a} + E_{1b} ,$$
  

$$E_2 = E_{2a} + E_{2b} .$$
(2.39)

Il grado di coerenza parziale fra  $E_1$  ed  $E_2$  sarà

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle E_1(t)E_2^*(t+\tau)\rangle}{\sqrt{I_1I_2}} = \frac{1}{\sqrt{I_1I_2}} \left[ \langle (E_{1a}(t) + E_{1b}(t)) (E_{2a}^*(t+\tau) + E_{2b}^*(t+\tau))\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{I_1I_2}} \left[ \langle E_{1a}(t)E_{2a}^*(t+\tau))\rangle + \left[ \langle E_{1b}(t)E_{2b}^*(t+\tau))\rangle \right] ,$$
(2.40)

essendo nulli i termini cross per l'incoerenza delle sorgenti. Assumendo che i campi siano del tipo  $E = E_0 e^{-i\omega t} e^{i\phi(t)}$  otteniamo per il primo termine:

$$\frac{\langle E_{1a}(t)E_{2a}^{*}(t+\tau))\rangle}{\sqrt{I_{1}I_{2}}} = \frac{1}{2}\gamma(\tau_{a}) , \qquad (2.41)$$

dove

$$\tau_a = \frac{r_{2a} - r_{1a}}{c} + \tau \ , \tag{2.42}$$

(poiché è necessario tenere in conto i tempi che impiegano i campi per andare dalle rispettive sorgenti ai punti in questione), e quindi

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\gamma(\tau_a) + \frac{1}{2}\gamma(\tau_b) ,$$
 (2.43)

dove  $\tau_b = (r_{2b} - r_{1b})/c + \tau$  e

$$\gamma(\tau) = e^{\imath \omega t} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) . \tag{2.44}$$

Prendendo il modulo quadro otteniamo

$$\begin{aligned} |\gamma_{12}(\tau)|^{2} &= \left| \frac{1}{2} \gamma(\tau_{a}) + \frac{1}{2} \gamma(\tau_{b}) \right|^{2} = \\ &= \frac{1}{4} |\gamma(\tau_{a})|^{2} + \frac{1}{4} |\gamma(\tau_{b})|^{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \gamma(\tau_{a}) \gamma^{*}(\tau_{b}) = \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\tau_{a}}{\tau_{0}} \right)^{2} + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\tau_{b}}{\tau_{0}} \right)^{2} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tau_{a}}{\tau_{0}} \right) \left( 1 - \frac{\tau_{b}}{\tau_{0}} \right) \cos[\omega(\tau_{a} - \tau_{b})] = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{\tau_{a}}{\tau_{0}} \right) - \left( 1 - \frac{\tau_{b}}{\tau_{0}} \right) \right] + 2 \left( 1 - \frac{\tau_{a}}{\tau_{0}} \right) \left( 1 - \frac{\tau_{b}}{\tau_{0}} \right) \right\} + \cdots = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\tau_{b} - \tau_{a}}{\tau_{0}} \right)^{2} + 2 \left( 1 - \frac{\tau_{a}}{\tau_{0}} \right) \left( 1 - \frac{\tau_{b}}{\tau_{0}} \right) \right] + \cdots \end{aligned}$$
(2.45)

Assumendo che  $\tau_b - \tau_a$  è piccolo in confronto a  $\tau_a$  e  $\tau_b$  abbiamo che

$$|\gamma_{12}(\tau)|^2 = \left(\frac{1 + \cos[\omega(\tau_a - \tau_b)]}{2}\right) \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_0}\right) \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_0}\right) . \tag{2.46}$$

Quindi la coerenza tra i 2 campi nei 2 punti riceventi non dipende solo dal tempo di coerenza  $\tau_0$  delle sorgenti, ma anche dalla quantità  $\tau_b - \tau_a$  in modo periodico.

Supponiamo ora che  $P_1$  sia simmetrico rispetto alle 2 sorgenti, cioè  $r_{1a} = r_{1b}$ , come raffigurato in figura 2.11. Avremo allora:



Figure 2.11

$$\tau_b - \tau_a = \frac{r_{2b} - r_{2a}}{c} = \frac{1}{c} \left\{ \left[ r^2 + \left(\ell + \frac{s}{2}\right)^2 \right]^{1/2} - \left[ r^2 + \left(\ell - \frac{s}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \right\} \sim \frac{\ell s}{rc} .$$
(2.47)

Se  $P_1 \in P_2$  coincidono (al centro)  $|\gamma_{12}|^2$  è massimo. Al contrario, se  $\cos[\omega(\tau_b - \tau_a)] = -1$  la coerenza è nulla. Questo accade quando

$$\omega(\tau_b - \tau_a) = \pi = \omega \frac{\ell s}{rc} \rightarrow \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{\ell s}{rc} = \pi \rightarrow \ell = \frac{\lambda r}{2s} . \qquad (2.48)$$

D'altra parte la separazione angolare tra le sorgenti è proprio  $\theta = 2/r$ , per cui

$$\ell = \ell_T = \frac{\lambda}{2\theta} \tag{2.49}$$

è approssimativamente la larghezza della regione di alta coerenza fra  $P_1$  e  $P_2$ , e  $\ell_T$ è detta **larghezza di coerenza trasversa**.

#### 2.7 Interferenza con fasci multipli

Consideriamo il caso generale di interferenza con fasci multipli. Il metodo più comune di produrre un gran numero di fasci coerenti è per **divisione di ampiezza**. Questa divisione si può ottenere per mezzo della riflessione multipla tra due superfici parallele parzialmente riflettenti, ad esempio utilizzando specchi semitrasparenti. Consideriamo, per semplicità, come superfici riflettenti 2 specchi sottili semiriflettenti identici, come rappresentato schematicamente in figura 2.12. La



Figure 2.12

sequenza  $E_0t^2$ ,  $E_0t^2r^2$ ,  $E_0t^2r^4$ ,... rappresenta le ampiezze dei raggi trasmessi successivi. La differenza di cammino fra due qualsiasi raggi trasmessi successivi è (vedi figura 2.13):

$$AB + BC = BC[1 + \cos(2\theta)] = 2BC\cos^2\theta = 2d\cos\theta , \qquad (2.50)$$

avendo usato il fatto che

$$AB = BC \cos 2\theta ,$$
  

$$BC = \frac{d}{\cos \theta} .$$
(2.51)

Di conseguenza la differenza di fase tra due raggi successivi è data da



dove  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda nel vuoto e n è l'indice di rifrazione del mezzo tra le due superfici riflettenti. Tenendo in conto questa differenza di fase e sommando le ampiezze dei raggi trasmessi otteniamo

$$E_T = E_0 t^2 + E_0 t^2 r^2 e^{i\delta} + E_0 t^2 r^4 e^{i2\delta} + \dots =$$
  
=  $E_0 t^2 (1 + r^2 e^{i\delta} + r^4 e^{i2\delta} + \dots) = E_0 t^2 \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}}.$  (2.53)

L'intensità totale trasmessa sarà quindi

$$I_T = I_0 \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{i\delta}|^2} .$$
 (2.54)

In generale può esserci un cambiamento di fase anche in riflessione, per cui r è in generale complesso:

$$r = |r|e^{i\delta_r/2}$$
 (2.55)

Di conseguenza, l'intensità totale trasmessa sarà:

$$I_T = I_0 \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{i\Delta}|^2} = I_0 \frac{T^2}{|1 - R e^{i\Delta}|^2} , \qquad (2.56)$$

dove  $\Delta = \delta + \delta_r$ .

Nel caso di dielettrici:  $\delta_r = 0, \pi$  a seconda dell'indice di rifrazione relativo, ma nel caso di film metallici il cambiamento di fase può assumere un valore qualsiasi. Ora

$$|1 - Re^{i\Delta}|^2 = 1 + R^2 - 2R\cos\Delta , \qquad (2.57)$$

 $\mathbf{e}$ 

$$\cos\Delta = \cos^2\frac{\Delta}{2} - \sin^2\frac{\Delta}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\Delta}{2} , \qquad (2.58)$$

per cui avremo

$$|1 - Re^{i\Delta}|^2 = 1 + R^2 - 2R\left(1 - 2\sin^2\frac{\Delta}{2}\right) = 1 + R^2 - 2R + 4R\sin^2\frac{\Delta}{2} = (1 - R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Delta}{2} = (1 - R)^2\left[1 + \frac{4R}{(1 - R)^2}\sin^2\frac{\Delta}{2}\right],$$
(2.59)

e quindi troviamo

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1+F\sin^2\frac{\Delta}{2}} , \qquad (2.60)$$

#### dove F è il **coefficiente di finesse**:

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} , \qquad (2.61)$$

che misura la nitidezza delle frange d'interferenza; e

$$\operatorname{Ai} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2}} \tag{2.62}$$

è la funzione di Airy (vedi figura 2.14).

Se R (la **riflettanza**) è piccola, cosicché F è piccola, le frange sono **ampie** e **indistinte**; mentre se R è grande (~ 1), F anche è grande e le frange sono molto **nitide**. La condizione per il massimo della funzione di Airy è

$$2N\pi = \Delta = \delta + \delta_r = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd\cos\theta + \delta_r , \qquad (2.63)$$

dove N è l'ordine d'inteferenza.

Se le due superfici non fossero identiche, ma avessero coefficienti di riflessione differenti

$$r_{1} = |r_{1}|e^{i\delta_{1}} ,$$
  

$$r_{2} = |r_{2}|e^{i\delta_{2}} ,$$
(2.64)



Figure 2.14: Se  $\delta/2$  è un multiplo di  $\pi$  allora la funzione di Airy assume il suo valore massimo pari a 1.

allora occorre porre

$$T = \sqrt{T_1 T_2} ,$$
  

$$R = \sqrt{R_1 R_2} ,$$
  

$$\delta_r = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} .$$
(2.65)

I valori massimo e minimo dell'intensità trasmessa valgono rispettivamente:

$$\frac{I_T^{\text{MAX}}}{I_0} = \frac{T^2}{(1-R)^2} , 
\frac{I_T^{\text{min}}}{I_0} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}} = \frac{T^2}{(1+R)^2} .$$
(2.66)

Se non ci fosse assorbimento nel mezzo allora R + T = 1 e avremmo

$$\frac{I_T^{\text{MAX}}}{I_0} = 1 \ . \tag{2.67}$$

Questo significa che il picco d'intensità delle frange trasmesse avrebbe la stessa intensità dell'onda incidente anche se  $R \sim 1$ . In pratica c'è sempre assorbimento e quindi

$$\frac{I_T^{\text{MAX}}}{I_0} = \frac{(1 - A - R)^2}{(1 - R)^2} < 1 .$$
 (2.68)

#### 2.8 Interferometro di Fabry & Perot (etalon)

L'interferometro di Fabry-Perot consiste essenzialmente di due lamine di vetro o quarzo parzialmente riflettenti con le superfici riflettenti tenute accuratamente parallele. Le superfici devono essere estremamente piatte e parallele al fine di ottenere la massima definizione delle frange. Se si usa come sorgente una sorgente **estesa** le frange di interferenza appaiono come anelli concentrici nel piano focale.



Figure 2.15: Figura stilizzata dell'interferometro di Fabry-Perot.

Un dato anello corrisponde ad un valore costante di  $\theta$  e le frange circolari sono dette frange di uguale inclinazione. Il **range spettrale libero** di uno strumento Fabry-Perot è definito come la separazione tra ordini d'interferenza adiacenti. Interni del parametro  $\Delta$  il range spettrale libero corrisponde a:

$$\Delta_{N+1} - \Delta_N . \tag{2.69}$$

Essendo

$$\Delta_N = \delta + \delta_r = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd\cos\theta + \delta_r = 2N\pi , \qquad (2.70)$$

si ha

$$\Delta_{N+1} - \Delta_N = 4\pi n d \cos \theta \left( \frac{1}{\lambda_{N+1}} - \frac{1}{\lambda_N} \right) = 2\pi , \qquad (2.71)$$

e quindi

$$\frac{4\pi nd\cos\theta}{c}(\nu_{N+1}-\nu_N) = 2\pi \rightarrow \nu_{N+1}-\nu_N = \frac{c}{2nd\cos\theta} \sim \frac{c}{2nd} \quad \text{per } \theta \sim 0 ,$$
(2.72)

dove la differenza  $\nu_{N+1} - \nu_N$  è denominata range spettrale libero in frequenza.

#### 2.8.1 Risoluzione di un Fabry-Perot

Supponiamo di avere due onde con frequenze molto vicine  $\omega \in \omega'$  che vogliamo analizzare con un Fabry-Perot. La distribuzione di intensità sarà una sovrapposizione di due sistemi di frange. Supponiamo che le due onde abbiano la stessa intensità. Il pattern di frange è dato dalla somma di 2 funzioni di Airy (vedi figura 2.16):

$$I_T = \frac{I_0}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2}} + \frac{I_0}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta'}{2}} , \qquad (2.73)$$

dove

$$\Delta = 2kd + \delta_r = \frac{4\pi d}{\lambda} + \delta_r = \frac{4\pi\nu}{c}d + \delta_r = \frac{2\omega d}{c} + \delta_r ,$$
  

$$\Delta' = \frac{2\omega' d}{c} + \delta_r ,$$
  

$$\rightarrow \Delta - \Delta' = \frac{2d}{c}(\omega - \omega') ,$$
(2.74)

avendo supposto  $\cos\theta \sim 1.$  Per dire che le 2 frequenze  $\omega$  e  $\omega'$  sono risolte dallo



strumento si utilizza il criterio di Taylor, secondo il quale due linee uguali sono considerate risolte se le singole curve s'incrociano nel punto di mezza intensità, cosicché l'intensità totale al punto di sella è uguale all'intensità massima di ciascuna linea singola. Quindi al punto di sella possiamo scrivere

$$2I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Delta - \Delta'}{4}\right)} = I_0 , \qquad (2.75)$$

ovverosia

$$F\sin^2\left(\frac{\Delta-\Delta'}{4}\right) = 1.$$
(2.76)

Assumendo che la differenza  $\Delta - \Delta'$  sia piccola, allora possiamo scrivere

$$F\left(\frac{\Delta-\Delta'}{4}\right)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad |\Delta-\Delta'| = \frac{4}{\sqrt{F}} = 4\frac{1-R}{2\sqrt{R}} = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}} , \qquad (2.77)$$

e inoltre

$$\delta\omega = |\omega - \omega'| = \frac{c}{2d}|\Delta - \Delta'| = \frac{c}{d}\frac{1-R}{\sqrt{R}}.$$
(2.78)

La larghezza  $\delta \omega$  deve essere almeno  $\frac{c}{d} \frac{1-R}{\sqrt{R}}$  a mezza intensità, che è la risoluzione di un Fabry-Perot di riflettanza R e separazione tra i piatti d.

Si definisce **finesse**  $\mathcal{F}$  (da non confondere con il coefficiente di finesse F) il rapporto

$$\mathcal{F} = \frac{|\Delta_{N+1} - \Delta_N|}{|\Delta - \Delta'|} = 2\pi \frac{\sqrt{F}}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{F} = \frac{\pi}{2}\frac{2\sqrt{R}}{1-R} , \qquad (2.79)$$
i.e.

$$\mathcal{F} = \pi \frac{\sqrt{R}}{1-R} \quad . \tag{2.80}$$

Si definisce **potere risolvente** la quantità

FLATANOW

$$RP = \frac{\omega}{\delta\omega} = \frac{\nu}{\delta\nu} = \frac{\lambda}{|\lambda|} , \qquad (2.81)$$

dove  $\delta \omega$  è la minima quantità risolvibile. Poiché N (ordine d'interferenza) è

$$N = \frac{2nd}{\lambda_0} = \frac{2d}{\lambda} = \frac{2d\nu}{c} = \frac{2d\omega}{2\pi c} = \frac{\omega d}{c\pi} , \qquad (2.82)$$

allora troviamo

$$RP = \frac{\omega}{\delta\omega} = \frac{c\pi}{d} N \frac{d}{c} \frac{\sqrt{R}}{1-R} = N\mathcal{F} = \pi N \frac{\sqrt{R}}{1-R} .$$
(2.83)

Quindi il potere risolvente è determinato dall'ordine d'interferenza. Ora, poiché  $N \sim \frac{2nd}{\lambda_0}$ , allora per aumentare RP basta aumentare d, cioé la separazione fra gli specchi. D'altra parte, essendo  $\nu_{N+1} - \nu_N = c/(2nd)$ , aumentando d diminuisce il range spettrale libero in frequenza e bisogna quindi trovare un compromesso in ogni specifica applicazione. Inoltre, per ogni dato valore della separazione d tra gli specchi, RP può essere aumentato aumentando R (la riflettanza) rendendola sempre più vicina ad 1.

FUMMANONORONTH

# Chapter 3

## Diffrazione

Partiamo dal teorema integrale di Kirchhoff.

Sia U una funzione che soddisfa l'equazione delle onde:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} , \qquad (3.1)$$

e sia  $U_P$  il valore che questa funzione assume nel punto P. É possibile dimostrare



che

$$U_P = -\frac{1}{4\pi} \int \int_A \left( U \nabla_n \frac{e^{\imath k r}}{r} - \frac{e^{\imath k r}}{r} \nabla_n U \right) \, dA \,, \qquad (3.2)$$

dove A è una qualsiasi superficie chiusa che contiene il punto P. Questo teorema collega il valore di una qualsiasi funzione (scalare) d'onda in un punto P interno alla superficie A al valore che la funzione d'onda assume sulla superficie di A. La funzione U è chiamata **disturbanza ottica**. Essendo una quantità scalare non può, comunque, rappresentare accuratamente un campo elettromagnetico. In questa **approssimazione scalare**, però, il quadrato del valore assoluto di U può essere considerato come una misura dell'intensità in un dato punto.

### 3.1 Formula di Kirchhoff-Fresnel

Dobbiamo determinare la disturbanza ottica che raggiunge il punto P dalla sorgente S. Consideriamo una superficie d'integrazione che includa il punto P e sia composta in parte dall'apertura. Facciamo inoltre due ipotesi semplificatrici:

- 1. la funzione U e il suo gradiente danno contributi trascurabili all'integrale tranne che all'apertura;
- 2. i valori di  $U \in \nabla_n U$  all'apertura sono gli stessi di quelli che si avrebbero in assenza dello schermo.

Sia r' la posizione di un punto sull'apertura relativamente alla sorgente S. Allora la funzione d'onda all'apertura è data dall'espressione

$$U = U_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'} , \qquad (3.3)$$

che rappresenta un'onda sferica monocromatica che si allontana da S. Usando l'approssimazione 1), il teorema di Kirchhoff dà:

$$U_P = -\frac{U_0 e^{-\imath \omega t}}{4\pi} \int \int \frac{e^{\imath k r'}}{r'} \nabla_n \frac{e^{\imath k r}}{r} - \frac{e^{\imath k r}}{r} \nabla_n \frac{e^{\imath k r'}}{r'} \, dA \,, \qquad (3.4)$$

dove l'integrazione si estende solo sull'apertura. Ora

$$\nabla_n \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(n,r) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(n,r) \left( ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) , 
\nabla_n \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(n,r') \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(n,r') \left( ik \frac{e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'^2} \right) ,$$
(3.5)

dove (n, r) e (n, r') sono gli angoli tra i vettori r e r' e la normale alla superficie n. Nell'equazione precedente i secondi termini in parentesi sono trascurabili in confronto ai primi nella situazione normale in cui sia r che r' sono molto più grandi della lunghezza d'onda, giacché  $k = 2\pi/\lambda$ . Quindi l'equazione (3.4) diventa:

$$U_P = -\frac{U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int \int \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} \left[\cos(n,r) - \cos(n,r')\right] dA \qquad (3.6)$$

Questa è l'equazione di Kirchhoff-Fresnel ed è, in effetti, una scrittura matematica del principio di Huygens. Nel caso particolare di sorgente disposta simmetricamente, esemplificato graficamente in figura 3.1, scegliamo come superficie d'integrazione la superficie A mostrata in figura 3.1 In questo caso  $\cos(n, r') = -1$ e otteniamo:

$$U_P = -\frac{ik}{4\pi} \int \int U_A \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left[\cos(n,r) + 1\right] \, dA \,, \tag{3.7}$$

dove

$$U_A = U_0 \frac{e^{ikr'}}{r'} . (3.8)$$



Possiamo dare la seguente interpretazione all'equazione (3.7):  $U_A$  è l'ampiezza complessa dell'onda primaria incidente sull'apertura. Da questa onda primaria, poi, ogni elemento dA dell'apertura dà origine ad un'onda sferica secondaria:

$$U_A \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} dA . aga{3.9}$$

Alla fine, la disturbanza ottica nel punto ricevente P è ottenuta sommando le onde secondarie generate da ciascun elemento. Nella summa, inoltre, è necessario tenere in conto il fattore di obliquità:

$$\cos(n,r) - \cos(n,r')$$
 . (3.10)

In questo caso  $\cos(n, r') = -1$ . Se P fosse stato sulla direzione di r' si avremmo ottenuto  $\cos(n, r) = +1$  e complessivamente +2, uguale al valore massimo. D'altra parte, nella direzione opposta avremmo  $\cos(n, r) = -1$ , cosicché il fattore di obliquità sarebbe stato uguale a zero. Questo spiega perché non c'è un'onda regressiva creata dal fronte d'onda originale. Infine, la presenza del fattore i indica che le onde diffratte sono sfasate di 90°  $(\pi/2)$  rispetto all'onda primaria incidente.

## 3.2 Principio di Babinet

Supponiamo di avere un'apertura A che produce una certa disturbarza ottica  $U_P$ in un dato punto P. Supponiamo di dividere l'apertura in due parti complementari



 $A_1 \in A_2$ , cosicché  $A = A_1 + A_2$ . Ovviamente si avrà

$$U_P = U_{1P} + U_{2P} , (3.11)$$

dove  $U_{1P}$  ( $U_{2P}$ ) è la disturbanza ottica prodotta in P dall'apertura 1 (2) da sola. Supponiamo ora che  $U_P = 0$ . Allora  $U_{1P} = -U_{2P}$ . In questo caso le aperture producono disturbanze ottiche identiche tranne per un fattore di fase  $\pi$ . L'intensità, comunque, è la stessa per le due aperture e il pattern di diffrazione sarà esattamente lo stesso.

## 3.3 Diffrazione di Fresnel e di Fraunhofer

Si parla di diffrazione di Fraunhofer quando sia l'onda incidente che l'onda diffratta sono effettivamente **piane**. Questo succede quando  $S \in P$  sono abbastanza lontani dall'apertura che genera la diffrazione, cosicché la curvatura dell'onda incidente e diffratta può essere trascurata. Nel caso opposto (curvatura importante) la diffrazione è del tipo di Fresnel. Con riferimento alla figura 3.2, calcoliamo la



variazione  $\Delta$  della quantità r + r' da un estremo dell'apertura all'altro. Avremo:

$$\Delta = \sqrt{d'^2 + (h' + \delta)^2} + \sqrt{d^2 + (h + \delta)^2} - \sqrt{d'^2 + h'^2} - \sqrt{d^2 + h^2} = \left(\frac{h'}{d'} + \frac{h}{d}\right)\delta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}\right)\delta^2 + \cdots$$
(3.12)

Il termine quadratico in  $\delta$  è una misura della curvatura del fronte d'onda, quindi l'onda è effettivamente piana sull'apertura se questo termine è trascurabile in confronto alla lunghezza d'onda della luce, cioè

$$\frac{1}{2} \left( d^{-1} + d'^{-1} \right) \delta^2 \ll \lambda .$$
 (3.13)

Se questa condizione non è verificata la diffrazione è del tipo di Fresnel.



Figure 3.3: Diffrazione di Fraunhofer: i fronti d'onda incidente e diffratto sono piani.

### 3.3.1 Pattern diffrattivo di Fraunhofer

Il metodo comune di ottenere diffrazione di Fraunhofer è schematizzato in figura 3.3. Per calcolare l'integrale di Kirchhoff-Fresnel si utilizzano le seguenti ipotesi semplificatrici:

- 1. la deviazione angolare della luce diffratta è piccola cosicché il fattore di obliquità può essere portato fuori dall'integrale;
- 2. la quantità  $e^{ikr'}/r'$  è praticamente costante e può essere portata fuori;
- 3. la variazione  $e^{ikr}/r$  viene principalmente dall'esponenziale, cosicché r può ssere rimpiazzato dalla sua media e portato fuori dall'integrale.

Con queste approssimazioni otteniamo:

$$U_P = C \int \int e^{\imath kr} \, dA \quad , \tag{3.14}$$

cio<br/>é la distribuzione della luce diffratta è ottenuta semplicemente integrando il fattore di fas<br/>e $e^{\imath kr}$  sull'apertura.

#### Singola fenditura

Consideriamo una fenditura di lunghezza L e larghezza b e consideriamo il problema unidimensionale raffigurato schematicamente in figura 3.4. L'elemento di area dA è

$$dA = Ldy , \qquad (3.15)$$



Figure 3.4: Diffrazione da singola fenditura.

mentre r è dato da:

$$r = r_0 + y\sin\theta , \qquad (3.16)$$

dove  $r_0$  è il valor di r per y = 0. L'integrale sarà

$$U_P = C e^{ikr_0} \int_{-b/2}^{b/2} e^{iky\sin\theta} L \ dy = \frac{2CL e^{ikr_0}}{k\sin\theta} \sin\left(\frac{1}{2}kb\sin\theta\right) = C'\frac{\sin\beta}{\beta} \ , \quad (3.17)$$

dove

$$C' = CbLe^{ikr_0} ,$$
  

$$\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta .$$
(3.18)

L'intensità sarà data da

$$I = |U_P|^2 = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 , \qquad (3.19)$$

dove $I_0 = |CbL|^2$  è l'intensità per  $\theta = 0$  (vedi figura 3.5). Il primo minimo capita per

$$\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta = \pi \ \to \ \sin\theta = \frac{2\pi}{kb} = \frac{\lambda}{b} \ , \tag{3.20}$$

cioè la larghezza del pattern di diffrazione è inversamente proporzionale alla larghezza della fenditura.

#### Apertura rettangolare

In questo caso la funzione di trasferimento è il prodotto delle funzioni di trasferimento dovute a 2 fenditure e quindi l'intensità sarà data da:

$$I = I_0 = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 , \qquad (3.21)$$



Figure 3.6: Schema della diffrazione da apertura rettangolare

dove

$$\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta ,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}ka\sin\phi ,$$
(3.22)

dove  $\theta \in \phi$  sono gli angoli che definiscono la direzione del fascio diffratto.

## Apertura circolare

Facendo riferimento alla figura 3.7 in questo caso abbiamo

$$dA = dy 2\sqrt{R^2 - y^2} , (3.23)$$

e quindi

$$U = C \int \int_{A} e^{ikr} \, dA = 2C e^{ikr_0} \int_{-R}^{R} e^{iky\sin\theta} \sqrt{R^2 - y^2} \, dy \,. \tag{3.24}$$

Ponendo

$$u = \frac{y}{R} , \qquad (3.25)$$
  

$$\rho = kR\sin\theta ,$$



Figure 3.7: Variabili coinvolte nella diffrazione da apertura circolare.

avremo

$$U = 2R^2 C e^{ikr_0} \int_{-1}^{1} e^{i\rho u} \sqrt{1 - u^2} \, du = 2R^2 C e^{ikr_0} \pi \frac{J_1(\rho)}{\rho} \,, \qquad (3.26)$$

dove  $J_1$  è la funzione di Bessel di ordine 1.

L'intensità è data da:

$$I = I_0 \left(\frac{2J_1(\rho)}{\rho}\right)^2 , \qquad (3.27)$$

dove  $I_0 = (C\pi R^2)^2$  è l'intensità per  $\theta = 0$ , e vale

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{J_1(\rho)}{\rho} = \frac{1}{2}.$$
(3.28)

Il primo minimo si ha per

$$J_1(\rho) = 0 \rightarrow \rho = 3.832$$
, (3.29)

e quindi

$$kR\sin\theta = 3.832 \rightarrow \sin\theta = \frac{3.832}{kR} = 1.22\frac{\lambda}{D} \sim \theta$$
, (3.30)

dove  $\theta$  è la distanza angolare fra il massimo principale e il primo minimo. La quantità  $1.22 \frac{\lambda}{D}$  è anche la minima separazione angolare tra due sorgenti puntiformi uguali, poiché a questa separazione angolare il massimo centrale di una sorgente cade sul primo minimo dell'altra. Questa condizione per la risoluzione ottica è nota come **criterio di Rayleigh**.

Nel caso di un'apertura rettangolare la separazione angolare minima è proprio $\lambda/b.$ 



#### Doppia fenditura

Con riferimento alla figura 3.8 valutiamo l'integrale di Kirchhoff-Fresnel:

$$\int_{A} e^{iky\sin\theta} dy = \int_{0}^{b} e^{iky\sin\theta} dy + \int_{h}^{b+h} e^{iky\sin\theta} dy =$$

$$= \frac{1}{ik\sin\theta} \left( e^{ikb\sin\theta} - 1 + e^{ik(b+h)\sin\theta} - e^{ikh\sin\theta} \right) =$$

$$= \frac{1}{ik\sin\theta} \left[ e^{ikb\sin\theta} \left( 1 + e^{ikh\sin\theta} \right) - \left( 1 + e^{ikh\sin\theta} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{ik\sin\theta} \left( e^{ikb\sin\theta} - 1 \right) \left( 1 + e^{ikh\sin\theta} \right) .$$
(3.31)

Ponendo

$$e^{ikb\sin\theta} = e^{2i\beta} ,$$
  

$$e^{ikh\sin\theta} = e^{2i\gamma} ,$$
(3.32)

l'integrale si può scrivere come segue:

$$\int_{A} e^{iky\sin\theta} dy = \frac{2be^{i\beta}e^{i\gamma}}{\beta}\sin\beta\cos\gamma , \qquad (3.33)$$

cosicché l'intensità totale vale

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \cos^2\gamma .$$
(3.34)

Il fattore  $(\sin \beta/\beta)^2$  costituisce l'inviluppo delle frange d'interferenza date dal termine  $\cos^2 \gamma$  (vedi figura 3.9). Le frange chiare appaiono per  $\gamma = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$  La separazione angolare tra le frange è data da  $\Delta \gamma = \pi$ , ovverosia:

$$\frac{1}{2}kh\sin\theta = \pi \quad \to \quad \sin\theta \sim \theta = \frac{\lambda}{h} , \qquad (3.35)$$

come trovato nel caso dell'esperimento di Young.

## 3.4 Reticolo di diffrazione

Consideriamo un reticolo fatto di N fenditure di larghezza b e separazione h come mostrato in figura 3.10. Valutiamo l'integrale di Kirchhoff-Fresnel:

Figure 3.8  

$$I/I_0$$

$$Figure 3.8$$

$$I/I_0$$

$$figure 3.9$$

$$\int_A e^{iky\sin\theta} dy = \int_0^b e^{iky\sin\theta} dy + \int_h^{h+b} e^{iky\sin\theta} dy + \int_{2h}^{2h+b} e^{iky\sin\theta} dy + \dots =$$

$$= \frac{1}{ik\sin\theta} (e^{ikb\sin\theta} - 1) (1 + e^{ikh\sin\theta} + \dots + e^{ik(N-1)h\sin\theta}) =$$

$$= \frac{1}{ik\sin\theta} (e^{ikb\sin\theta} - 1) (\frac{1 - e^{ikh\sin\theta}}{1 - e^{ikh\sin\theta}}) =$$

$$= be^{i\theta}e^{i(N-1)\gamma} (\frac{\sin\beta}{\beta}) (\frac{\sin N\gamma}{\sin\gamma}).$$
(3.36)

L'intensità sarà

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{N\sin\gamma}\right) 2 , \qquad (3.37)$$



Figure 3.10

dove N al denominatore fa si che  $\lim_{\theta\to 0} I = I_0$ . Il fattore  $(\sin \beta/\beta)^2$  è l'inviluppo del pattern di diffrazione dato da  $(\sin N\gamma/N \sin \gamma)^2$ . I massimi principali si hanno per (vedi figura 3.11):

$$\gamma = n\pi , \qquad (3.38)$$

ovverosia

$$\frac{1}{2}kh\sin\theta = n\pi \;, \tag{3.39}$$

da cui otteniamo la formula del reticolo:

$$\boxed{n\lambda = h\sin\theta},\qquad(3.40)$$

che dà la relazione tra lunghezza d'onda e angolo di diffrazione  $(n \in l'ordine di diffrazione)$ . I massimi secondari si hanno per

$$\gamma = \frac{3\pi}{2N}, \frac{5\pi}{2N}, \dots \tag{3.41}$$

#### 3.4.1 Potere risolutiovo del reticolo

La distanza tra il massimo centrale della frangia principale e il primo minimo è dato da

$$N\Delta\gamma = \pi \rightarrow \Delta\gamma = \frac{\pi}{N} = \frac{1}{2}kh\cos(\theta)\Delta\theta$$
, (3.42)

da cui ricaviamo

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{Nh\cos\theta} \quad (3.43)$$

Se N è molto grande, allora  $\Delta \theta$  è molto piccolo e il pattern di diffrazione consiste di una serie di frange definite corrispondenti agli ordini  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  D'altra



parte, fissato l'ordine n, otteniamo:

$$\cos\theta\Delta\theta = \frac{n}{h}\Delta\lambda \ , \tag{3.44}$$

da cui ricaviamo

$$\Delta \theta = \frac{n \Delta \lambda}{h \cos \theta} \quad , \tag{3.45}$$

che rappresenta la separazione angolare tra due linee che differiscono in lunghezza d'onda di  $\Delta\lambda$ . Combinando le due equazioni (3.43) e (3.45) otteniamo il potere risolutivo del reticolo:

$$RP = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN , \qquad (3.46)$$

cioè uguale al numero di fenditure N per l'ordine n.

### 3.4.2 Pattern diffrattivo di Fresnel

Sia quando o la sorgente o il punto di osservazione (o entrambi) sono vicini all'apertura diffrattiva, cosicché la curvatura del fronte d'onda diventa significativa.

#### Zone di Fresnel

Consideriamo un'apertura piana illuminata da una sorgente puntiforme S in modo che la linea retta che congiunge S al punto ricevente P sia perpendicolare al piano dell'apertura, come mostrato in figura 3.12. Possiamo esprimere la distanza PQS



come:

$$PQS = r + r' = \sqrt{h^2 + R^2} + \sqrt{h'^2 + R^2} \sim h + h' + \frac{1}{2}R^2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'}\right) . \quad (3.47)$$

Ora supponiamo di suddividere l'apertura in regioni limitate da cerchi concentrici  $R = \cos t$ , definiti in modo tale che r + r' differisca di  $\lambda/2$  da una circonferenza all'altra (vedi fig. 3.13). Queste regioni sono chiamate **regioni di Fresnel**. Dalla



Figure 3.13

condizione

$$(r+r')_{n+1} - (r+r')_n = \frac{\lambda}{2} , \qquad (3.48)$$

e definendo L come

$$\frac{1}{L} = \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'}\right) , \qquad (3.49)$$

si ottiene

$$\frac{1}{2L}(R_{n+1}^2 - R_n^2) = \frac{\lambda}{2} \rightarrow R_{n+1}^2 = \lambda L + R_n^2 , \qquad (3.50)$$

da cui otteniamo

$$R_{1} = \sqrt{\lambda L} ,$$

$$R_{2} = \sqrt{2\lambda L} ,$$

$$\dots ,$$

$$R_{n} = \sqrt{n\lambda L} .$$

$$(3.51)$$

Ogni punto della zona tra una circonferenza e l'altra emette radiazioni in fase, mentre il salto di fase tra una zona e la successiva è di 180° ( $\lambda/2$ ). La disturbanza ottica in P può essere calcolata sommando i contributi delle varie zone di Fresnel  $E_1, E_2, E_3, ...$ 

Le zone più lontane contribuiscono meno all'intensità in P (e quindi alla disturbanza) a causa del fattore di obliquità nell'integrale di Kirchhoff-Fresnel. Avremo dunque:

$$E_P| = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \dots =$$
  
=  $\frac{1}{2}|E_1| + \left(\frac{1}{2}|E_1| - |E_2| + \frac{1}{2}|E_3|\right) + \left(\frac{1}{2}|E_3| - |E_4| + \frac{1}{2}|E_5|\right) + \dots$  (3.52)

Supponendo che il valore di ogni  $|E_n|$  è approssimativamente uguale alla media di  $|E_{n-1}| \in |E_{n+1}|$ , i termini fra parentesi sono tutti nulli, per cui otteniamo

$$|E_P| \sim \frac{1}{2} |E_1|$$
, (3.53)

cioè alla metà del contributo della prima zona da sola.

#### Apertura rettangolare

Questa situazione è rappresentata in figura 3.14. Avremo approssimativamente

$$r' + r = h + h' + \frac{1}{2L}(x^2 + y^2) . \qquad (3.54)$$

Come nel caso della diffrazione di Fraunhofer, supponiamo che il fattore di obliquità e il fattore radiale 1/rr' varino poco rispetto all'esponenziale  $e^{ik(r+r')}$ , cosicché possono essere essere portati fuori dall'integrale, per cui avremo

$$U_P = C \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} e^{ik(x^2 + y^2)/2L} \, dx dy = C \int_{x_1}^{x_2} e^{ikx^2/2L} \, dx \int_{y_1}^{y_2} e^{iky^2/2L} \, dy \,. \quad (3.55)$$

Introducendo le variabili

$$u = x\sqrt{\frac{k}{\pi L}}$$
,  $v = y\sqrt{\frac{k}{\pi L}}$ , (3.56)

troviamo

$$U_P = \frac{C\pi L}{k} \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2} \, du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2} \, dv \;. \tag{3.57}$$



Figure 3.14

Gli integrali in  $u \in v$  si valutano in termini dell'integrale

$$\int_0^s e^{\imath \pi w^2/2} dw = \mathcal{C}(s) + \imath \mathcal{S}(s) , \qquad (3.58)$$

con

$$\mathcal{C}(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) dw ,$$
  
$$\mathcal{S}(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi w^2}{2}\right) dw ,$$
 (3.59)

denominati integrali di Fresnel.

Per valutare graficamente gli integrali di Fresnel è utile fare riferimento alla **spirale di Cornu** disegnata in figura 3.15. Un segmento di linea retta disegnato da  $s_1$  a  $s_2$  dà il valore dell'integrale:

$$\int_{s_1}^{s_2} e^{i\pi w^2/2} \, dw \, . \tag{3.60}$$

Inoltre, poiché

$$(d\mathcal{C})^2 + (d\mathcal{S})^2 = (ds)^2$$
, (3.61)

la lunghezza dell'arco che congiunge  $s_1$  e  $s_2$  sulla spirale è uguale alla differenza  $s_2 - s_1$ . Questa differenza è proporzionale alle dimensioni dell'apertura. Infatti, per la dimensione x:

$$s_2 - s_1 = u_2 - u_1 = \sqrt{\frac{k}{\pi L}} (x_2 - x_1)$$
 (3.62)

Nel caso limite di apertura infinita, cioè di nessuna diffrazione, avremo

$$u_1 = v_1 = -\infty ,$$
  
 $u_2 = v_2 = +\infty ,$ 
(3.63)



Figure 3.15: Spirale di Cornu.

e poiché

$$C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2} ,$$
  

$$C(-\infty) = S(-\infty) = -\frac{1}{2} ,$$
(3.64)

otteniamo

$$U_P = U_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi u^2/2} \, du \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi v^2/2} \, dv = U_1(1+i)^2 \,, \qquad (3.65)$$

dove  $U_1 = C\pi L/k$ , e  $(1+i)^2$  è la lunghezza della linea da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Ponendo  $U_1(1+i)^2 = U_0$ , possiamo scrivere

$$U_P = \frac{U_0}{(1+i)^2} \left[ \mathcal{C}(u) + i \mathcal{S}(u) \right]_{u_1}^{u_2} \left[ \mathcal{C}(v) + i \mathcal{S}(v) \right]_{v_1}^{v_2} \quad (3.66)$$

#### Fenditura e bordo

La diffrazione di Fresnel da una lunga fenditura è il caso limite di un'apertura rettangolare e si ottiene per  $u_1 \rightarrow -\infty$  e  $u_2 \rightarrow \infty$  e questo porta alla seguente formula per la disturbanza  $U_P$ :

$$U_P = \frac{U_0}{1+i} \left[ \mathcal{C}(v) + i \mathcal{S}(v) \right]_{v_1}^{v_2} , \qquad (3.67)$$

dove  $v_1$  e  $v_2$  definiscono i bordi della fenditura. Analogamente, il bordo può essere pensato come un limite in cui  $v_1 \to -\infty$  e quindi otteniamo

$$U_P = \frac{U_0}{1+i} \left[ \mathcal{C}(v_2) + i \mathcal{S}(v_2) + \frac{1}{2}(1+i) \right] , \qquad (3.68)$$

che è una funzione della sola variabile  $v_2$  che specifica la posizione del bordo di diffrazione. Ora, se il punto P è esattamente al bordo dell'ombra geometrica (vedi



figura 3.16) allora  $v_2 = 0$  e avremo

$$U_P = \frac{U_0}{1+i} \left[ \frac{1}{2} (1+i) \right] = \frac{U_0}{2} , \qquad (3.69)$$

cioè l'ampiezza al bordo d'ombra è la metà (e l'irradianza è 1/4) del valore corrispondente a nessuna ostruzione.

L'intensità è non nulla nella zona d'ombra geometrica. Nella regione illuminata l'intensità oscilla con ampiezza decrescente intorno al valore  $|U_0|^2$   $(v_2 \to \infty)$ . L'intensità più alta si ha per  $v \sim 1.25$  in cui  $I_P/I_0 \sim 1.4$  (vedi figura 3.17).



Figure 3.17

FUMMANONORONE

## Chapter 4

# Ottica dei solidi

Lo stato elettromagnetico della materia in un dato punto è descritto da quattro quantità:

- 1. la densità di carica  $\rho$ ;
- 2. la polarizzazione  $\vec{P}$ ;
- 3. la magnetizzazione  $\vec{M}$ ;
- 4. la densità di corrente  $\vec{J}$ .

Le equazioni di Maxwell sono

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} ,\\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{J} ,\\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} ,\\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} . \end{cases}$$
(4.1)

NIE ON

Introducendo il vettore spostamento elettrico  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ e il vettore induzione magnetica  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ otteniamo

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ,\\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} ,\\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho ,\\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 . \end{cases}$$

$$(4.2)$$

La relazione tra densità di corrente e campo elettrico è data da

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} , \qquad (4.3)$$

dove $\sigma$  è la conduttività. In<br/>oltre vale la relazione

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$
, (4.4)

che rappresenta la risposta delle cariche legate al campo elettrico; e la relazione

$$\vec{B} = \mu \vec{H} . \tag{4.5}$$

Poi, essendo anche  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , possiamo scrivere

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} , \qquad (4.6)$$

dove  $\chi$  è denominata suscettività elettrica, che vale

$$\chi = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0} \ . \tag{4.7}$$

Nei mezzi isotropi  $\chi$  è una quantità scalare, che ha lo stesso valore in ogni direzione del campo elettrico applicato. Per mezzi anisotropi la polarizzazione varia con la direzione del campo applicato e quindi  $\chi$  deve essere espresso come un tensore.

## 4.1 Equazione d'onda generale

Consideriamo solo mezzi elettricamente neutri e non magnetici, per cui  $\rho = 0$ ,  $\vec{M} = 0$ , e le equazioni di Maxwell diventano:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} ,\\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{J} ,\\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} ,\\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 . \end{cases}$$

$$(4.8)$$

Prendendo il rotore della prima equazione e la derivata  $\partial/\partial t$  della seconda equazione otteniamo

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{J} \right) , \qquad (4.9)$$

e quindi

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad , \tag{4.10}$$

dove i termini a secondo membro sono detti **termini sorgente**, poiché nascono dalla presenza di cariche di polarizzazione e conduzione all'interno del mezzo.

Nel caso di mezzi non conduttori il termine importante è

$$-\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} . \tag{4.11}$$

Nel caso di metalli il termine importante è

$$-\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} . \tag{4.12}$$

Nel caso di semiconduttori entrambi i termini sono importanti.

### 4.2 Propagazione della luce in dielettrici isotropi: dispersione

In un dielettrico isotropo gli elettroni sono permanentemente legati agli atomi che formano il mezzo e non c'è alcuna direzione preferenziale. Supponiamo che ciascun elettrone, di carica -e, in un dielettrico sia spostato a distanza  $\vec{r}$  dalla sua posizione di equilibrio. La polarizzazione macroscopica risultante  $\vec{P}$  del mezzo sarà data da

$$\vec{P} = -n_e e \vec{r} , \qquad (4.13)$$

dove  $n_e$  è la densità di elettroni (i.e. il numero di elettroni per unità di volume). Ora, se lo spostamento dell'elettrone è il risultato dell'applicazione di un campo elettrico statico  $\vec{E}$  e se l'elettrone è elasticamente legato alla sua posizione di equilibrio con una costante di forza k, allora possiamo scrivere

$$-e\vec{E} = k\vec{r} , \qquad (4.14)$$

cosicché avremo

$$\vec{P} = \frac{n_e e^2 \vec{E}}{k} , \qquad (4.15)$$

che chiamiamo polarizzazione statica.

Se il campo varia col tempo allora l'equazione del moto sarà

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m\gamma\frac{d\vec{r}}{dt} + k\vec{r} = -e\vec{E} , \qquad (4.16)$$

dove  $m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$  è una forza di frizione proporzionale alla velocità. Supponendo che la lunghezza d'onda  $\lambda$  del campo sia molto maggiore delle distanze atomiche tipiche  $r_0$ , i.e.  $\lambda \gg r_0$ , allora  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sim 1$  e quindi  $E \sim E_0 e^{-i\omega t}$  non varia spazialmente. Assumendo che l'elettrone abbia la medesima dipendenza temporale otteniamo  $r = r_0 e^{-i\omega t}$ . Quindi, inserendo nell'equazione del moto (4.16), otteniamo:

$$(-m\omega^2 - im\omega\gamma + k)\vec{r} = -e\vec{E} , \qquad (4.17)$$

ed essendo  $\vec{P} = -ne\vec{r}$  troviamo il risultato:

$$\vec{P} = \frac{n_e e^2}{-m\omega^2 - im\omega\gamma + k}\vec{E} .$$
(4.18)

Ponendo

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}} , \qquad (4.19)$$

possiamo riscrivere l'equazione (4.18) come

$$\vec{P} = \frac{n_e e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - \imath \omega \gamma} \vec{E} \quad , \tag{4.20}$$

dove  $\omega_0$  è detta **frequenza di risonanza**, poiché a questa frequenza c'è un grande cambiamento nell'indice di rifrazione e un forte assorbimento.

Consideriamo ora l'equazione d'onda, che per un dielettrico difetta del termine di conduzione e assume la forma seguente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{n_e e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \imath \omega \gamma} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$
(4.21)

Usando il fatto per cui

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} ,$$
 (4.22)

e anche

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 , \qquad (4.23)$$

otteniamo

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \left( 1 + \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \imath \omega \gamma} \right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.24)$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}z - \omega t)} . \tag{4.25}$$

Sostituendo nell'equazione (4.24) otteniamo

$$\widetilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \imath \omega \gamma} \right] .$$
(4.26)

La presenza del termine immaginario a denominatore implica che  $\widetilde{k}$  è complesso. Quindi possiamo scriverlo come:

$$\tilde{k} = k + i\alpha . (4.27)$$

Il fatto che  $\tilde{k}$  è complesso implica l'esistenza di un indice di rifrazione  $\tilde{n}$  ugualmente complesso, definito a partire da  $\tilde{k}$  nel modo seguente:

$$\widetilde{n} = \frac{c}{\omega}\widetilde{k} = n + i\beta .$$
(4.28)

Avremo quindi per il campo  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(kz - \omega t)} , \qquad (4.29)$$



Figure 4.1: L'indice di rifrazione è maggiore di 1 per piccole frequenze e cresce al crescere di  $\omega$  fino quasi alla risonanza. Vicino alla frequenza di risonanza la **dispersione** diventa **anomala**, cioè l'indice di rifrazione descresce all'aumentare della frequenza. L'assorbimento è massimo alla frequenza di risonanza  $\omega_0$ .

cioè l'ampiezza dell'onda descresce esponenzialmente con la distanza. L'energia dell'onda è proporzionale a  $|E|^2$  e sarà quindi descrescente come  $e^{-2\alpha z}$ , dove

$$2\alpha \equiv \text{ coeff. di assorbimento },$$
  

$$\beta \equiv \text{ coeff. di estinzione },$$

$$(4.30)$$

con

$$\beta = \frac{c}{\omega}\alpha \ . \tag{4.31}$$

Finora abbiamo supposto che tutti gli elettroni fossero identicamente legati e, quindi, avessero tutti le stesse frequenze di risonanza. Se, invece, supponiamo che gli elettroni possano essere differentemente legati agli atomi, allora avremo che una certa frazione  $f_1$  risuona alla frequenza  $\omega_1$ , un'altra frazione  $f_2$  ad  $\omega_2$ , e così via (vedi figura 4.2). Generalizzando l'equazione (4.26) otteniamo:

$$\widetilde{n}^2 = 1 + \frac{n_e e^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} .$$
(4.32)



## 4.3 Propagazione della luce in mezzi conduttori

In questo caso dobbiamo considerare il termine di conduzione nell'equazione d'onda, piuttosto che il termine di polarizzazione. Partiamo dall'equazione del moto per gli elettroni. Poiché gli elettroni di conduzione non sono legati non c'è il termine dovuto alla forza di richiamo elastica, e quindi possiamo scrivere:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}}{\tau} = -e\vec{E} . \qquad (4.33)$$

Indicando con  $N_e$  il numero di elettroni di conduzione per unità di volume, possiamo scrivere la densità di corrente  $\vec{J}$  come:

$$\vec{J} = -N_e e \vec{v} . \tag{4.34}$$

Inserendo nell'equazione 4.33 troviamo

$$\frac{d\vec{J}}{dt} + \frac{\vec{J}}{\tau} = \frac{N_e e^2}{m} \vec{E} . \qquad (4.35)$$

Il transiente è dato dalla soluzione dell'equazione omogenea

$$\frac{d\vec{J}}{dt} + \frac{\vec{J}}{\tau} = 0 , \quad \vec{J}(t) = J_0 e^{-t/\tau} , \qquad (4.36)$$

dove  $\tau$  è il tempo di rilassamento.

Se abbiamo un campo elettrico statico l'equazione sarà

$$\frac{\vec{J}}{\tau} = \frac{N_e e^2}{m} \vec{E} , \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} , \qquad (4.37)$$

dove

$$\sigma = \frac{N_e e^2}{m} \tau \tag{4.38}$$

è la conducibilità statica ( $\tau \sim 10^{-13}$  s).

Assumendo, invece, una dipendenza armonica del tipo  $e^{i\omega t}$  sia per  $\vec{E}$  che per  $\vec{J}$  otteniamo dall'equazione del moto il seguente risultato:

$$(-\iota\omega + \tau)\vec{J} = \frac{N_e e^2}{m}\vec{E} = \frac{\sigma}{\tau}\vec{E} ,$$
  
$$\vec{J} = \frac{\sigma}{\tau}\frac{1}{\tau^{-1} - \iota\omega}\vec{E} = \frac{\sigma}{1 - \iota\omega\tau}\vec{E} ,$$

$$(4.39)$$

che si riduce a  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  per  $\omega \to 0$ .

L'equazione d'onda è

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\sigma}{1 - \imath \omega \tau} \frac{\partial E}{\partial t} \quad . \tag{4.40}$$

Utilizzando una soluzione di prova $\vec{E}=\vec{E}_0e^{\imath(\tilde{k}z-\omega t)}$  con $\tilde{k}$  complesso otteniamo

$$\widetilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\imath \omega \mu_0 \sigma}{1 - \imath \omega \tau} , \qquad (4.41)$$

che nel limite di piccole frequenze diventa  $\sim$ 

$$\widetilde{k}^{2} = \imath \omega \mu_{0} \sigma \rightarrow \widetilde{k} \sim \sqrt{\imath \omega \mu_{0} \sigma} = \sqrt{\omega \mu_{0} \sigma} e^{\imath \pi/4} ,$$
  

$$\widetilde{k} \sim \sqrt{\frac{\omega \mu_{0} \sigma}{2}} (1+\imath) = k + \imath \alpha ,$$
  

$$k \approx \alpha \sim \sqrt{\frac{\omega \mu_{0} \sigma}{2}} .$$
(4.42)

Questa equazione mostra perché i buoni conduttori sono altamente opachi: perché un alto valore della conducibilità  $\sigma$  dà un alto valore del coefficiente di assorbimento  $\alpha$ .

L'indice di rifrazione complesso è dato da:

$$\widetilde{n} = \frac{c}{\omega}\widetilde{k} = n + \imath\beta , \qquad (4.43)$$

dove l'indice di rifrazione n e coefficiente di estinzione  $\beta$  sono dati da

$$n \sim \beta \sim \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}}$$
 (4.44)

Si definisce "spessore della pelle" (dall'inglese skin-depth) di un metallo la distanza alla quale l'ampiezza dell'onda elettromagnetica diminuisce di un fattore 1/e rispetto al valore assunto sulla superficie, i.e:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} , \qquad (4.45)$$

da cui si vede che un alto valore di  $\sigma$  implica una piccola profondità di penetrazione dell'onda. Ad esempio, per il rame, nel caso di microonde ( $\lambda \sim 1$ mm), troviamo  $\delta \sim 10^{-4}$ mm.

Consideriamo di nuovo l'espressione completa di  $\tilde{k}^2$  o equivalentemente di  $\tilde{n}^2$ :

$$\widetilde{n}^{2} = \frac{c^{2}}{\omega^{2}}\widetilde{k}^{2} = 1 + \frac{c^{2}}{\omega^{2}}\frac{\imath\omega\mu_{0}\sigma}{1 - \imath\omega\tau} = 1 + \frac{\imath\mu_{0}\sigma c^{2}}{\omega - \imath\omega^{2}\tau} = 1 - \frac{\mu_{0}\sigma c^{2}/\tau}{\omega^{2} + \imath\omega/\tau} .$$
(4.46)

Ponendo  $\omega_p = \sqrt{\mu_0 \sigma c^2 / \tau}$  possiamo riscrivere  $\tilde{n}^2$  come segue:

$$\widetilde{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \imath \omega \tau^{-1}} \quad (4.47)$$

dove  $\omega_p$  è denominata **frequenza di plasma del metallo** ed ha un valore tipico di circa  $\omega_p \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$  (assumendo un  $\tau$  tipico di circa  $\sim 10^{-13} \text{ s}$ .



Figure 4.3: Il coefficiente di estinzione  $\beta$  è grande a basse frequenze ( $\lambda$  grandi) e decresce al crescere di  $\omega$ , cioè il metallo diventa trasparente ad alte frequenze.

## 4.4 Riflessione e rifrazione alla frontiera di un mezzo assorbente

Consideriamo un'onda piana incidente sulla frontiera di un mezzo avente indice di rifrazione complesso  $\tilde{n} = n + i\beta$ . Il vettore d'onda complesso sarà  $\vec{k} = \vec{k} + i\vec{\alpha}$ . Per semplicità consideriamo il primo mezzo non assorbente. Avremo

Onda incidente : 
$$e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}$$
,  
Onda riflessa :  $e^{i(\vec{k}'_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}$ , (4.48)  
Onda rifratta :  $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ .

Per la continuità spaziale all'interfaccia avremo

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \vec{k}'_0 \cdot \vec{r} ,$$
  

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r} = (\vec{k} + \imath \vec{\alpha}) \cdot \vec{r} \rightarrow \begin{cases} \vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r} \\ 0 = \vec{\alpha} \cdot \vec{r} \rightarrow \vec{\alpha} \perp \text{ interfaccia} \end{cases}$$
(4.49)

Quindi, in generale,  $\vec{k}$  e  $\vec{\alpha}$  hanno direzioni differenti e  $\vec{\alpha}$  è sempre ortogonale all'interfaccia.



Figure 4.4: Le onde si muovono nella direzione del vettore  $\vec{k}$ , ma le loro ampiezze diminuiscono esponenzialmente con la distanza dall'interfaccia.

Dalla relazione  $\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}$  deduciamo il risultato seguente:

$$k_0 \sin \theta = k \sin \phi \quad , \tag{4.50}$$

da cui si potrebbe ricavare l'angolo di rifrazone dato l'angolo di incidenza e il valore di k. Ad ogni modo, k non è costante, ma è esso stesso funzione dell'angolo  $\phi$ . Consideriamo, quindi, l'equazione d'onda

$$\nabla^2 E = \frac{\widetilde{n}^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial^2} , \qquad (4.51)$$

da cui otteniamo (operando le sostituzioni  $\nabla \to \imath \widetilde{k}, \, \frac{\partial}{\partial t} \to \imath \omega)$ :

$$\vec{\tilde{k}} \cdot \vec{\tilde{k}} = \tilde{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \tilde{n}^2 k_0^2 \rightarrow (\vec{k} + i\vec{\alpha}) \cdot (\vec{k} + i\vec{\alpha}) = (n + i\beta)^2 k_0^2 , \qquad (4.52)$$

e quindi

$$\begin{cases} k^{2} - \alpha^{2} = (n^{2} - \beta^{2})k_{0}^{2} \\ \vec{k} \cdot \vec{\alpha} = k\alpha \cos \phi = n\beta k_{0}^{2} \end{cases}$$
(4.53)

Risolvendo otteniamo

$$k_0^2[n^2 - \beta^2 + 2in\beta - \sin^2\theta] = k_0^2(\tilde{n} - \sin^2\theta) =$$

$$= k^2 - \alpha^2 + 2ik\alpha\cos\phi - k^2\sin^2\phi = k^2\cos^2\phi + 2ik\alpha\cos\phi - \alpha^2, \quad (4.54)$$

$$\rightarrow \boxed{k\cos\phi + i\alpha = k_0\sqrt{\tilde{n}^2 - \sin^2\theta}}.$$

Esprimiamo allora la legge della rifrazione  $n_1 \sin \theta = n_2 \sin \phi$  nell'equazione puramente formale seguente:

$$\widetilde{n} = \frac{\sin \theta}{\sin \Phi} \quad , \tag{4.55}$$

dove "l'angolo"  $\Phi$  è un numero complesso. Procedendo ancora formalmente possiamo esprimere  $\widetilde{n}$  come segue:

$$\sin \Phi = \frac{\sin \theta}{\widetilde{n}} \to \cos \Phi = \sqrt{1 - \sin^2 \Phi} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\widetilde{n}^2}} ,$$

$$\cos \Phi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\widetilde{n}^2}} = \frac{1}{\widetilde{n}} \sqrt{\widetilde{n}^2 - \sin^2 \theta} \to \boxed{\widetilde{n} = \frac{k \cos \phi + i\alpha}{k_0 \cos \Phi}}.$$
(4.56)

A questo punto possiamo trovare la **riflettanza**. Consideriamo, quindi, le ampiezze dei campi elettrico e magnetico seguenti:

$$\vec{E} , \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k}_0 \times \vec{E} ,$$
  

$$\vec{E}' , \vec{H}' = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k}'_0 \times \vec{E}' ,$$
  

$$\vec{E}'' , \vec{H}'' = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k} \times \vec{E}'' = \frac{1}{\mu_0 \omega} [\vec{k} \times \vec{E}'' + \imath \vec{\alpha} \times \vec{E}''] .$$
(4.57)

Consideriamo il caso TE:

$$\vec{E} + \vec{E}' = \vec{E}'' ,$$
  

$$-H\cos\theta + H'\cos\theta = H''_{\text{tang}} ,$$
  

$$-k_0 E\cos\theta + k'_0 E'\cos\theta = -(kE''\cos\phi + i\alpha E'') = -\tilde{n}k_0\cos\Phi E'' ,$$
(4.58)

e quindi

$$\frac{E'}{E} = \frac{E''}{E} - 1 = \left(k_0 \cos\theta - k_0' \frac{E'}{E} \cos\theta\right) \frac{1}{\tilde{n}k_0 \cos\Phi} - 1 = \frac{\cos\theta}{\tilde{n}\cos\Phi} - \frac{E'}{E} \frac{\cos\theta}{\tilde{n}\cos\Phi} - 1,$$

$$\rightarrow \frac{E'}{E} \left(1 + \frac{\cos\theta}{\tilde{n}\cos\Phi}\right) = \frac{\cos\theta}{\tilde{n}\cos\Phi} - 1,$$

$$\rightarrow \left[r_s = \frac{\cos\theta - \tilde{n}\cos\Phi}{\cos\theta + \tilde{n}\cos\Phi}\right],$$
(4.59)

che ha una forma simile a quella trovata per un dielettrico non assorbente con la differenza che  $\tilde{n} \in \Phi$  sono complessi. Un'equazione analoga si ricava per il caso TM.



Figure 4.5: L'angolo  $\theta_1$  è in un certo senso l'analogo dell'angolo di Brewster.

Nel caso di incidenza normale avremo che

$$r_s = r_p = \frac{1 - \widetilde{n}}{1 + \widetilde{n}} = \frac{1 - n - i\beta}{1 + n + i\beta} , \qquad (4.60)$$

che si riduce a $\frac{1-n}{1+n}$  per mezzi non assorbenti. D'altra parte, per i metalli $\beta$  è molto grande e

$$R = |r_s|^2 = \left|\frac{1-\widetilde{n}}{1+\widetilde{n}}\right|^2 = \frac{(1-n)^2 + \beta^2}{(1+n)^2 + \beta^2} \to 1 \quad \text{per } \beta \to \infty \ . \tag{4.61}$$

Nel limite di basse frequenze  $n \in \beta$ sono molto grandi e valgono approssimativamente:

$$n \sim \beta \sim \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}}$$
 (4.62)

Allora avremo che

$$R = \frac{1 + 2n^2 - 2n(+2n - 2n)}{1 + 2n^2 + 2n} = 1 - \frac{4n}{1 + 2n^2 + 2n} = 1 - \frac{2}{1 + n + \frac{1}{2n}} \sim 1 - \frac{2}{n} \sim 1 - \sqrt{\frac{8\omega\epsilon_0}{\sigma}},$$
(4.63)

per cui si vede che a basse frequenze e alta conducibilità: $R\sim 1.$ 

## 4.5 Propagazione della luce nei cristalli

Nei cristalli elettricamente anisotropi la polarizzazione varia con la direzione. La velocità dell'onda nel cristallo è altresì una funzione della direzione. La dipendenza di  $\vec{P}$  da  $\vec{E}$  si esprime nella forma di una relazione tensoriale:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} , \qquad (4.64)$$

o, in forma compatta:

$$P^{\mu} = \epsilon_0 \chi^{\mu}_{\ \nu} E^{\nu} \quad . \tag{4.65}$$

Se  $\chi^{\mu}_{\nu}$  è un tensore simmetrico, allora esiste sempre un insieme di assi coordinati, denominati **assi principali**, tale che  $\chi^{\mu}_{\nu}$  è **diagonale**:

$$\begin{pmatrix} \chi_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \chi_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \chi_{zz} \end{pmatrix} , \qquad (4.66)$$

dove le quantità  $\chi_{ii}$  sono chiamate suscettività principali.

Dal momento che

$$\chi = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 , \qquad (4.67)$$

troviamo che

$$\epsilon_r = 1 + \chi \ . \tag{4.68}$$

Consideriamo l'equazione d'onda

$$(\nabla \times \nabla \times E)^{\mu} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^{\mu}}{\partial^2} = -\frac{1}{c^2} \chi^{\mu}_{\ \nu} \frac{\partial^2 E^{\nu}}{\partial^2} . \tag{4.69}$$

L'equazione ammette soluzioni del tipo onda piana  $e^{\imath(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ ammesso che $\vec{k}$ soddisfi:

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} (\chi \vec{E}) , \qquad (4.70)$$

che per componenti si scrive come segue:

$$\left(-k_{y}^{2}-k_{z}^{2}+\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\right)E_{x}+k_{x}k_{y}E_{y}+k_{x}k_{z}E_{z}=-\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\chi_{11}E_{x},$$

$$k_{y}k_{x}E_{x}+\left(-k_{x}^{2}-k_{z}^{2}+\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\right)E_{y}+k_{y}k_{z}E_{z}=-\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\chi_{22}E_{y},$$

$$k_{z}k_{x}E_{x}+k_{z}k_{y}E_{y}+\left(-k_{x}^{2}-k_{y}^{2}+\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\right)E_{z}=-\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\chi_{33}E_{z}.$$
(4.71)

Mettiamoci nel caso particolare in cui l'onda si propaga lungo uno degli assi principali, ad esempio x, cosicché  $k_x = k, k_y = k_z = 0$ . Avremo

$$\frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x \rightarrow E_x = 0 (\omega \neq 0, \chi_{xx} \neq 0) \rightarrow \vec{E} \perp \hat{x} ,$$

$$\left(-k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{yy} E_y ,$$

$$\left(-k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{zz} E_z .$$

$$(4.72)$$

Se  $E_y \neq 0$  allora

$$-k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{yy} \to \frac{\omega^2}{c^2} (\chi_{yy} + 1) = k_x^2 ,$$
  
$$\to k_x^{(1)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\chi_{yy} + 1} .$$
 (4.73)

Se  $E_z \neq 0$  allora

$$k_x^{(2)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\chi_{zz} + 1} .$$
 (4.74)

Poiché  $\omega/k$  è la velocità di fase dell'onda, allora abbiamo 2 possibili velocità di fase:  $c/\sqrt{\chi_{yy}+1}$  per la direzione  $y \in c/\sqrt{\chi_{zz}+1}$  per la direzione z. In generale, per ogni direzione di  $\vec{k}$  ci sono 2 possibili valori della velocità di fase.

Siano

$$n_x = \sqrt{\chi_{xx} + 1} ,$$
  

$$n_y = \sqrt{\chi_{yy} + 1} ,$$
  

$$n_z = \sqrt{\chi_{zz} + 1} ,$$
  
(4.75)

i 3 indici di rifrazione principali. Al fine di avere soluzione non banale all'equazione (4.71) dobbiamo imporre che il determinante dei coefficienti si annulli:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{n_x\omega}{c}\right)^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \left(\frac{n_y\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \left(\frac{n_z\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 , \qquad (4.76)$$

che rappresenta una superficie nello spazio  $\vec{k}$ . Disegnamo, quindi, la **superficie**  $\vec{k}$ . Consideriamo l'intersezione della superficie con il piano xy per il quale  $k_z = 0$ :

$$\left[\left(\frac{n_z\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2\right] \left\{ \left[\left(\frac{n_x\omega}{c}\right)^2 - k_y^2\right] \left[\left(\frac{n_y\omega}{c}\right)^2 - k_x^2\right] - k_x^2k_y^2\right\} = 0. \quad (4.77)$$

Avremo quindi:

$$k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{n_z \omega}{c}\right)^2, \quad \text{Circonferenza},$$

$$\frac{k_x^2}{\left(\frac{n_y \omega}{c}\right)^2} + \frac{k_y^2}{\left(\frac{n_x \omega}{c}\right)^2} = 1, \quad \text{Ellisse}.$$
(4.78)



Figure 4.6: **Superficie**  $\vec{k}$ . L'intercetta della superficie  $\vec{k}$  con ciascun piano coordinato consiste di una circonferenza e un ellisse. Ci sono due falde e, quindi, per ogni data direzione  $\vec{k}$  ci sono due possibili valori del numero d'onda k e cioè due possibili valori della velocità di fase. Le due velocità di fase corrispondono sempre a due polarizzazioni reciprocamente ortogonali (e.g.  $E_y$  e  $E_z$  nel caso semplice  $\vec{k} = k_x$ ). Nel punto P le 2 falde s'intersecano. La direzione  $\vec{OP}$  corrispondente definisce 2 valori di k uguali. Questa direzione è l'**asse ottico** del cristallo. Quando un'onda si propaga lungo l'asse ottico le due velocità di fase corrispondenti alle 2 polarizzazioni ortogonali si riducono allo stesso valore.

Nel caso  $n_x \neq n_y \neq n_z$  ci sono 2 assi ottici (**cristallo biassico**). Se, invece, due indici sono uguali, allora esiste un solo asse ottico (**cristallo uniassico**): la superficie  $\vec{k}$  si riduce ad una sfera e ad un ellisoide di rivoluzione (vedi figura 4.7). L'indice di rifrazione corrispondente ai due elementi uguali è l'indice ordinario, l'altro è l'indice straordinario. Se  $n_x = n_y = n_z$  la superficie è una sfera e il cristallo non è birifrangente, ma isotropo.



Figure 4.7

Riassumendo:  
Cristallo CUBICO 
$$\chi^{\mu}_{\ \nu} = \text{diag}[\chi_{xx}, \chi_{xx}, \chi_{xx}]$$
  $n = \sqrt{1 + \chi_{xx}}$ ,  
Cristallo UNIASSICO  $\chi^{\mu}_{\ \nu} = \text{diag}[\chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{zz}]$   $n_{\text{ord}} = \sqrt{1 + \chi_{xx}}$ ,  
 $n_{\text{str}} = \sqrt{1 + \chi_{zz}}$ ,  
Cristallo BIASSICO  $\chi^{\mu}_{\ \nu} = \text{diag}[\chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{zz}]$   $n_x = \sqrt{1 + \chi_{xx}}$ ,  
 $n_x = \sqrt{1 + \chi_{xx}}$ ,  
 $n_z = \sqrt{1 + \chi_{zz}}$ ,

Se  $n_{\rm ord} < n_{\rm str}$  il cristallo è chiamato uniassico **positivo**; se invece  $n_{\rm ord} < n_{\rm str}$  è denominato uniassico **negativo** (vedi figura 4.7).

#### Vettore di Poynting

Sebbene  $\vec{k}$  sia la direzione dell'onda, non è detto che il flusso di energia  $\vec{E} \times \vec{H}$  sia nella stessa direzione. Questo deriva dal fatto che in un mezzo anisotropo  $\vec{E}$  e  $\vec{k}$  non sono in generale ortogonali. In ogni caso vale  $\vec{H} = (\mu_0 \omega)^{-1} \vec{k} \times \vec{E}$ , e quindi  $\vec{H}$  è ortogonale a  $\vec{E}$  e  $\vec{k}$  (vedi figura 4.8).

## 4.6 Doppia rifrazione all'interfaccia

Consideriamo un'onda piana incidente sulla superficie di un cristallo. Sia  $\vec{k_0}$  il vettore d'onda dell'onda incidente e  $\vec{k}$  il vettore d'onda dell'onda rifratta. La relazione

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r} \tag{4.80}$$

rimane comunque valida. Ora, però, per ogni data direzione di propagazione abbiamo 2 possibili vettori di propagazione. A causa della duplice natura della superficie  $\vec{k}$  è altresì vero che per un dato valore della proiezione del vettore di propagazione esistono 2 possibili vettori di propagazione (vedi figura 4.9). Valgono,



Figure 4.8: Il vettore spostamento elettrico  $\vec{D}$  è dato da:  $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \hat{\chi})\vec{E}$ , ed è quindi ortogonale a  $\vec{k}$  ( $\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = -(\omega^2/c^2\epsilon_0)\vec{D}$ ). Le superfici di fase costante si muovono ad una velocità data da  $u = v/\cos\theta \ge v$ , ed è uguale a v solo per  $\theta = 0$ , nel qual caso la propagazione è lungo uno degli assi principali e quindi  $\vec{k}$  ed  $\vec{S}$  sono paralleli.



Figure 4.9
inoltre, le relazioni:

$$k_0 \sin \theta = k_1 \sin \phi_1 ,$$
  

$$k_0 \sin \theta = k_2 \sin \phi_2 .$$
(4.81)

Le due relazioni non costituiscono, comunque, la legge di Snell per la birifrangenza, poiché in generale  $k_1$  e  $k_2$  non sono costanti, ma variano con le direzioni dei vettori  $\vec{k_1} \in \vec{k_2}$ . Questo vuol dire che nemmeno il rapporto  $\sin \theta / \sin \phi_{1,2}$  è costante come nel caso di un mezzo isotropo.

Consideriamo ora solo cristalli uniassici. In questo caso una delle parti della superficie  $\vec{k}$  è una sfera e il corrispondente numero d'onda k è costante per tutte le direzioni dell'onda nel cristallo e vale la legge di Snell. Quest'onda è l'**onda ordinaria** e per essa vale la relazione:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = n_{\rm ord} , \qquad (4.82)$$

dove  $n_{\rm ord}$  è l'indice di rifrazione ordinario. La superficie  $\vec{k}$  per l'altra onda è uno sferoide e la legge di Snell non è valida. Quest'onda è denominata **onda** straordinaria. In generale  $n_{\rm str} > n_{\rm ord}$  per cristalli positivi, per cui  $\phi_{\rm str} < \phi_{\rm ord}$ , mentre per cristalli negativi avremo  $\phi_{\rm str} > \phi_{\rm ord}$ . In ogni caso le polarizzazioni delle due onde sono ortogonali.

#### 4.7 Prisma polarizzante

Consideriamo un'onda incidente sulla frontiera di un cristallo dall'interno. Mettiamoci nel caso in cui l'asse ottico è perpendicolare al piano d'incidenza come mostrato in figura 4.10c). In questo caso la sezione della superficie  $\vec{k}$  consiste di 2 circonferenze e quindi vale la legge di Snell sia per l'onda ordinaria che per quella straordinaria. Per semplicità, supponiamo che il mezzo esterno sia aria (n = 1). Quindi, se  $\theta$  è l'angolo interno di incidenza e  $\phi_{ord}$ ,  $\phi_{str}$  gli angoli di rifrazione dell'onda ordinaria e straordinaria (vedi figura 4.11), avremo:

$$n_{\rm ord} \sin \theta = \sin \phi_{\rm ord} ,$$

$$n_{\rm str} \sin \theta = \sin \phi_{\rm str} .$$
(4.83)

Il vettore  $\vec{E}$  dell'onda ordinaria è perpendicolare alla direzione dell'asse ottico e il vettore  $\vec{E}$  dell'onda straordinaria è parallelo all'asse ottico.

Supponiamo di avere un cristallo uniassico negativo (calcite), quindi con  $n_{\rm ord} > n_{\rm str}$ . La condizione per la riflessione interna totale è

$$\sin\theta > n = \frac{n_2}{n_1} \ . \tag{4.84}$$

In questo caso  $n_2 = 1$  (aria) e  $n_1 = n_{\text{ord}}$  o  $n_2 = n_{\text{str}}$ , e quindi  $n = 1/n_{\text{ord}}$  o  $n = 1/n_{\text{str}}$ . Supponiamo che  $\theta$  soddisfi

$$n_{\rm str} < \frac{1}{\sin \theta} < n_{\rm ord} \rightarrow \frac{1}{n_{\rm ord}} < \sin \theta < \frac{1}{n_{\rm str}}$$
 (4.85)

Di conseguenza c'è riflessione interna totale per l'onda ordinaria ma non per l'onda straordinaria, e quindi l'onda rifratta è completamente polarizzata.





Figure 4.10: Casi di birifrangenza.



FUMMANORONE

# Chapter 5

# Laser

### 5.1 Emissione stimolata e radiazione termica

Consideriamo un sistema quantistico in cui ci sono livelli  $1, 2, 3, \ldots$  con energie  $E_1, E_2, E_3, \ldots$  Siano  $N_1, N_2, N_3, \ldots$  le popolazioni di questi livelli (numero di atomi per unità di volume nel livello considerato). Ora, se il sistema atomico è in equilibrio con la radiazione termica ad una data temperatura T, allora il rapporto delle popolazioni fra due livelli, e.g. tra il livello 1 e il livello 2, è:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2 - E_1)} , \qquad (5.1)$$

dove  $\beta = 1/kT$ ekè la costante di Boltzmann. Quindi

se 
$$E_2 > E_1 \rightarrow N_2 < N_1$$
. (5.2)

Un atomo nel livello 2 può decadere al livello 1 con l'emissione di un fotone per emissione spontanea. Se  $A_{21}$  è la velocità di transizione per l'emissione spontanea, allora il numero di decadimenti spontanei per secondo è:

$$N_2 A_{21}$$
 . (5.3)

In aggiunta alle transizioni spontanee ci saranno anche le transizioni stimolate.

Per l'assorbimento, la velocità di transizione dal livello  $1 \rightarrow 2 \ge B_{12}$  e il numero di atomi per secondo che passa da  $1 \rightarrow 2 \ge$ 

$$N_1 B_{12} \rho(\omega_{21})$$
, (5.4)

dove  $\rho(\omega_{21})$  è la densità di energia alla frequenza

$$\omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \ . \tag{5.5}$$

Analogamente, per l'emissione stimolata avremo:

$$N_2 B_{21} \rho(\omega_{21}) . (5.6)$$

All'equilibrio termico il numero di transizioni per secondo da  $1 \rightarrow 2$  deve essere uguale al numero di transizioni per secondo da  $1 \rightarrow 2$ :

$$N_1 B_{12} \rho(\omega_{21}) = N_2 B_{21} \rho(\omega_{21}) + N_2 A_{21} , \qquad (5.7)$$

da cui otteniamo:

$$\rho(\omega_{21}) = \frac{N_2 A_{21}}{N_1 B_{12} - N_2 B_{21}} = \frac{N_2 A_{21}}{N_2 B_{21} \left(\frac{N_1 B_{12}}{N_2 B_{21}} - 1\right)} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}}} \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}}} e^{\hbar \omega_{21}/kT} - 1} = \frac{\hbar \omega_{21}^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar \omega_{21}/kT} - 1} ,$$
(5.8)

e quindi troviamo

$$\begin{cases}
A_{21} = B_{21} \frac{\hbar \omega_{21}^3}{\pi^2 c^3} \\
B_{12} = B_{21}
\end{cases},$$
(5.9)

dove la seconda equazione rappresenta l'espressione matematica del **bilancio det**tagliato.

Il rapporto fra emissione stimolata ed emissione spontanea è

$$\frac{\text{emiss. stim.}}{\text{emiss. spont.}} = \frac{B_{21}\rho(\omega_{21})}{A_{21}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{21}/kT} - 1} .$$
(5.10)

Con sorgenti ottiche ordinarie l'emissione stimolata è molto piccola nella regione del visibile, e poiché le transizioni spontanee accadono in modo casuale, le sorgenti ordinarie di radiazione visibile sono incoerenti.

#### 5.2 Amplificazione in un mezzo

Consideriamo un mezzo ottico attraverso il quale viene fatta passare della radiazione e supponiamo che il mezzo contenga atomi in vari livelli  $E_1, E_2, E_3, \ldots$ . Concentriamoci su due livelli  $E_1, E_2$  con  $E_1 < E_2$ . Le transizioni per emissione stimolata e assorbimento che coinvolgono questi livelli sono proporzionali a  $N_2B_{21}$ e  $N_1B_{12}$ . Poiché  $B_{21} = B_{12}$ , le transizioni per emissione stimolata verso il basso saranno superiori alle transizioni per assorbimento verso l'alto se

$$N_2 > N_1$$
, (5.11)

cioè se la popolazioni dello stato superiore è più grande di quella dello stato inferiore. Una tale condizione è contraria alla distribuzione all'equilibrio termico dato dall'equazione di Boltzmann:

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\beta(E_2 - E_1)} , \qquad (5.12)$$

ed è chiamata **inversione di popolazione** (vedi figura 5.1). Se esiste un'inversione di popolazione, allora un fascio di luce aumenterà la sua intensità, i.e. sarà **amplificato**, quando passa nel mezzo. Questo è dovuto al fatto che il guadagno di



energia per emissione stimolata supera la perdita dovuta all'assorbimento.

La radiazione emessa per emissione stimolata è nella stessa direzione del fascio primario e ha anche una relazione di fase definita, cioè è coerente con la radiazione primaria.

#### La costante di guadagno

Supponiamo che un fascio di luce si propaghi nel mezzo in cui è stata prodotta un'inversione di popolazione. Per un fascio collimato la densità di energia  $\rho(\omega)$  è legata all'intensità  $I(\omega)$  nell'intervallo di frequenze tra  $\omega \in \omega + \Delta \omega$  dalla relazione seguente:

$$\rho(\omega)\Delta\omega = \frac{I(\omega)}{c}\Delta\omega .$$
 (5.13)

Per differenti motivi (e.g. effetto Doppler) non tutti gli atomi in un dato livello energia sono soggetti ad emissione o assorbimento. Piuttosto, una certa frazione  $\Delta N_1$  di  $N_1$  (atomi nel livello 1) è soggetta alla transizione verso l'alto, per cui il numero di transizioni per unità di tempo verso l'alto è:

$$B_{12}\rho(\omega_{21})\Delta N_1 = B_{12}\frac{I(\omega_{21})}{c}\Delta N_1 .$$
 (5.14)

Analogamente, per le transizioni verso il basso abbiamo:

$$B_{21}\rho(\omega_{21})\Delta N_2 = B_{21}\frac{I(\omega_{21})}{c}\Delta N_2 . \qquad (5.15)$$

Ogni transizione verso l'alto sottrae un quanto di energia  $\hbar\omega$  al fascio. Ogni transizione verso il basso aggiunge un quanto di energia  $\hbar\omega$  al fascio. Al netto, il cambiamento della densità di energia sarà dato da:

$$\frac{d}{dt}[\rho(\omega)\Delta\omega] = \hbar\omega[B_{21}\rho(\omega)\Delta N_2 - B_{12}\rho(\omega)\Delta N_1] .$$
(5.16)

Ponendo dt = dx/c avremo

$$\frac{d}{dx}I(\omega) = \hbar\omega \left[ B_{21}\rho(\omega)\frac{\Delta N_2}{\Delta\omega} - B_{12}\rho(\omega)\frac{\Delta N_1}{\Delta\omega} \right] = = \frac{\hbar\omega}{c} B_{21}I(\omega) \left[ \frac{\Delta N_2}{\Delta\omega} - \frac{\Delta N_1}{\Delta\omega} \right] , \qquad (5.17)$$

che dà il tasso di crescita del fascio nella direzione di propagazione. Integrando troviamo

$$I(\omega) = I_0(\omega)e^{\alpha(\omega)x} \quad , \tag{5.18}$$

dove

$$\alpha(\omega) = \frac{\hbar\omega}{c} B_{21} \left( \frac{\Delta N_2}{\Delta \omega} - \frac{\Delta N_1}{\Delta \omega} \right) .$$
 (5.19)

Supponendo che tutti gli atomi nei livelli  $N_1$  e  $N_2$  contribuiscano alle transizioni, troviamo il seguente limite superiore per  $\alpha$ :

$$\alpha_{\text{MAX}}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{c\Delta\omega} B_{21}(N_2 - N_1) \quad , \tag{5.20}$$

da cui si vede che  $\alpha$  è positivo se  $N_2 > N_1$ , che è la condizione per l'**amplificazione**. Se, invece,  $N_2 < N_1$  (che è la condizione normale all'equilibrio termico) allora  $\alpha$  è negativo e si ha assorbimento.

## 5.3 Sistema a 3 livelli

Il numero minimo di livelli per ottenere un'inversione di popolazione è tre. Consideriamo quindi 3 livelli  $E_1, E_2, E_3$  con  $E_1 < E_2 < E_3$ . Le equazioni caratteristiche sono

$$\frac{dN_3}{dt} = W_p N_1 - W_{32} N_3 - W_{31} N_3 , \frac{dN_2}{dt} = W_{32} N_3 - W_{21} N_2 .$$
 (5.21)

In condizioni di equilibrio:

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0 , \qquad (5.22)$$

da cui ricaviamo

$$\begin{split} W_p N_1 &- (W_{32} + W_{31}) N_3 = W_{32} N_3 - W_{21} N_2 , \\ W_p N_1 &= 2 W_{32} N_3 + W_{31} N_3 - W_{21} N_2 , \\ W_p &= (2 W_{32} + W_{31}) \frac{N_3}{N_1} - W_{21} \frac{N_3}{N_1} , \\ &\rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{2 W_{32} + W_{31}}{W_{21}} \frac{N_3}{N_1} - \frac{W_p}{W_{21}} = \frac{W_p}{W_{21}} \left[ \frac{N_3}{N_1} \frac{2 W_{32} + W_{31}}{W_p} - 1 \right] \\ &\qquad (5.23) \end{split}$$

Per avere l'inversione di popolazione, cio<br/>è $N_{\rm 2}/N_{\rm 1}>1$ dobbiamo imporre quindi:

$$\frac{W_p}{W_{21}} \left[ \frac{N_3}{N_1} \frac{2W_{32} + W_{31}}{W_p} - 1 \right] > 1 \quad . \tag{5.24}$$



Figure 5.2: La transizione da  $1 \rightarrow 3$  è prodotta mediante **pompaggio ottico** e la corrispondente velocità di transizione è  $W_p$ . Lo stato 2 è metastabile, cioè compie transizioni di dipolo magnetico o quadrupolo elettrico.