

Temi di Relatività Generale

Flaviano Morone

FLAVIANOMORONE-RELATIVITÀ

Contents

1	Sul redshift gravitazionale delle linee spettrali	5
2	Sull'equazione delle geodetiche per particelle massive e a massa nulla	9
3	Sulla deflessione della luce nelle vicinanze di un corpo massivo	17
4	Sulla precessione del perielio di Mercurio	21
5	Sulla caduta di un corpo massivo in un buco nero	25
6	Sulla deviazione geodetica	29
7	Sulle equazioni di Einstein	31
8	Sulle onde gravitazionali	33
9	Sul moto di due particelle in presenza di un'onda gravitazionale	35
10	Sulla metrica al di là dell'orizzonte degli eventi	39
11	Sulla struttura dello spaziotempo vicino all'orizzonte degli eventi	41
12	Sulla soluzione dell'equazione delle onde gravitazionali	43
13	Sul teorema del viriale	47
14	Sull'oscillatore armonico gravitazionale	49
15	Sulle onde gravitazionali emesse da un sistema binario	53
16	Sull'energia dissipata per irraggiamento gravitazionale da un sistema di stelle binario	57

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 1

Sul redshift gravitazionale delle linee spettrali

Traccia: **Derivare e discutere il redshift gravitazionale delle linee spettrali**

Consideriamo l'intervallo di tempo proprio dT fra due clock di un orologio. In un sistema di riferimento in cui l'orologio è fermo possiamo scrivere:

$$dT = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{00}(x^\mu)} dx^0 = \sqrt{-g_{00}(x^\mu)} dt . \quad (1.1)$$

D'altra parte, in un sistema in cui l'orologio è in moto scriveremo dT come:

$$dT = \frac{1}{c} (-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} . \quad (1.2)$$

Ad ogni modo, l'intervallo di tempo proprio è comunque sempre lo stesso. La quantità dT/dt

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c} \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} , \quad (1.3)$$

è denominata **fattore di ritardo temporale**. A causa di questo fattore la frequenza di segnali registrata da un osservatore è diversa dalla frequenza di segnali emessi dalla sorgente.

Consideriamo ora un campo gravitazionale stazionario. Dato che è stazionario, esiste sicuramente un vettore di Killing di tipo tempo. Allora, con un'opportuna scelta del sistema di coordinate, la metrica può essere resa indipendente dal tempo.

Consideriamo una sorgente di segnali luminosi \mathcal{S} e un osservatore \mathcal{O} localizzati in punti differenti. Se la sorgente emette una cresta d'onda, quest'ultima raggiungerà l'osservatore dopo un intervallo di tempo Δx^0 . Sapendo che

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0 dx^i + g_{ik}dx^i dx^k = 0 , \quad i, k = 1, 2, 3 , \quad (1.4)$$

poiché la luce si muove sul cono di luce, allora:

$$\Delta x^0 = \int dx^0 = \int \frac{-g_{0i}dx^i \pm \sqrt{(g_{0i}dx^i)^2 - g_{00}g_{ik}dx^i dx^k}}{g_{00}} , \quad (1.5)$$

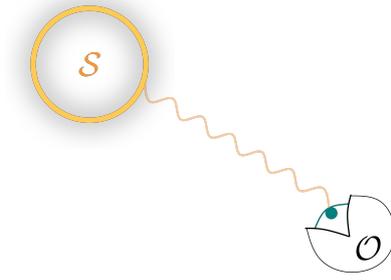


Figure 1.1

dove l'integrazione è calcolata sul cammino fatto dalla luce. La soluzione con il segno + dà

$$\Delta x_{(+)}^0 < 0, \quad (1.6)$$

e corrisponde ad un segnale che, emesso da \mathcal{O} , raggiunge \mathcal{S} a $x_0 = 0$. La soluzione con il segno $-$ dà

$$\Delta x_{(-)}^0 > 0, \quad (1.7)$$

e corrisponde ad un segnale che, emesso da \mathcal{S} a $x_0 = 0$, raggiunge \mathcal{O} dopo un intervallo Δx^0 .

Ora se \mathcal{S} e \mathcal{O} sono a riposo nel campo gravitazionale stazionario, l'intervallo di tempo Δx^0 che la luce impiega per andare da \mathcal{S} a \mathcal{O} è costante. Di conseguenza, l'intervallo tra due creste d'onda emesse, Δx_{em}^0 , sarà uguale all'intervallo tra due creste osservate Δx_{oss}^0 :

$$\Delta x_{\text{em}}^0 = \Delta x_{\text{oss}}^0. \quad (1.8)$$

Il periodo delle onde emesse sarà l'intervallo di tempo proprio della sorgente \mathcal{S} , cioè

$$\Delta T_{\text{em}} = \sqrt{-g_{00}(x_{\text{em}}^\mu)} \Delta x_{\text{em}}^0; \quad (1.9)$$

il periodo delle onde osservate sarà l'intervallo di tempo proprio dell'osservatore \mathcal{O} :

$$\Delta T_{\text{oss}} = \sqrt{-g_{00}(x_{\text{oss}}^\mu)} \Delta x_{\text{oss}}^0. \quad (1.10)$$

Le corrispondenti frequenze saranno date da

$$\begin{aligned} \nu_{\text{em}} &= \frac{1}{\Delta T_{\text{em}}}, \\ \nu_{\text{oss}} &= \frac{1}{\Delta T_{\text{oss}}}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

e avremo

$$\frac{\nu_{\text{oss}} - \nu_{\text{em}}}{\nu_{\text{em}}} = \sqrt{\frac{-g_{00}(x_{\text{em}}^\mu)}{-g_{00}(x_{\text{oss}}^\mu)}} - 1. \quad (1.12)$$

Ora, se il campo è debole, g_{00} si riduce a

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right), \quad (1.13)$$

dove $\phi = -GM/r$ è il potenziale gravitazionale **newtoniano**. Sostituendo l'equazione 4.7 nell'equazione 1.12 otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{\text{oss}} - \nu_{\text{em}}}{\nu_{\text{em}}} &= \sqrt{\frac{1 + 2\phi_{\text{em}}/c^2}{1 + 2\phi_{\text{oss}}/c^2}} - 1 \sim \sqrt{1 + \frac{2\phi_{\text{em}}}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{2\phi_{\text{oss}}}{c^2}} - 1 \sim \\ &\sim \sqrt{1 + \frac{2(\phi_{\text{em}} - \phi_{\text{oss}})}{c^2}} - 1 \sim \frac{1}{c^2}(\phi_{\text{em}} - \phi_{\text{oss}}) . \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ora, se il segnale è emesso da una **stella**, allora avremo

$$|\phi_{\text{em}}| \gg \phi_{\text{oss}} , \quad (1.15)$$

e, di conseguenza,

$$\boxed{\frac{\nu_{\text{oss}} - \nu_{\text{em}}}{\nu_{\text{em}}} < 0} , \quad (1.16)$$

cioè le linee spettrali osservate sono spostate verso valori di frequenze più basse (verso il rosso).

Se \mathcal{S} e \mathcal{O} sono in un campo gravitazionale descritto dalla metrica di Schwarzschild, il rapporto $\nu_{\text{oss}}/\nu_{\text{em}}$ vale:

$$\frac{\nu_{\text{oss}}}{\nu_{\text{em}}} = \sqrt{\frac{1 - 2M/r}{-g_{00}(x_{\text{oss}}^\mu)}} , \quad (1.17)$$

così se la sorgente si avvicina all'orizzonte degli eventi, allora $\nu_{\text{oss}} \rightarrow 0$ e la frequenza del segnale osservato tenderà a zero, cioè **scomparirà nel buco nero**.

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 2

Sull'equazione delle geodetiche per particelle massive e a massa nulla

Traccia: **Data la metrica di Schwarzschild:**

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.1)$$

derivare le equazioni delle geodetiche per: **1) particelle massive; 2) particelle di massa nulla e discutere i vari tipi di orbita.**

Consideriamo la Lagrangiana \mathcal{L} definita come:

$$\mathcal{L} \left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (2.2)$$

dove λ è un parametro scalare (di Lorentz) del moto (i.e. indipendente dalle coordinate come per esempio è il tempo proprio). Utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)} = 0, \quad (2.3)$$

mostriamo di seguito che, scegliendo \mathcal{L} come la lagrangiana definita nell'equazione (2.2), otteniamo proprio le equazioni delle geodetiche. Procedendo al calcolo, dunque, avremo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{2} \left[\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \right] = \frac{1}{2} U^\mu U^\nu g_{\mu\nu,\sigma}, \quad (2.4)$$

e

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \right)} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left(g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\lambda} (g_{\sigma\nu} U^\nu) = g_{\sigma\nu,\mu} U^\mu U^\nu + g_{\sigma\nu} \frac{dU^\nu}{d\lambda}. \quad (2.5)$$

Sottraendo (2.5) da (2.4) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}U^\mu U^\nu g_{\mu\nu,\sigma} - g_{\sigma\nu,\mu}U^\mu U^\nu + g_{\sigma\nu} \frac{dU^\nu}{d\lambda} &= 0, \\ -g_{\sigma\nu} \frac{dU^\nu}{d\lambda} - \frac{1}{2}U^\mu U^\nu [g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\sigma\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}] &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Contraendo con $-g^{\alpha\sigma}$ otteniamo:

$$\boxed{\frac{dU^\alpha}{d\lambda} + g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\sigma\mu\nu}U^\mu U^\nu = \frac{dU^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0}, \quad (2.7)$$

che rappresenta l'equazione delle geodetiche, dove $\Gamma_{\sigma\mu\nu}$ sono i simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (2.8)$$

Scriviamo la Lagrangiana per la metrica di Schwarzschild:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2 \right], \quad (2.9)$$

(dove il punto '·' indica la derivata rispetto a λ : $d/d\lambda$) e ricaviamo di seguito le equazioni per \dot{t} , $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e \dot{r} .

1. L'equazione per \dot{t} è:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = 0 = \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) 2\dot{t} \right] = 0 \rightarrow \dot{t} = \frac{\text{cost}}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (2.10)$$

Ora, poiché la metrica di Schwarzschild ammette il vettore di Killing di tipo tempo seguente:

$$\vec{\partial} = \xi_t^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad (2.11)$$

allora esiste una corrispondente **quantità conservata**:

$$g_{\alpha\beta} \xi_t^\alpha U^\beta = g_{00} \xi_t^0 U^0 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = \text{cost} \quad (2.12)$$

che è l'**energia**:

$$- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = -E. \quad (2.13)$$

2. L'equazione per $\dot{\phi}$ è:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[(r^2 \sin^2 \theta) 2\dot{\phi} \right] = 0 \rightarrow \dot{\phi} = \frac{\text{cost}}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.14)$$

Ora, poiché la metrica di Schwarzschild ammette un vettore di Killing di tipo spazio

$$\vec{\partial} = \xi_\phi^\alpha = (0, 0, 0, 1), \quad (2.15)$$

allora esiste una corrispondente quantità conservata:

$$g_{\alpha\beta}\xi_{\phi}^{\alpha}U^{\beta} = g_{\phi\phi}\xi_{\phi}^{\phi}U^{\phi} = r^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi} = \text{cost} , \quad (2.16)$$

che può essere interpretato come il **momento angolare**:

$$r^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi} = L . \quad (2.17)$$

3. L'equazione per $\dot{\theta}$ è:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = \frac{d}{d\lambda}(r^2 \dot{\theta}) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} , \\ \rightarrow \ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r^2} + \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dal momento che c'è simmetria sferica, la scelta degli assi polari è arbitraria, quindi scegliamo un sistema di riferimento tale che per $\lambda = 0$ la particella è sul piano equatoriale $\theta(\lambda = 0) = \pi/2$ e la sua velocità giace su questo piano: $\dot{\theta}(\lambda = 0) = 0$. Ebbene, questo è un problema di Cauchy e come tale la sua soluzione deve essere unica. Quindi, se $\theta(0) = \pi/2$ è soluzione per $\lambda = 0$, allora

$$\theta(\lambda) = \theta(0) = \frac{\pi}{2} \quad (2.19)$$

è soluzione sempre.

4. Consideriamo ora l'equazione per \dot{r} nel caso di particelle **massive**. In questo caso vale la relazione $U^{\alpha}U_{\alpha} = 1$, per cui avremo:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 = \\ &= -\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2\frac{L^2}{r^4} = -1 , \end{aligned} \quad (2.20)$$

da cui otteniamo

$$\boxed{\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2} . \quad (2.21)$$

Nel caso di particelle a **massa nulla** vale la relazione $U^{\alpha}U_{\alpha} = 0$ e otteniamo per cui troviamo

$$\boxed{\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2} . \quad (2.22)$$

Orbite di particelle a massa nulla

Discutiamo ora le orbite di particelle a massa nulla. L'equazione delle geodetiche è

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}}, \\ \dot{\phi} &= \frac{L}{r^2}, \\ \dot{\theta} &= \frac{\pi}{2}, \\ \dot{r}^2 &= E^2 - V(r), \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove il potenziale $V(r)$ è dato dalla seguente equazione:

$$V(r) = \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \quad (2.24)$$

ed è disegnato in figura 2.1. Il potenziale assume il valore massimo V_{MAX} nel punto

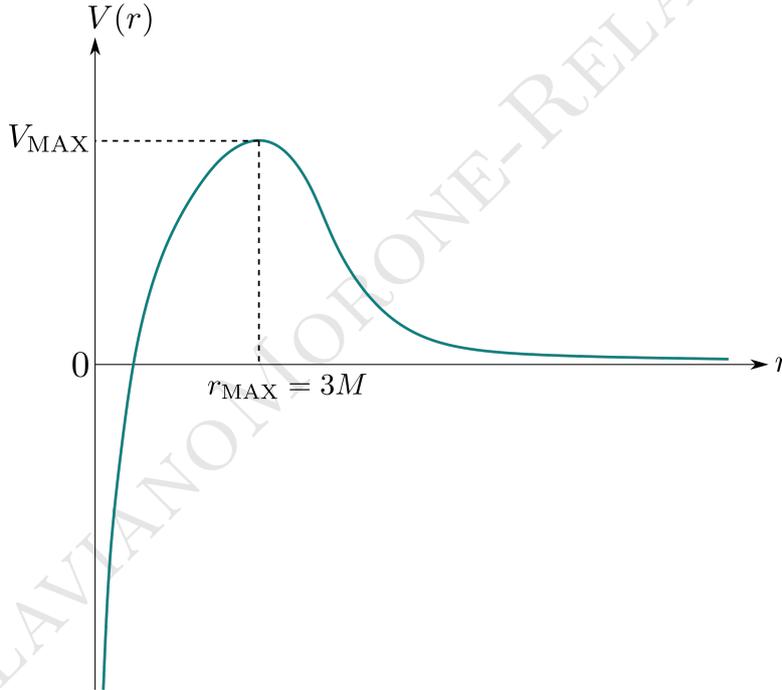


Figure 2.1

$r = 3M$ e vale:

$$V_{\text{MAX}} = V(3M) = \frac{L^2}{9M^2} \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{L^2}{27M^2}. \quad (2.25)$$

Scriviamo anche l'equazione per l'accelerazione radiale \ddot{r} :

$$2\dot{r}\ddot{r} = -\frac{dV(r)}{dr}\dot{r} \rightarrow \ddot{r} = -\frac{1}{2} \frac{dV(r)}{dr}. \quad (2.26)$$

Consideriamo ora i tre casi possibili seguenti

1. $E^2 > V_{\text{MAX}}$.

Supponiamo che la particella arrivi da $r = +\infty$ con $\dot{r} < 0$. L'equazione $\dot{r}^2 = E^2 - V(r)$ ci dice che

$$\dot{r}^2 > 0 \quad \text{sempre} . \quad (2.27)$$

Quindi la particella supera la barriera e per $r < r_{\text{MAX}}$ viene accelerata verso il centro con accelerazione negativa: cade, cioè, sul corpo centrale.

2. $E^2 = V_{\text{MAX}}$.

In questo caso la particella arriva alla distanza $r = r_{\text{MAX}}$ dove $\dot{r} = 0$ e, poiché in questa posizione $\ddot{r} = 0$, essa rimane intrappolata su un'**orbita circolare instabile**.

3. $E^2 < V_{\text{MAX}}$.

La particella arriva fino ad una distanza $r_{\text{inv}} > r_{\text{MAX}}$ dove $\dot{r} = 0$ e, essendo $\ddot{r} > 0$, inverte il suo moto e scappa all'infinito su un'**orbita aperta**.

Orbite di particelle massive

L'equazione delle geodetiche nel caso di particelle massive è

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} , \\ \dot{\phi} &= \frac{L}{r^2} , \\ \dot{\theta} &= \frac{\pi}{2} , \\ \dot{r}^2 &= E^2 - V(r) , \end{aligned} \quad (2.28)$$

dove stavolta il potenziale $V(r)$ si scrive come:

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) , \quad (2.29)$$

cosicché per $r \rightarrow \infty$ avremo $V(r) \rightarrow 1$. Cerchiamo ora i punti stazionari risolvendo $\partial V / \partial r = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2M}{r^2} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(-\frac{2L^2}{r^3}\right) = 0 , \quad (2.30)$$

le cui soluzioni sono date da

$$r = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12M^2L^2}}{2M} . \quad (2.31)$$

Ora se $L^2 < 12M^2$ non ci sono punti stazionari e il potenziale è del tipo mostrato in figura 2.2a. Quindi, una particella che arriva da $+\infty$ con $L^2 < 12M^2$ cade sul corpo centrale.

Se, invece, $L^2 > 12M^2$ ma $L^2 < 16M^2$, il potenziale ha un massimo e un minimo in r_+ e r_- come mostrato in figura 2.2b. In questo caso sono possibili i seguenti scenari:

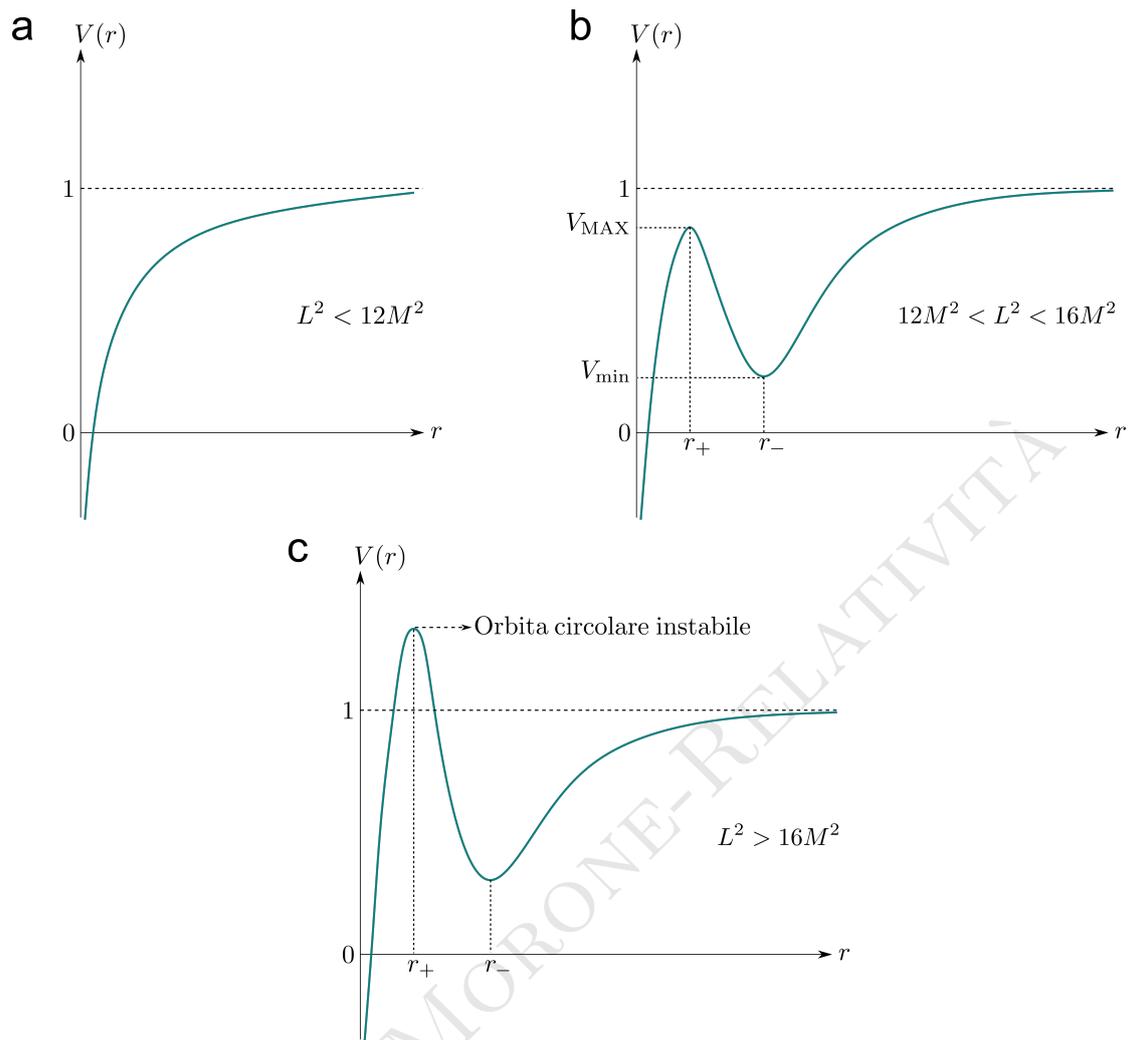


Figure 2.2

- $E^2 > 1$: la particella cade sul corpo centrale;
- $E^2 = V_{\text{MAX}}$: la particella rimane intrappolata su un'orbita circolare instabile;
- $V_{\text{min}} < E^2 < V_{\text{MAX}}$: la particella percorre orbite ellittiche;
- $E^2 = V_{\text{min}}$: la particella si muove su un'orbita circolare stabile.

Infine, se $L^2 > 16M^2$, il potenziale ha la forma mostrata in figura 2.2c e gli scenari possibili sono i seguenti:

- $E^2 > V_{\text{MAX}}$: la particella cade sul corpo centrale;
- $E^2 = V_{\text{MAX}}$: la particella rimane intrappolata su un'orbita circolare instabile;
- $1 < E^2 < V_{\text{MAX}}$: la particella arriva fino ad una distanza $r_{\text{inv}} > r_+$ dove inverte il suo moto e ritorna all'infinito;
- $V_{\text{min}} < E^2 < 1$: la particella percorre orbite ellittiche;

- $E^2 = V_{\min}$: la particella si muove su un'orbita circolare stabile di raggio r_- .

Se $L^2 = 12M^2$ allora le due radici r_+ e r_- coincidono:

$$r_+ = r_- = 6M, \quad (2.32)$$

e quindi non esistono orbite stabili per $r < 6M$.

Se $L \rightarrow \infty$ avremo

$$r_- = \frac{L^2}{2M} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right) \sim \frac{L^2}{2M} \left(1 - 1 + \frac{6M^2}{L^2} + \dots \right) = 3M + \dots \rightarrow 3M, \quad (2.33)$$

e quindi le orbite instabili esistono solo per: $3M < r_- < 6M$.

FLAVIANOMORONE-RELATIVITÀ

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 3

Sulla deflessione della luce nelle vicinanze di un corpo massivo

Traccia: Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle di massa nulla nella metrica di Schwarzschild:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} , \\ \dot{\phi} &= \frac{L}{r^2} , \\ \dot{\theta} &= \frac{\pi}{2} , \\ \dot{r}^2 &= E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) , \end{aligned} \tag{3.1}$$

derivare e discutere il fenomeno della deflessione della luce nelle vicinanze di un corpo massivo.

Con riferimento alla figura 3.1 definiamo le seguenti variabili:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \phi &= 0, \pi + \delta , \\ \lim_{\phi \rightarrow 0} r \sin \phi &= b . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Quando la particella arriva dall'infinito avremo approssimativamente $b \sim r\phi$ e quindi possiamo scrivere l'equazione:

$$\boxed{\frac{d\phi}{dr} = -\frac{b}{r^2}} . \tag{3.3}$$

Esprimiamo ora b in funzione di L ed E :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\lambda} &= \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{d\phi}{dr} (\pm \sqrt{E^2 - V(r)}) = \frac{L}{r^2} , \\ \frac{d\phi}{dr} &= \pm \frac{L}{r^2 \sqrt{E^2 - V(r)}} \xrightarrow{r \gg 1} \pm \frac{L}{r^2 E} , \\ \rightarrow b &\sim \frac{L}{E} . \end{aligned} \tag{3.4}$$

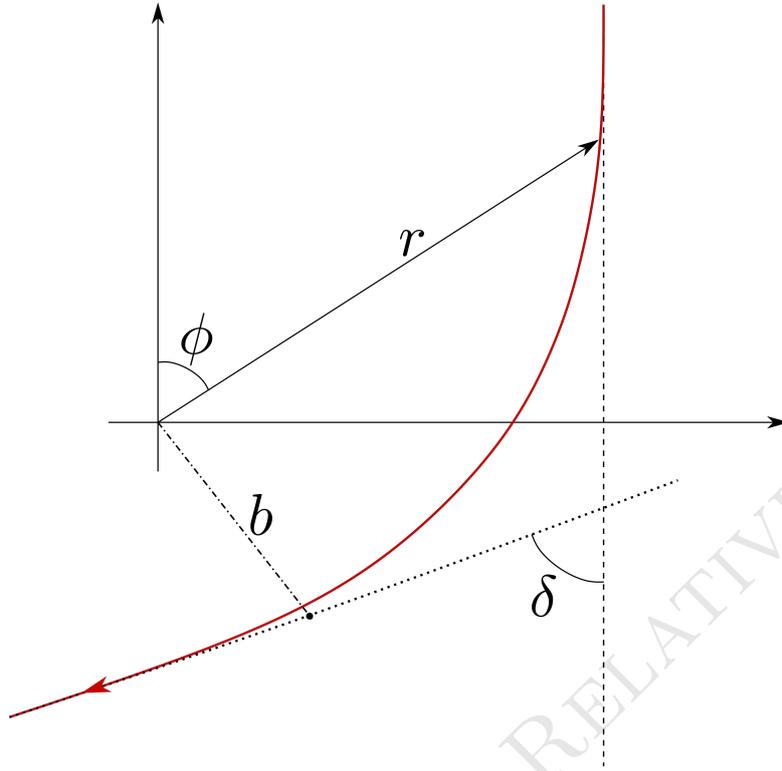


Figure 3.1

Inoltre, affinché ci sia deflessione, occorre che siano verificate le condizioni seguenti:

$$\begin{aligned} E^2 < \frac{L^2}{27M^2} &\rightarrow E < \frac{L}{\sqrt{27}M} , \\ &\rightarrow b > \sqrt{27}M = b_{\text{crit}} . \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se b è più piccolo di b_{crit} , allora il fotone è catturato dal corpo centrale.

Chiamiamo

$$u = \frac{1}{r} \rightarrow u(\phi = 0) = 0 , \quad u(\phi = \pi + \delta) = 0 , \quad (3.6)$$

cosicché avremo:

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2} = Lu^2 . \quad (3.7)$$

Scrivendo, poi:

$$\frac{dr}{d\lambda} \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} = r' \dot{\phi} = -\frac{1}{u^2} u' Lu^2 = -Lu' , \quad (3.8)$$

ricaviamo l'equazione:

$$L^2(u')^2 + L^2u^2 - 2ML^2u^3 = E^2 , \quad (3.9)$$

che derivo rispetto a ϕ :

$$L^2u'u'' + 2L^2u'u - 6ML^2u^2u' = 0 , \quad (3.10)$$

e divido, infine, per $2u'L^2$ ottenendo la seguente equazione differenziale per la variabile u :

$$\boxed{u'' + u - 3Mu^2 = 0} , \quad (3.11)$$

con le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} u(\phi = 0) &= 0 , \\ u'(\phi = 0) &= \frac{1}{b} . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se non c'è il corpo centrale, il raggio non è deflesso e possiamo scrivere l'equazione più semplice:

$$u'' + u = 0 , \quad (3.13)$$

la cui soluzione è

$$u(\phi) = \frac{1}{b} \sin \phi . \quad (3.14)$$

Assumendo $M/R \ll 1$ (ad esempio $M/R \leq (M/R)_{\text{sole}} \sim 10^{-6}$), avremo che

$$\frac{2Mu^2}{u} = \frac{3M}{r} \ll 1 , \quad (3.15)$$

e quindi possiamo cercare la soluzione perturbativamente. Poniamo dunque:

$$\begin{aligned} u &= u^{(0)} + u^{(1)} , \\ u^{(1)} &\ll u^{(0)} , \end{aligned} \quad (3.16)$$

e riscriviamo l'equazione (3.11) come:

$$u'' + u - 3M(u^{(0)})^2 = 0 . \quad (3.17)$$

Ora, poiché $u^{(0)}$ soddisfa l'equazione: $(u^{(0)})'' + u^{(0)} = 0$, avremo

$$(u^{(1)})'' + u^{(1)} - \frac{3M}{b^2} \sin^2 \phi = 0 \rightarrow (u^{(1)})'' + u^{(1)} = \frac{3M}{2b^2} (1 - \cos 2\phi) , \quad (3.18)$$

la cui soluzione, con le condizioni al contorno precedenti, è

$$u^{(1)} = \frac{3M}{2b^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\phi) - \frac{4}{3} \cos(\phi) \right] , \quad (3.19)$$

e la soluzione completa quindi è:

$$u = \frac{1}{b} \sin(\phi) + \frac{3M}{2b^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos(2\phi) - \frac{4}{3} \cos(\phi) \right] , \quad (3.20)$$

e, poiché $u(\pi + \delta) = 0$, possiamo ricavare l'**angolo di deflessione** δ come:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta}{b} + \frac{3M}{2b^2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \right) &= -\frac{\delta}{b} + \frac{3M}{2b^2} \frac{8}{3} = -\frac{\delta}{b} + \frac{4M}{b^2} = 0 , \\ \rightarrow \boxed{\delta = \frac{4M}{b}} . \end{aligned} \quad (3.21)$$

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 4

Sulla precessione del perielio di Mercurio

Traccia: Utilizzando le equazioni delle geodetiche per particelle massive nella metrica di Schwarzschild:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}}, \\ \dot{\phi} &= \frac{L}{r^2}, \\ \dot{\theta} &= \frac{\pi}{2}, \\ \dot{r}^2 &= E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

derivare e discutere il fenomeno della precessione del perielio.

Supponiamo che $M/r \ll 1$ e poniamo $u = 1/r$. Avremo:

$$\dot{\phi} = Lu^2 \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = r' \dot{\phi} = r' Lu^2 = -\frac{1}{u^2} u' Lu^2 = -Lu', \quad (4.2)$$

e quindi

$$L^2(u')^2 = E^2 - (1 + L^2u^2 - 2Mu - 2ML^2u^3). \quad (4.3)$$

Derivando rispetto a ϕ otteniamo:

$$2u'u''L^2 = -2L^2u'u + 2Mu' - 6ML^2u^2u', \quad (4.4)$$

e dividendo per $2u'L^2$ troviamo l'equazione differenziale la cui soluzione descrive la precessione del perielio di una particella massiva (ad esempio la precessione del perielio di Mercurio):

$$\boxed{u'' + u - \frac{M}{L^2} + 3Mu^2 = 0}. \quad (4.5)$$

Nel caso newtoniano l'equazione si ricava dalla conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{mM}{r} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 &= \text{cost}, \\ \frac{1}{2}L^2(u')^2m - mM u + \frac{1}{2}mL^2u^2 &= \text{cost}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove m è la massa della particella (e.g. il pianeta **Mercurio**), M è la massa del corpo centrale (e.g. il **Sole**), e $(\dot{\phi})^2 = L^2/r^4$. Derivando rispetto a ϕ otteniamo:

$$L^2 u' u'' m - m M u' + m L^2 u u' = 0 \rightarrow \boxed{u'' + u - \frac{M}{L} = 0}, \quad (4.7)$$

che differisce da quella relativistica per il termine $3Mu^2$ tale che il rapporto $3Mu^2/u = 3M/r \ll 1$ è molto piccolo (che giustificherà più avanti la risoluzione dell'equazione relativistica in via perturbativa). L'equazione (4.7) può essere riscritta come:

$$\left(u - \frac{M}{L}\right)'' + \left(u - \frac{M}{L}\right) = 0, \quad (4.8)$$

la cui soluzione è

$$u - \frac{M}{L} = A \cos(\phi - \phi_0), \quad (4.9)$$

e ponendo $\phi_0 = 0$ troviamo

$$u = \frac{M}{L} \left(1 + \frac{L^2 A}{M} \cos \phi\right) = \frac{M}{L} (1 + e \cos \phi), \quad (4.10)$$

dove: $e = L^2 A/M$. Tornando alla variabile r , la soluzione newtoniana diventa:

$$r = \frac{L^2}{M} \frac{1}{1 + e \cos \phi},$$

$$\text{Periastro : } \phi = 0 \rightarrow r_P = \frac{L^2}{M} \frac{1 + e}{1}, \quad (4.11)$$

$$\text{Apoastro : } \phi = \pi \rightarrow r_A = \frac{L^2}{M} \frac{1 - e}{-1}.$$

Risolviamo ora l'equazione relativistica perturbativamente, ponendo $u = u^{(0)} + u^{(1)}$ e assumendo $u^{(0)} = \frac{M}{L} (1 + e \cos \phi)$, cosicché avremo:

$$u''^{(0)} + u''^{(1)} + u^{(0)} + u^{(1)} - \frac{M}{L} + 3M (u^{(0)} + u^{(1)})^2 = 0,$$

$$\rightarrow u''^{(1)} + u^{(1)} + 3M (u^{(0)})^2 + 3M (u^{(1)})^2 + 6M u^{(0)} u^{(1)} = 0,$$

$$\rightarrow u''^{(1)} + u^{(1)} + 3M (u^{(0)})^2 = 0, \quad (4.12)$$

$$\rightarrow u''^{(1)} + u^{(1)} + 3 \frac{M^3}{L^4} (1 + e^2 \cos^2 \phi + 2e \cos \phi) = 0,$$

avendo usato il fatto che $(u^{(1)})^2$ e $u^{(0)} u^{(1)}$ sono di ordine superiore rispetto a $(u^{(0)})^2$ e possiamo trascurarli all'ordine più basso in teoria delle perturbazioni. Tenendo solo il termine risonante in $\cos \phi$ nell'ultima equazione (4.12) troviamo:

$$u''^{(1)} + u^{(1)} + \frac{6M^3}{L^4} e \cos \phi = 0, \quad (4.13)$$

che ha come soluzione

$$u^{(1)} = \frac{3M^3}{L^4} e \phi \sin \phi, \quad (4.14)$$

e quindi la soluzione completa è

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} = \frac{M}{L^2}(1 + e \cos \phi) + \frac{3M^3}{L^4}e\phi \sin \phi = \frac{M}{L^2} \left[1 + e \cos \phi + \frac{3M^2}{L^2}e\phi \sin \phi \right]. \quad (4.15)$$

Al primo ordine possiamo porre:

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{3M^2}{L^2} \phi \right) &\sim 1, \\ \sin \left(\frac{3M^2}{L^2} \phi \right) &\sim \frac{3M^2}{L^2} \phi, \end{aligned} \quad (4.16)$$

e riscrivere dunque la soluzione come:

$$u \approx \frac{M}{L^2} \left[1 + e \cos \left(\phi - \frac{3M^2}{L^2} \phi \right) \right]. \quad (4.17)$$

Ora, l'argomento del coseno passa da 0 a 2π quando ϕ passa da 0 a $\Delta\phi$ dato da:

$$\Delta\phi = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{3M^2}{L^2} \right) \sim 2\pi \left(1 + \frac{3M^2}{L^2} \right), \quad (4.18)$$

cioè, quando il pianeta ritorna al periastro, questo risulta spostato dalla sua posizione originale di un angolo pari a:

$$\Delta\phi_P = 6\pi \frac{M^2}{L^2}. \quad (4.19)$$

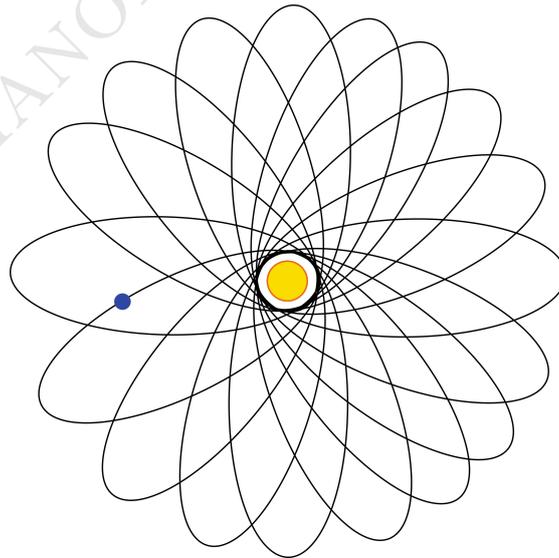


Figure 4.1: Orbita di Mercurio

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 5

Sulla caduta di un corpo massivo in un buco nero

Traccia: Descrivere il moto di una particella massiva che cade radialmente in un buco nero di Schwarzschild. Discutere il problema sia dal punto di vista di un osservatore all'infinito, che di un osservatore solidale con la particella.

Poiché la particella cade radialmente, le equazioni della geodetica sono:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}, \dot{\phi} &\rightarrow L = 0, \\ \dot{t} &= \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}}, \\ \dot{r} &= E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Imponiamo ora che la particella sia a riposo all'infinito:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dr}{d\tau} = 0 \rightarrow \dot{r} = -\sqrt{E^2 - 1 + \frac{2M}{r}} \rightarrow \sqrt{E^2 - 1} = 0,\tag{5.2}$$

cioè

$$E = 1.\tag{5.3}$$

Inoltre avremo:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}, \\ \frac{dt}{d\tau} &= \frac{dt}{dr} \frac{dr}{d\tau} = -\frac{dt}{dr} \sqrt{\frac{2M}{r}},\end{aligned}\tag{5.4}$$

per cui

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dr} &= -\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \sqrt{\frac{r}{2M}}, \\ \frac{d\tau}{dr} &= -\sqrt{\frac{r}{2M}},\end{aligned}\tag{5.5}$$

da cui, integrando, troviamo (vedi figura 5.1a):

$$\tau(r) = - \int_{r_0}^r \sqrt{\frac{r'}{2M}} dr' = \frac{2}{3\sqrt{2M}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2} \right) . \quad (5.6)$$

La figura 5.1b mostra il grafico della traiettoria $r(\tau)$ vista da un osservatore

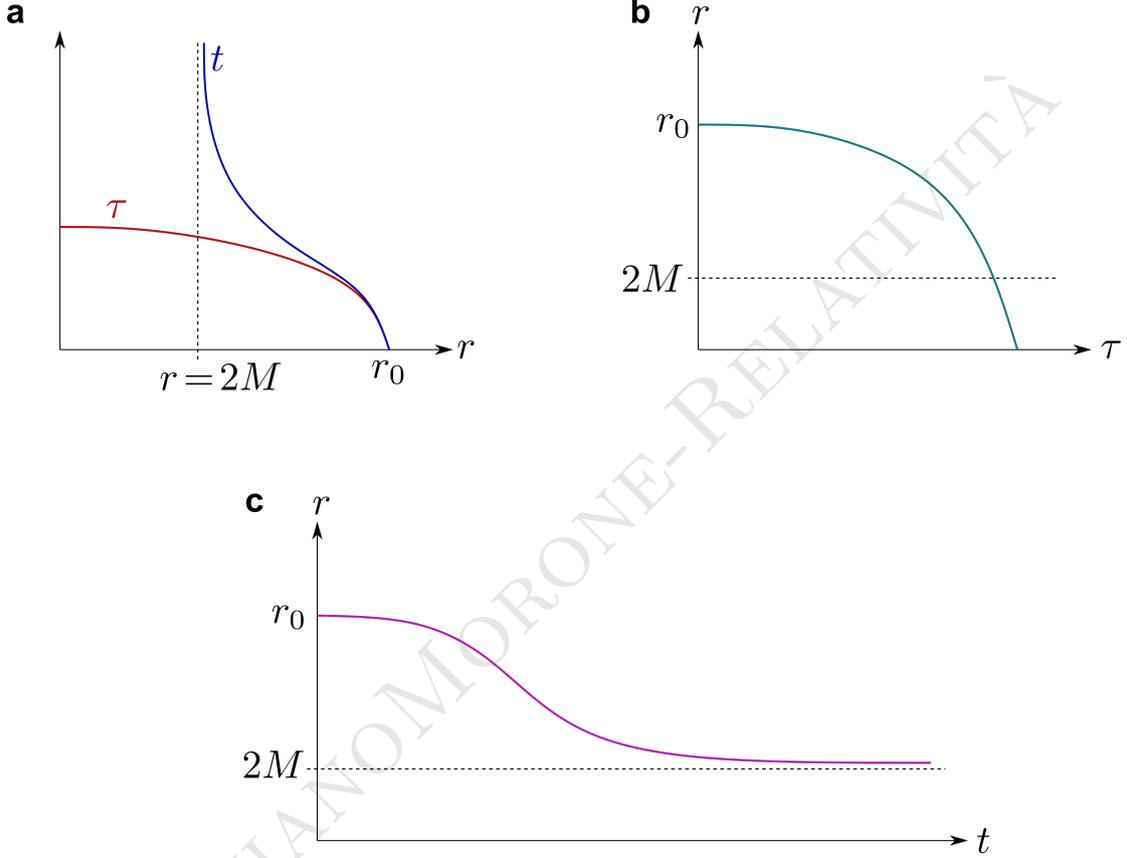


Figure 5.1

solidale con la particella. In questo caso l'osservatore vede la particella raggiungere la singolarità in una quantità finita di tempo proprio.

La figura 5.1c, invece, mostra il grafico della traiettoria $r(t)$ vista da un osservatore all'infinito. In questo caso $r(t)$ si avvicina all'orizzonte $r = 2M$ solo asintoticamente per $t \rightarrow \infty$.

Per capire questa differenza supponiamo che un'astronave, che cade radialmente nel buco nero, mandi un SOS nella forma di una sequenza di impulsi elettromagnetici. Gli impulsi viaggeranno su una geodetica **nulla**, per cui avremo:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{r}^2 = 0 , \quad (5.7)$$

con ϕ e θ costanti. Di conseguenza, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) &= \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2, \\ \rightarrow \frac{dt}{dr} &= \pm \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} = \pm \frac{r}{r - 2M}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Calcolo ora il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x - 2M} dx &= \int \frac{y + 2M}{y} dy = \int 1 + \frac{2M}{y} dy = y + 2M \log y + \text{cost} = \\ &= x - 2M + 2M \log(x - 2M) + \text{cost} = \\ &= x + 2M \log \left[2M \left(\frac{x}{2M} - 1 \right) \right] + \text{cost} = \\ &= x + 2M \log \left(\frac{x}{2M} - 1 \right) + \text{cost}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

da cui ricavo che:

$$t = \pm \tilde{r} + \text{cost}, \quad (5.10)$$

dove

$$\tilde{r} = r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (5.11)$$

Prendendo la derivata rispetto a r otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}}{dr} &= 1 + 2M \frac{1}{\frac{r}{2M} - 1} \frac{1}{2M} = 1 + \frac{2M}{r - 2M} = \frac{r}{r - 2M}, \\ \rightarrow \boxed{\frac{dr}{d\tilde{r}} = \frac{r - 2M}{r} = 1 - \frac{2M}{r}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Definiamo ora la coordinata

$$u = t - \tilde{r}, \quad (5.13)$$

cosicché una geodetica uscente corrisponde a $u = \text{cost}$ (vedi figura 5.2). Con riferimento alla figura 5.2, consideriamo 2 impulsi mandati dall'astronave: il primo a $\tau = \tau_1$ e il secondo a $\tau = \tau_2$. L'osservatore all'infinito riceverà i due segnali a due valori del suo tempo proprio (che coincide con la coordinata temporale): t_1^{oss} e t_2^{oss} . L'intervallo Δt^{oss} sarà dato dalla seguente espressione:

$$\Delta t^{\text{oss}} = t_2^{\text{oss}} - t_1^{\text{oss}} = (u_2 + \tilde{r}_{\text{oss}}) - (u_1 + \tilde{r}_{\text{oss}}). \quad (5.14)$$

Supponiamo che i due impulsi siano mandati ad intervalli di tempo molto brevi, cosicché possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^{\text{oss}}}{\Delta \tau} &= \frac{\Delta u}{\Delta \tau} \approx \frac{du}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} - \frac{d\tilde{r}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} - \frac{d\tilde{r}}{dr} \frac{dr}{d\tau} = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{r}{r - 2M} \sqrt{\frac{2M}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \sqrt{\frac{2M}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left(1 + \sqrt{\frac{2M}{r}} \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

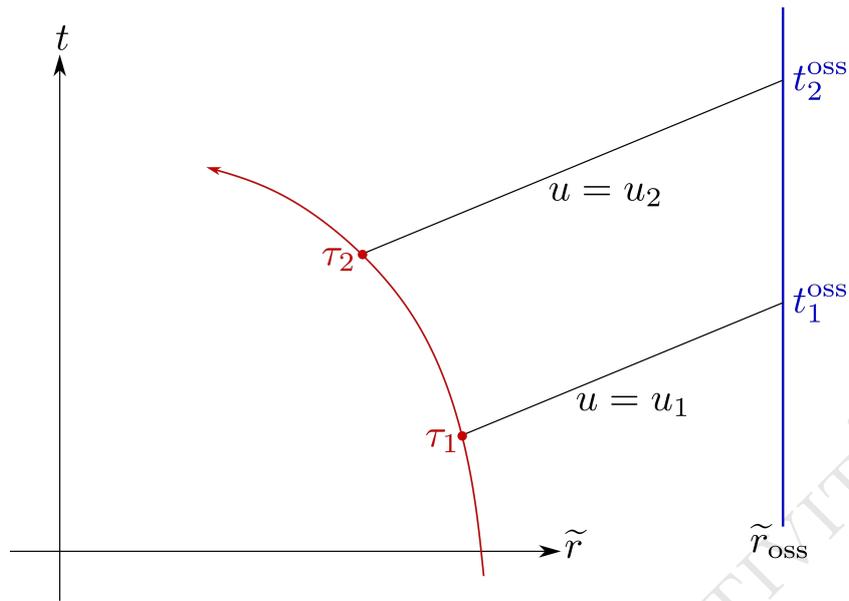


Figure 5.2

dove i due fattori hanno la seguente interpretazione:

$$\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \equiv \text{quadrato del redshift} ,$$

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2M}{r}} \right) \equiv \text{effetto Doppler} .$$
(5.16)

Dall'equazione (5.15) vediamo che per $r \rightarrow 2M$ allora $\Delta t^{\text{OSS}} \rightarrow \text{infy}$, cioè l'intervallo fra due impulsi ricevuti cresce e infine diverge allorché l'astronave raggiunge l'orizzonte degli eventi.

Tema 6

Sulla deviazione geodetica

Traccia: **Ricavare l'equazione della deviazione geodetica.**

Consideriamo una famiglia di geodetiche a 2 parametri $x^\mu(\tau, P)$ (vedi figura 6.1).
Sia

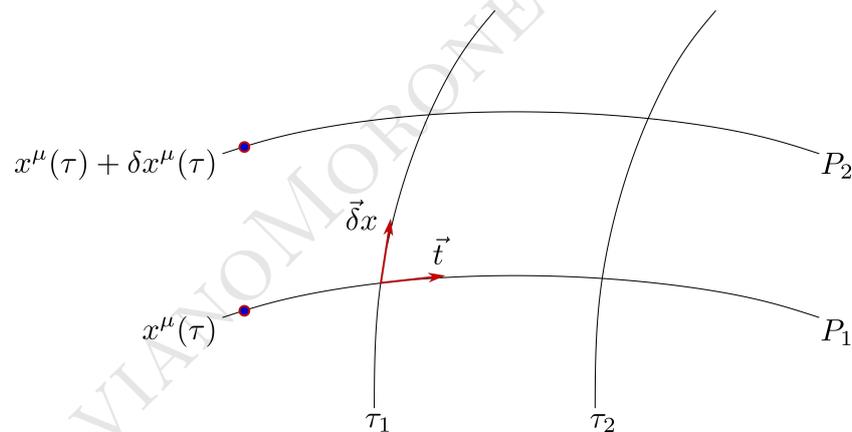


Figure 6.1

$$t^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}, \quad (6.1)$$

il vettore tangente alla geodetica, e δx^α il vettore:

$$\delta x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial P}. \quad (6.2)$$

Inoltre avremo

$$\frac{\partial t^\alpha}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial x^\alpha}{\partial P} = \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial \tau}. \quad (6.3)$$

Calcoliamo la derivata covariante di \vec{t} sulla linea τ costante:

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t} &= \frac{d\vec{t}}{dP} = \frac{\partial t^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial P}, \\ (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t})^\alpha &= \delta x^\mu t^\alpha_{;\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial P} \left[\frac{\partial t^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha t^\nu \right] = \frac{\partial t^\alpha}{\partial P} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha t^\nu \delta x^\mu, \\ (\nabla_{\vec{t}} \vec{\delta x})^\alpha &= t^\mu \delta x^\alpha_{;\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \left[\frac{\delta x^\alpha}{\partial x^\mu} + \delta x^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \right] = \frac{\delta x^\alpha}{\partial \tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta x^\nu t^\mu,\end{aligned}\quad (6.4)$$

ciò troviamo:

$$\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t} = \nabla_{\vec{t}} \vec{\delta x}. \quad (6.5)$$

Calcoliamo l'accelerazione relativa fra le particelle:

$$\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{t}} \vec{\delta x}) = \frac{d^2 \vec{\delta x}}{d\tau^2}. \quad (6.6)$$

Ora, vale la relazione:

$$\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{t}} \vec{\delta x}) = \nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t}). \quad (6.7)$$

Calcoliamo il commutatore

$$[\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t})] = \nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t}) - \nabla_{\vec{\delta x}} (\nabla_{\vec{t}} \vec{t}), \quad (6.8)$$

per componenti:

$$\begin{aligned}[\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t})]^\alpha &= t^\mu (\delta x^\nu t^\alpha_{;\nu})_{;\mu} - \delta x^\mu (t^\nu t^\alpha_{;\nu})_{;\mu} = \\ &= t^\mu (\delta x^\nu_{;\mu} t^\alpha_{;\nu} + \delta x^\nu t^\alpha_{;\nu;\mu}) - \delta x^\mu (t^\nu_{;\mu} t^\alpha_{;\nu} + t^\nu t^\alpha_{;\nu;\mu}) = \\ &= (t^\mu \delta x^\nu_{;\mu} - \delta x^\mu t^\nu_{;\mu}) t^\alpha_{;\nu} + (t^\mu \delta x^\nu - \delta x^\mu t^\nu) t^\alpha_{;\nu;\mu} = \\ &= [(\nabla_{\vec{t}} \vec{\delta x})^\nu - (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t})^\nu] t^\alpha_{;\nu} + (t^\mu \delta x^\nu - \delta x^\mu t^\nu) t^\alpha_{;\nu;\mu}.\end{aligned}\quad (6.9)$$

Poiché il termine fra parentesi quadre è identicamente nullo, otteniamo:

$$[\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t})]^\alpha = t^\mu \delta x^\nu t^\alpha_{;\nu;\mu} - \delta x^\mu t^\nu t^\alpha_{;\nu;\mu} = t^\mu \delta x^\nu (t^\alpha_{;\nu;\mu} - t^\alpha_{;\mu;\nu}). \quad (6.10)$$

Ora, ricordando che:

$$t^\alpha_{;\nu;\mu} - t^\alpha_{;\mu;\nu} = \mathcal{R}^\alpha_{\beta\nu\mu} t^\beta, \quad (6.11)$$

dove \mathcal{R} è il **tensore di Riemann** , avremo:

$$[\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t})]^\alpha = \mathcal{R}^\alpha_{\beta\nu\mu} t^\beta t^\mu \delta x^\nu = (\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t}))^\alpha - (\nabla_{\vec{\delta x}} (\nabla_{\vec{t}} \vec{t}))^\alpha. \quad (6.12)$$

Notando che $(\nabla_{\vec{\delta x}} (\nabla_{\vec{t}} \vec{t}))^\alpha = 0$ perché le geodetiche trasportano parallelamente i loro vettori tangenti, otteniamo il seguente risultato finale per il commutatore delle derivate covarianti:

$$[\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t})]^\alpha = \mathcal{R}^\alpha_{\beta\nu\mu} t^\beta t^\mu \delta x^\nu. \quad (6.13)$$

A questo punto possiamo scrivere l'equazione della deviazione geodetica:

$$\boxed{\frac{d^2 \delta x^\alpha}{d\tau^2} = (\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{t}} \vec{\delta x}))^\alpha = (\nabla_{\vec{t}} (\nabla_{\vec{\delta x}} \vec{t}))^\alpha = \mathcal{R}^\alpha_{\beta\nu\mu} t^\beta t^\mu \delta x^\nu}. \quad (6.14)$$

Ora, poiché $\mathcal{R}^\alpha_{\beta\nu\mu}$ si annulla solo se il campo è zero o costante e uniforme, l'equazione della deviazione geodetica contiene realmente l'informazione sul **campo gravitazionale in un dato punto dello spazio-tempo** .

Tema 7

Sulle equazioni di Einstein

Traccia: **Mostrare che le equazioni di Einstein:**

$$\square_F h_{\mu\nu} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h^\lambda{}_\nu + \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h^\lambda{}_\mu - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h^\lambda{}_\lambda \right] = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{\text{pert}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (T^{\text{pert}})^\lambda{}_\lambda \right), \quad (7.1)$$

(dove $\square_F = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$) per la metrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (7.2)$$

con un'opportuna scelta di gauge e ponendo

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h^\lambda{}_\lambda, \quad (7.3)$$

si possono scrivere nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \square_F \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{\text{pert}} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}^\mu{}_\nu = 0 \end{array} \right. . \quad (7.4)$$

Imponiamo la condizione di **gauge armonica**:

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma^\lambda = 0. \quad (7.5)$$

Dal momento che $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$, avremo:

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = g^{\mu\nu} g^{\lambda k} \Gamma_{\mu\nu k} = (\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) (\eta^{\lambda k} + h^{\lambda k}) \frac{1}{2} (h_{\mu k, \nu} + h_{\nu k, \mu} - h_{\mu\nu, k}). \quad (7.6)$$

Prendendo i termini fino al 1° ordine in $h_{\mu\nu}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda k} \frac{1}{2} (h_{\mu k, \nu} + h_{\nu k, \mu} - h_{\mu\nu, k}) = \eta^{\lambda k} \frac{1}{2} (h^\nu{}_{k, \nu} + h^\mu{}_{k, \mu} - h^\nu{}_{\nu, k}) = \\ &= \eta^{\lambda k} \left(h^\nu{}_{k, \nu} - \frac{1}{2} h^\nu{}_{\nu, k} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\nu_k = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} h^\nu_\nu . \quad (7.8)$$

Inserendo questa condizione nelle equazioni di Einstein troviamo la seguente equazione:

$$\square_F h_{\mu\nu} - \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\lambda_\lambda \right) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\lambda_\lambda \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h^\lambda_\lambda \right] = \square_F h_{\mu\nu} , \quad (7.9)$$

da cui ricaviamo che

$$\square_F h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu}^{\text{pert}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (T^{\text{pert}})^\lambda_\lambda \right) . \quad (7.10)$$

Introducendo il tensore $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^\lambda_\lambda$ otteniamo:

$$\square_F h_{\mu\nu} = \square_F \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square_F h^\lambda_\lambda . \quad (7.11)$$

Ora, il secondo termine al membro destro dell'equazione precedente vale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square_F h^\lambda_\lambda &= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\alpha} \square_F h_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\alpha} \left[-\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\alpha\lambda}^{\text{pert}} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\lambda} (T^{\text{pert}})^\lambda_\lambda \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{16\pi G}{c^4} \eta_{\mu\nu} \left((T^{\text{pert}})^\lambda_\lambda - 2(T^{\text{pert}})^\lambda_\lambda \right) = \frac{1}{2} \frac{16\pi G}{c^4} \eta_{\mu\nu} (T^{\text{pert}})^\lambda_\lambda , \end{aligned} \quad (7.12)$$

per cui otteniamo il risultato finale:

$$\boxed{\square_F \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{\text{pert}}} \quad (7.13)$$

(avendo usato il fatto che $T_{\mu\nu}^{\text{pert}}$ e $h_{\mu\nu}$ sono dello stesso ordine: $T_{\mu\nu}^{\text{pert}} = O(h_{\mu\nu})$). Inoltre possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \bar{h}^\mu_\nu &= \eta^{\mu k} \bar{h}_{k\nu} = \eta^{\mu k} \left(h_{k\nu} - \frac{1}{2} \eta_{k\nu} h^\lambda_\lambda \right) = h^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu h^\lambda_\lambda , \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}^\mu_\nu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\lambda_\lambda = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\mu_\nu - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\lambda_\lambda = 0 . \end{aligned} \quad (7.14)$$

Tema 8

Sulle onde gravitazionali

Traccia: Mostrare che le equazioni delle onde gravitazionali nel vuoto ammettono soluzioni di onda piana.

Scegliendo la gauge in modo opportuno (spiegando anche che la condizione di gauge armonica rimane soddisfatta) si dimostri che le onde gravitazionali sono trasverse, a traccia nulla, e hanno due soli stati di polarizzazione

Dobbiamo risolvere l'equazione:

$$\square_F \bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (8.1)$$

La soluzione $\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}$ rappresenta un'onda piana, dove $A_{\mu\nu}$ è il tensore di polarizzazione e k^α il vettore d'onda. Affinché $\bar{h}_{\mu\nu}$ sia soluzione dell'equazione delle onde nel vuoto:

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (A_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}) = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (ik_\beta A_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}) = -\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta A_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} = 0 , \quad (8.2)$$

è necessario che $\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta$ sia nullo. Inoltre, deve valere la condizione di gauge armonica, per cui:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}^\mu{}_\nu &= 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \eta^{\mu\alpha} \bar{h}_{\alpha\nu} = \eta^{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}_{\alpha\nu} = 0 , \\ &\rightarrow \eta^{\mu\alpha} A_{\alpha\nu} k_\mu = 0 , \\ &\rightarrow \boxed{k_\mu A^\mu{}_\nu = 0} . \end{aligned} \quad (8.3)$$

Questo vuol dire che il vettore d'onda e il tensore di polarizzazione sono **ortogonali**.

Consideriamo un'onda che si muove lungo la direzione x . Di conseguenza, $\bar{h}_{\mu\nu}$ sarà indipendente da y e z , per cui soddisferà l'equazione ridotta:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \bar{h}^\mu{}_\nu = 0 , \quad (8.4)$$

e quindi $\bar{h}^\mu{}_\nu$ deve essere una funzione arbitraria di $t \pm x/c$. Consideriamo un'onda progressiva:

$$\bar{h}^\mu{}_\nu = \bar{h}^\mu{}_\nu[\chi(t, x)] , \quad \text{con} \quad \chi(t, x) = t - \frac{x}{c} . \quad (8.5)$$

Poiché deve valere la condizione di gauge armonica, avremo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}^\mu{}_\nu = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{h}^t{}_\nu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} \bar{h}^t{}_\nu \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{h}^x{}_\nu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} \bar{h}^x{}_\nu \end{cases} , \quad (8.6)$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}^t{}_\nu - \bar{h}^x{}_\nu) = 0 . \quad (8.7)$$

Integrando e ponendo a zero le costanti, poiché siamo interessati alla parte variabile, avremo:

$$\begin{aligned} \bar{h}^t{}_t &= \bar{h}^x{}_t , \\ \bar{h}^t{}_x &= \bar{h}^x{}_x , \\ \bar{h}^t{}_y &= \bar{h}^x{}_y , \\ \bar{h}^t{}_z &= \bar{h}^x{}_z . \end{aligned} \quad (8.8)$$

La gauge armonica non è l'unica possibile, infatti possiamo fare una trasformazione infinitesima $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ che preserva la gauge armonica se ϵ^μ soddisfa $\square_F \epsilon^\mu = 0$, cioè l'equazione delle onde. Possiamo sfruttare questi 4 gradi di libertà per porre a zero le seguenti quantità:

$$\bar{h}^t{}_x = \bar{h}^t{}_y = \bar{h}^t{}_z = \bar{h}^y{}_y + \bar{h}^z{}_z = 0 , \quad (8.9)$$

e quindi

$$\bar{h}^x{}_x = \bar{h}^x{}_y = \bar{h}^x{}_z = \bar{h}^t{}_t = 0 . \quad (8.10)$$

Rimangono solo 2 gradi di libertà $\bar{h}^y{}_y - \bar{h}^z{}_z$ e $\bar{h}^y{}_z$. Inoltre avremo:

$$\bar{h}^\mu{}_\mu = h^\mu{}_\mu - 2h^\mu{}_\mu = -h^\mu{}_\mu = \bar{h}^x{}_x + \bar{h}^y{}_y + \bar{h}^z{}_z + \bar{h}^t{}_t = 0 \rightarrow h^\mu{}_\mu = 0 \quad (8.11)$$

e quindi $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ coincidono e sono a **traccia nulla**:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{yy} & h_{yz} \\ 0 & 0 & h_{yz} & -h_{yy} \end{pmatrix} \quad \text{TT - gauge} . \quad (8.12)$$

Ci sono 2 stati di polarizzazione che corrispondono ai 2 gradi di libertà effettivi. Inoltre $h_{\mu\nu}$ è nullo, $h_{\mu\nu} = 0$, sul piano ortogonale alla direzione di propagazione.

Tema 9

Sul moto di due particelle in presenza di un'onda gravitazionale

Traccia: **Discutere le conseguenze dell'equazione della deviazione geodetica su un sistema di particelle in presenza di un'onda gravitazionale piana del tipo:**

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{zz} \end{pmatrix}, \quad h_{yy} = -h_{zz} = 2A_+ \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]. \quad (9.1)$$

L'equazione della deviazione geodetica è

$$\frac{d^2 \delta x^\lambda}{d\tau^2} = \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu}^\lambda \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \delta x^\mu. \quad (9.2)$$

Consideriamo 2 particelle di cui una centrata nel sistema di riferimento e siano esse inizialmente a riposo, cioè:

$$U^\alpha = U^\beta = (1, 0, 0, 0), \quad (9.3)$$

e sia δx^0 la loro distanza propria iniziale. Il tensore $\mathcal{R}_{\lambda\alpha\beta\mu}$ si riduce a $\mathcal{R}_{\lambda 00\mu}$ e, poiché $h_{00} = h_{i0} = h_{0i} = 0$, allora avremo:

$$\mathcal{R}_{\lambda 00\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{\lambda\mu}}{c^2 \partial t^2} \rightarrow \mathcal{R}_{00\mu}^\lambda = \eta^{\lambda\nu} \mathcal{R}_{\nu 00\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\nu} \frac{\partial^2 h_{\nu\mu}}{c^2 \partial t^2}, \quad (9.4)$$

e quindi

$$\frac{d^2 \delta x^\lambda}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\nu} \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} h_{\nu\mu} \delta x^\mu. \quad (9.5)$$

Ponendo $\delta x^\lambda(t) = \delta x_0^\lambda + \delta x_1^\lambda(t)$ con $\delta x_1^\lambda(t) \ll 1$ e $d\tau = c dt$, otteniamo:

$$\frac{d^2 \delta x_1^\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\nu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\nu\mu} \delta x_0^\mu. \quad (9.6)$$

Integrando troviamo $\delta x^\lambda(t) = \delta x_0^\lambda + \frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu}h_{\nu\mu}\delta x_0^\mu$, per cui avremo:

$$\begin{aligned}\delta x^0(t) &= 0, \\ \delta x^1(t) &= \delta x_0^1 + \frac{1}{2}\eta^{1\nu}h_{\nu\mu}\delta x_0^\mu = \delta x_0^1, \\ \delta x^2(t) &= \delta x_0^2 + \frac{1}{2}\eta^{22}h_{2\mu}\delta x_0^\mu = \delta x_0^2 + \frac{1}{2}(h_{22}\delta x_0^2 + h_{23}\delta x_0^3), \\ \delta x^3(t) &= \delta x_0^3 + \frac{1}{2}\eta^{33}h_{3\mu}\delta x_0^\mu = \delta x_0^3 + \frac{1}{2}(h_{32}\delta x_0^2 + h_{33}\delta x_0^3),\end{aligned}\tag{9.7}$$

e quindi le particelle vengono accelerate solo nel piano ortogonale alla direzione di propagazione. Supponendo che $h_{23} = h_{32} = 0$ e $h_{22} = -h_{33} = 2A_+ \cos[\omega(t - \frac{x}{c})]$ e supponendo che le 2 particelle siano: la prima in $(0, y_0, 0)$; e la seconda in $(0, 0, z_0)$, possiamo scrivere le equazioni per le due particelle come:

$$\begin{aligned}1) \quad z &= 0, \quad y = y_0 + \frac{1}{2}h_{yy}y_0 = y_0 \left[1 + A_+ \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)\right], \\ 2) \quad y &= 0, \quad z = z_0 + \frac{1}{2}h_{zz}z_0 = z_0 \left[1 - A_+ \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)\right].\end{aligned}\tag{9.8}$$

Assumiamo ora che a $t = 0$ valga $\omega(t - x/c) = \pi/2$. Dopo un quarto di periodo avremo:

$$\begin{aligned}1) \quad z &= 0, \quad y = y_0(1 - A_+), \\ 2) \quad y &= 0, \quad z = z_0(1 + A_+),\end{aligned}\tag{9.9}$$

dopo mezzo periodo:

$$\begin{aligned}1) \quad z &= 0, \quad y = y_0, \\ 2) \quad y &= 0, \quad z = z_0,\end{aligned}\tag{9.10}$$

e dopo 3/4 di periodo:

$$\begin{aligned}1) \quad z &= 0, \quad y = y_0(1 + A_+), \\ 2) \quad y &= 0, \quad z = z_0(1 - A_+).\end{aligned}\tag{9.11}$$

Otteniamo così la sequenza mostrata in figura 9.1.

Se, invece, avessimo $h_{yy} = -h_{zz} = 0$ e $h_{yz} = h_{zy} = 2A_\times \cos \omega(t - \frac{x}{c})$, una generica particella in (y_0, z_0) si muoverà con una legge:

$$\begin{aligned}y &= y_0 + \frac{1}{2}h_{23}z_0 = y_0 + A_\times \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) z_0, \\ z &= z_0 + \frac{1}{2}h_{32}y_0 = z_0 + A_\times \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) y_0.\end{aligned}\tag{9.12}$$

Consideriamo, per esempio, 4 particelle. A $\pi/2$ siano esse in:

$$\begin{aligned}1) \quad &(1, 1), \\ 2) \quad &(-1, 1), \\ 3) \quad &(-1, -1), \\ 4) \quad &(1, -1),\end{aligned}\tag{9.13}$$

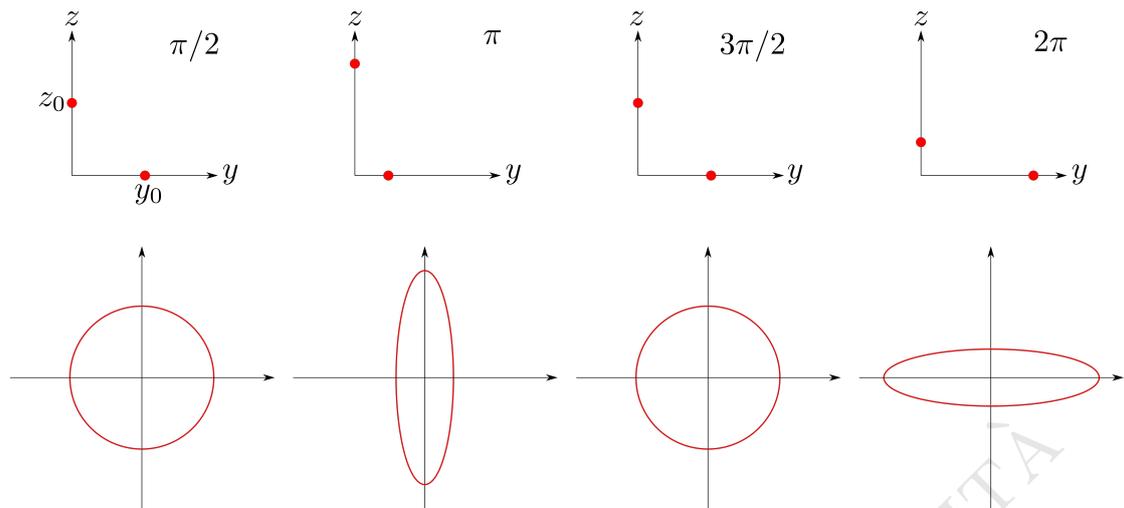


Figure 9.1

a π in

- 1) $(1 - A_x, 1 - A_x)$,
- 2) $(-1 - A_x, 1 + A_x)$,
- 3) $(-1 + A_x, -1 + A_x)$,
- 4) $(1 + A_x, -1 - A_x)$,

(9.14)

a $3\pi/2$ con in $\pi/2$ e a 2π in

- 1) $(1 + A_x, 1 + A_x)$,
- 2) $(-1 + A_x, 1 - A_x)$,
- 3) $(-1 - A_x, -1 - A_x)$,
- 4) $(1 - A_x, -1 + A_x)$,

(9.15)

Otteniamo così la sequenza mostrata in figura 9.2.

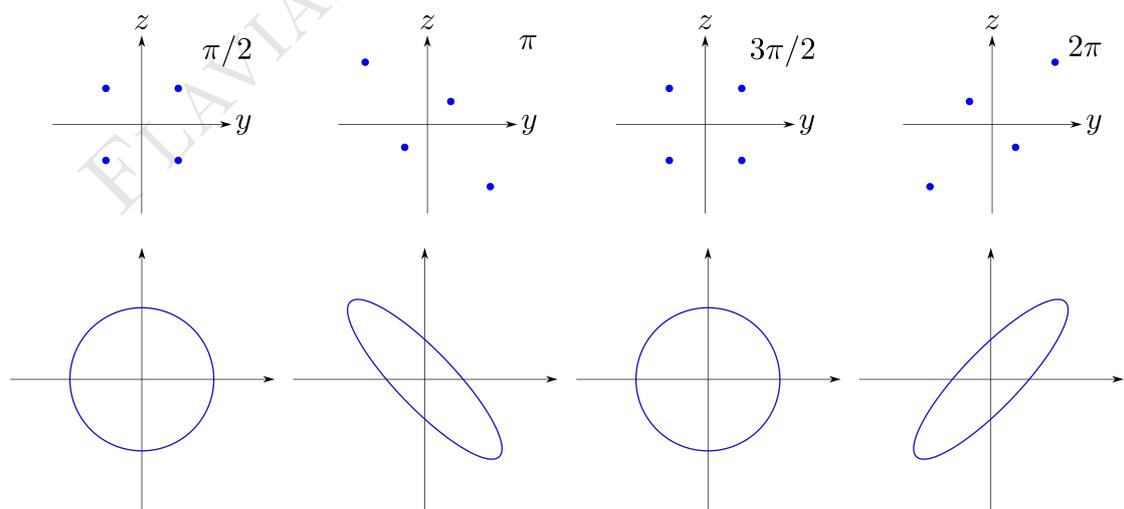


Figure 9.2

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 10

Sulla metrica al di là dell'orizzonte degli eventi

Traccia: **Mostrare come si può estendere la metrica di Schwarzschild attraverso l'orizzonte degli eventi trovando l'opportuno sistema di coordinate.**

Consideriamo la metrica di Schwarzschild bidimensionale:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2, \quad (10.1)$$

e calcoliamo le geodetiche nulle, cioè risolviamo $g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 0$, con $U^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$. Avremo:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 0, \\ \rightarrow \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2, \\ \rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2, \\ \rightarrow \frac{dr}{dt} &= \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\ \rightarrow \frac{dt}{dr} &= \pm \frac{r}{r - 2M}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Integrando troviamo:

$$\begin{aligned} t &= \pm \tilde{r} + \text{cost}, \\ \tilde{r} &= r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Definiamo le coordinate entranti e uscenti

$$\begin{aligned} u &= t - \tilde{r}, \\ v &= t + \tilde{r}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

con $\tilde{r} \sim r$ per $r \rightarrow \infty$, mentre per $r \rightarrow 2M$ abbiamo $\tilde{r} \rightarrow -\infty$, cioè spinge l'orizzonte a $-\infty$. Inoltre, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty, \\ t = \frac{u+v}{2}, \quad \frac{\tilde{r}-r}{2M} = \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad \tilde{r} = \frac{v-u}{2}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

e quindi

$$\begin{aligned} e^{\tilde{r}/2M} e^{-r/2M} &= \frac{r}{2M} - 1 = \frac{r-2M}{2M}, \\ \rightarrow 1 - \frac{2M}{r} &= \frac{r-2M}{2M} \frac{2M}{r} = \frac{2M}{r} e^{\tilde{r}/2M} e^{-r/2M}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Ora, procedendo nel calcolo, avremo:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \right] = \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 - d\tilde{r}^2) = \\ &= -\frac{2M}{r} e^{\tilde{r}/2M} e^{-r/2M} dudv = \\ &= -\frac{2M}{r} e^{-r/2M} e^{(v-u)/4M} dudv, \end{aligned} \quad (10.7)$$

con $u \rightarrow \infty$ e $v \rightarrow -\infty$ quando $r \rightarrow 2M$. Questa metrica è regolare ovunque. Poniamo adesso:

$$\begin{aligned} U &= -e^{-u/4M}, \quad -\infty < U < 0, \\ V &= -e^{v/4M}, \quad 0 < V < \infty, \end{aligned} \quad (10.8)$$

cosicché la metrica diventa:

$$\begin{aligned} dU &= e^{-u/4M} \frac{1}{4M} du, \quad dV = e^{v/4M} \frac{1}{4M} dv, \\ ds^2 &= 4M \cdot 4M \left(-\frac{2M}{r}\right) e^{-r/2M} dU dV = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV, \end{aligned} \quad (10.9)$$

dove $r \rightarrow 2M$ corrisponde a $U = V = 0$. Scegliendo, infine, le coordinate T e X tali che:

$$\begin{aligned} T &= \frac{U+V}{2}, \quad -\infty < T < \infty, \\ X &= \frac{V-U}{2}, \quad -\infty < X < \infty, \end{aligned} \quad (10.10)$$

possiamo scrivere la metrica del quadrispazio estesa attraverso l'orizzonte degli eventi nella forma seguente:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (10.11)$$

Tema 11

Sulla struttura dello spaziotempo vicino all'orizzonte degli eventi

Traccia: Discutere le proprietà dello spaziotempo di Schwarzschild nelle coordinate di Kruskal.

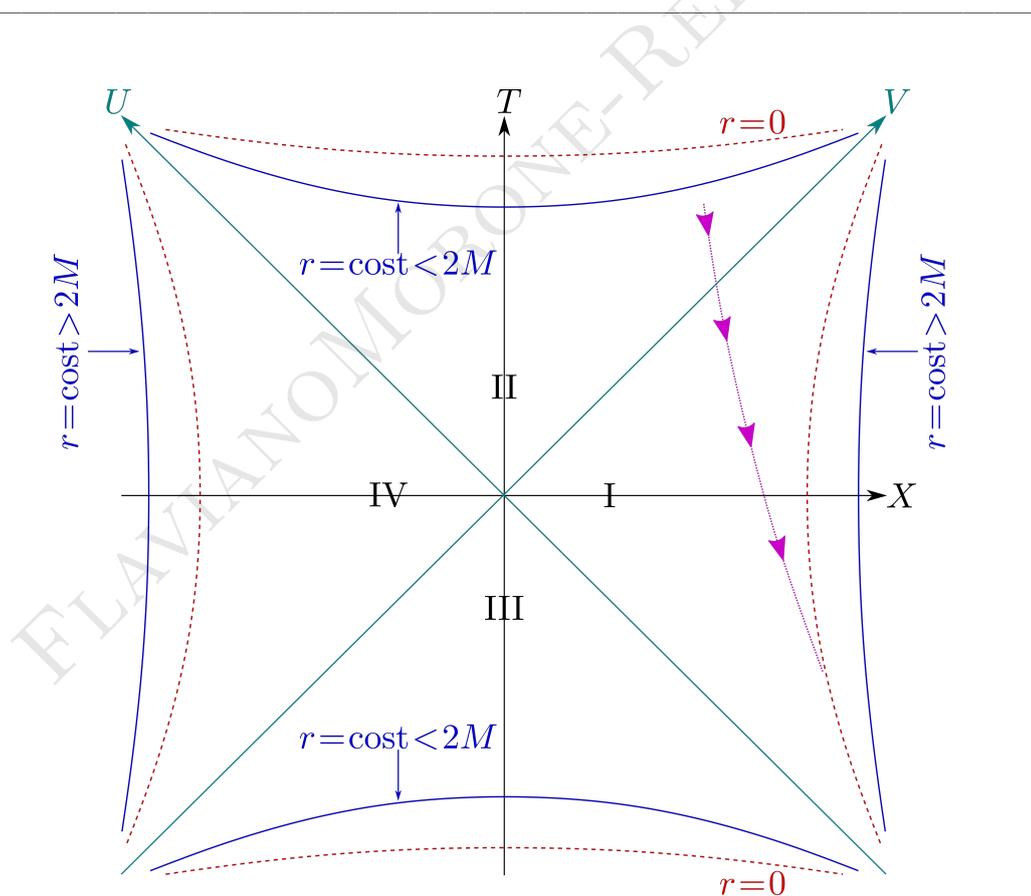


Figure 11.1

Consideriamo il grafico rappresentato in figura 11.1. Lo spazio-tempo originale, quello di Schwarzschild all'esterno dell'orizzonte degli eventi, corrisponde

alla regione I , definita da:

$$-\infty < U < 0, \quad 0 < V < \infty. \quad (11.1)$$

Un osservatore che parte dalla regione I all'esterno dell'orizzonte, prima di attraversare la regione II , può sempre tornare indietro; al contrario, una volta in II , laddove $r < 2M$, viene catturato dalla singolarità. La regione II rappresenta lo spazio-tempo all'interno dell'orizzonte. Possiamo mandare segnali alla regione II , ma non alle regioni III e IV . Non possono arrivarci segnali dalla regione IV . Potrebbero arrivarci segnali dalla regione III in linea di principio, ma impiegherebbero un tempo t infinito per essere ricevuti.

Lo spazio-tempo esteso di Kruskal è utile per studiare la struttura dello spazio-tempo vicino all'orizzonte degli eventi, ma è inappropriato per descrivere lo spazio-tempo all'infinito a causa del comportamento esponenziale di g_{TT} e g_{XX} .

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 12

Sulla soluzione dell'equazione delle onde gravitazionali

Traccia: Risolvere l'equazione delle onde gravitazionali emesse da una sorgente descritta da un tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$, nell'ipotesi di campo debole e piccole velocità e mostrare che:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, r) = \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \int_V T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, x' \right) d^3x . \quad (12.1)$$

Supponiamo che la regione in cui è localizzata la sorgente sia molto più piccola della lunghezza d'onda della radiazione emessa, ovvero:

$$\epsilon < |x_i| \quad \text{t.c.} \quad \epsilon \ll \lambda_{\text{OG}} = \frac{2\pi c}{\omega} , \quad (12.2)$$

cioè $\epsilon\omega = v_{\text{tipica}} \ll c$: le velocità coinvolte sono piccole rispetto alla velocità della luce. Dobbiamo risolvere il problema seguente:

$$\begin{cases} \square_F \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}^\mu{}_\nu = 0 \end{cases} , \quad (12.3)$$

che possiamo riscrivere anche come:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \bar{h}_{\mu\nu} = -K T_{\mu\nu} , \quad K = \frac{16\pi G}{c^4} . \quad (12.4)$$

Scriviamo ora il laplaciano in coordinate polari:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} , \quad (12.5)$$

e consideriamo lo sviluppo di Fourier di $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}(t, r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r) e^{-i\omega t} d\omega , \\ T_{\mu\nu}(t, r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} T_{\mu\nu}(\omega, r) e^{-i\omega t} d\omega , \end{aligned} \quad (12.6)$$

per mezzo del quale l'equazione (12.4) diventa:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r) = -KT_{\mu\nu}(\omega, r) . \quad (12.7)$$

Risolviamo dapprima l'equazione fuori dalla sorgente, dove $T_{\mu\nu} = 0$, risolviamo cioè l'equazione:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r) = 0 \rightarrow \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \nabla^2\right) \bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r) = 0 . \quad (12.8)$$

Consideriamo altresì il caso più semplice di soluzione indipendente da θ e ϕ :

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r) = \frac{A_{\mu\nu}(\omega)}{r} e^{i\omega r/c} + \frac{Z_{\mu\nu}(\omega)}{r} e^{-i\omega r/c} , \quad (12.9)$$

che rappresenta 2 onde sferiche: una entrante ($e^{-i\omega r/c}$), e una uscente ($e^{i\omega r/c}$). Infatti, sostituendo per esempio $e^{i\omega r/c}$ nell'integrale e integrando si ha:

$$\int e^{-i\omega(t-r/c)} d\omega \sim f(t - r/c) , \quad (12.10)$$

che è effettivamente un'onda progressiva. Dal momento che ci interessa solo l'onda emessa, poniamo $Z_{\mu\nu}(\omega) = 0$ e avremo

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r) = \frac{A_{\mu\nu}(\omega)}{r} e^{i\omega r/c} . \quad (12.11)$$

L'ampiezza $A_{\mu\nu}(\omega)$ va calcolata risolvendo l'equazione all'interno della sorgente, cioè

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \nabla^2\right) \bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r) = -KT_{\mu\nu}(\omega, r) . \quad (12.12)$$

Ora, possiamo risolvere quest'equazione per qualsiasi valore assegnato di μ e ν , per cui, integrando sul volume della sorgente si trova:

$$\int_V \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \nabla^2\right) \bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r) d^3x = -K \int_V T_{\mu\nu}(\omega, r) d^3x . \quad (12.13)$$

Valutiamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} d^3x &= \int_V \text{div}(\nabla \bar{h}_{\mu\nu}) d^3x = \int_S (\nabla \bar{h}_{\mu\nu})^k dS_k \sim 4\pi\epsilon^2 \left(\frac{d}{dr} \frac{A_{\mu\nu}}{r} e^{i\omega r/c}\right)_{r=\epsilon} = \\ &= 4\pi\epsilon^2 \left[-\frac{A_{\mu\nu}}{r^2} e^{i\omega r/c} + \frac{A_{\mu\nu}}{r} e^{i\omega r/c} \left(\frac{i\omega}{c}\right)\right]_{r=\epsilon} , \end{aligned} \quad (12.14)$$

e, trascurando i termini di ordine ϵ , otteniamo:

$$\int_V \nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} d^3x = -4\pi A_{\mu\nu}(\omega) . \quad (12.15)$$

Poi avremo:

$$\int_V \frac{\omega^2}{c^2} \bar{h}_{\mu\nu} d^3x \leq |\bar{h}_{\mu\nu}^{\text{MAX}}| \frac{\omega^2}{c^2} \frac{4}{3} \pi \epsilon^3 , \quad (12.16)$$

che è di ordine ϵ^3 e può essere trascurato. Troviamo, quindi, il seguente risultato:

$$-4\pi A_{\mu\nu}(\omega) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int_V T_{\mu\nu}(\omega, r) d^3x , \quad (12.17)$$

da cui ricaviamo $A_{\mu\nu}(\omega)$ come

$$A_{\mu\nu}(\omega) = \frac{4G}{c^4} \int_V T_{\mu\nu}(\omega, r) d^3x . \quad (12.18)$$

A questo punto possiamo scrivere la soluzione $\bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r)$ come:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\omega, r) = \frac{4G}{rc^4} e^{i\omega r/c} \int_V T_{\mu\nu}(\omega, r) d^3x , \quad (12.19)$$

da cui, antitrasformando, troviamo la soluzione del problem originale $\bar{h}_{\mu\nu}(t, r)$:

$$\boxed{\bar{h}_{\mu\nu}(t, r) = \frac{4G}{rc^4} \int_V T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, x^i \right) d^3x} . \quad (12.20)$$

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 13

Sul teorema del viriale

Traccia: **Dimostrare il teorema del viriale in forma tensoriale e utilizzarlo per semplificare la soluzione dell'equazione delle onde:**

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, r) = \frac{4G}{rc^4} \int_V T_{\mu\nu} \left(t - \frac{r}{c}, x^i \right) d^3x . \quad (13.1)$$

Sappiamo che $T^{\mu\nu}$ soddisfa la legge di conservazione $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial t} = - \frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k} , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 ; \quad k = 1, 2, 3 . \quad (13.2)$$

Integrando sul volume della sorgente troviamo:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{\mu 0} dV = - \int_V \frac{\partial T^{\mu k}}{\partial x^k} dV = - \int_S T^{\mu k} dS_k = 0 , \quad (13.3)$$

e quindi

$$\int_V T^{\mu 0} dV = \text{cost} , \quad (13.4)$$

da cui ricaviamo

$$\bar{h}^{\mu 0} = \text{cost} , \quad (13.5)$$

e possiamo porre la costante uguale a zero perché ci interessano solo le soluzioni dipendenti dal tempo.

Consideriamo ancora la legge di conservazione $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ e consideriamo le componenti spaziali:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial t} = - \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} , \quad \mu, \nu = 1, 2, 3 . \quad (13.6)$$

Procedendo ulteriormente, moltiplichiamo per x^k e integriamo poi su V :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{\mu 0} x^k dV &= - \int_V \frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu} x^k dV = - \left[\int_V \frac{\partial}{\partial x^\nu} (T^{\mu\nu} x^k) dV - \int_V T^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} x^k dV \right] = \\ &= - \left[\int_S T^{\mu\nu} x^k dS_\nu - \int_V T^{\mu k} dV \right] = \int_V T^{\mu k} dV . \end{aligned} \quad (13.7)$$

Essendo $T^{\mu k}$ simmetrico possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{00} x^k x^h dV &= - \int_V \frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{0\nu} x^k x^h dV = \\
&= - \left[\int_V \frac{\partial}{\partial x^\nu} (T^{0\nu} x^k x^h) dV - \int_V T^{0\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} x^k x^h dV - \int_V T^{0\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} x^k x^h dV \right] = \\
&= - \left[\int_S T^{0\nu} x^k x^h dS_\nu - \int_V T^{0k} x^h dV - \int_V T^{0h} x^k dV \right] = \\
&= \int_V T^{0k} x^h dV + \int_V T^{0h} x^k dV .
\end{aligned} \tag{13.8}$$

Derivando rispetto a x^0 troviamo:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T^{00} x^k x^h dV = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V T^{0k} x^h + T^{0h} x^k dV = 2 \int_V T^{\mu k} dV , \tag{13.9}$$

per $\mu, k = 1, 2, 3$.

Definiamo ora il momento di **quadrupolo del sistema** $q^{kh}(t)$ come

$$\begin{aligned}
q^{kh}(t) &= \frac{1}{c^2} \int_V T^{00} x^k x^h dV , \\
\rightarrow \int_V T^{\mu k} dV &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} q^{kh}(t) ,
\end{aligned} \tag{13.10}$$

per cui l'equazione delle onde diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{h}^{\mu 0} = 0 \\ \bar{h}^{ik}(t, r) = \frac{4G}{c^4 r} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} q^{kh}(t) = \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} q^{kh} \left(t - \frac{r}{c} \right) \end{array} \right. , \tag{13.11}$$

che descrive un'onda sferica lontana dalla sorgente. Le ipotesi sotto cui abbiamo derivato quest'equazione sono:

1. $T_{,\nu}^{\mu\nu} = 0$;
2. il moto dei corpi è dominato da forze non gravitazionali.

Inoltre, la soluzione dipende solo dal moto delle sorgenti e non da forze che agiscono su di esse.

La radiazione gravitazionale ha natura quadrupolare. Infatti, il momento di dipolo

$$\vec{d}_G = \sum m_i \vec{r}_i , \tag{13.12}$$

è tale che

$$\frac{d}{dt} \vec{d}_G = 0 , \tag{13.13}$$

come conseguenza della conservazione dell'impulso. Di conseguenza, le onde gravitazionali non hanno un contributo di dipolo.

Tema 14

Sull'oscillatore armonico gravitazionale

Traccia: Calcolare il segnale gravitazionale emesso da un oscillatore armonico e proiettarlo nella TT-gauge scegliendo una particolare direzione.

Consideriamo 2 masse uguali nelle posizioni x_1 e x_2 (vedi figura 14.1) che oscillano secondo la legge:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}\ell_0 - A \cos \omega t \\ x_2 = \frac{1}{2}\ell_0 + A \cos \omega t \end{cases} . \quad (14.1)$$

La componente T^{00} del tensore energia-impulso è

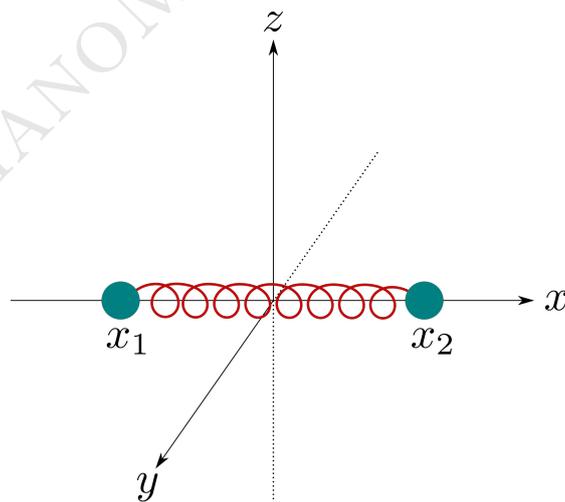


Figure 14.1

$$T^{00} = \sum_{n=1}^2 c p_0(t) \delta(x - x^n) \delta(y) \delta(z) . \quad (14.2)$$

Assumendo che $v \ll c$, allora $\gamma \sim 1$ e quindi $p_0 = mc$, cosicché avremo

$$T^{00} = mc^2 \sum_{n=1}^2 \delta(x - x^n) \delta(y) \delta(z) , \quad (14.3)$$

per cui il momento di quadrupolo $q^{ik} = c^{-2} \int_V T^{00} x^i x^k d^3x$ vale:

$$\begin{aligned} q^{xx} &= m \left[\int_V x^2 \delta(x - x_1) \delta(y) \delta(z) d^3x + \int_V x^2 \delta(x - x_2) \delta(y) \delta(z) d^3x \right] = \\ &= m(x_1^2 + x_2^2) = m \left(\frac{1}{2} \ell_0^2 + 2A^2 \cos^2 \omega t + 2A\ell_0 \cos \omega t \right) = \\ &= m(\text{cost} + A^2 \cos 2\omega t + 2A\ell_0 \cos \omega t) , \quad (14.4) \\ q^{yy} &= 0 , \\ q^{zz} &= 0 , \\ q^{xy} &= 0 , \\ q^{yz} &= 0 . \end{aligned}$$

Il momento di quadrupolo ridotto è $Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} q^k_k$, dove $q^k_k = \eta^{ik} q_{ik} = \eta^{xx} q_{xx} = q_{xx}$, per cui avremo

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= q_{xx} - \frac{1}{3} q_{xx} = \frac{2}{3} q_{xx} , \\ Q_{yy} &= q_{yy} - \frac{1}{3} q_{xx} = -\frac{1}{3} q_{xx} , \\ Q_{zz} &= q_{zz} - \frac{1}{3} q_{xx} = \frac{1}{3} q_{xx} , \\ Q_{xy} &= q_{xy} = 0 , \\ Q_{yz} &= q_{yz} = 0 . \end{aligned} \quad (14.5)$$

Calcoliamo ora l'onda emessa nella direzione z , per cui indichiamo con \vec{n} il vettore $\vec{n} = (0, 0, 1)$ e con \hat{P} il proiettore $P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (14.6)$$

Proiettiamo ora Q_{ij} nella TT-gauge usando il proiettore costruito con P_{ij} :

$$\mathcal{P}_{jkmn} = P_{jm} P_{kn} - \frac{1}{2} P_{jk} P_{mn} , \quad Q_{ij}^{\text{TT}} = \mathcal{P}_{ijmn} Q_{mn} , \quad (14.7)$$

da cui otteniamo esplicitamente:

$$\begin{aligned}
Q_{xx}^{\text{TT}} &= \mathcal{P}_{xxmn}Q_{mn} = \mathcal{P}_{xxxx}Q_{xx} + \mathcal{P}_{xxyy}Q_{yy} + \mathcal{P}_{xxzz}Q_{zz} = \\
&= \left(P_{xx}P_{xx} - \frac{1}{2}P_{xx}P_{xx} \right) Q_{xx} - \frac{1}{2}P_{xx}P_{yy}Q_{yy} = \frac{1}{2}(Q_{xx} - Q_{yy}) , \\
Q_{yy}^{\text{TT}} &= \mathcal{P}_{yymn}Q_{mn} = \mathcal{P}_{yyxx}Q_{xx} + \mathcal{P}_{yyyy}Q_{yy} + \mathcal{P}_{yyzz}Q_{zz} = \\
&= -\frac{1}{2}P_{yy}P_{xx}Q_{xx} + \left(P_{yy}P_{yy} - \frac{1}{2}P_{yy}P_{yy} \right) Q_{yy} = -\frac{1}{2}(Q_{xx} - Q_{yy}) , \\
Q_{zz}^{\text{TT}} &= \mathcal{P}_{zzxx}Q_{xx} + \mathcal{P}_{zzyy}Q_{yy} + \mathcal{P}_{zzzz}Q_{zz} = 0 , \\
Q_{xy}^{\text{TT}} &= \mathcal{P}_{xyxx}Q_{xx} + \mathcal{P}_{xyyy}Q_{yy} + \mathcal{P}_{xyzz}Q_{zz} = 0 .
\end{aligned} \tag{14.8}$$

Inserendo il risultato precedente nell'equazione delle onde seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_{\mu 0}^{\text{TT}} , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 , \\ \bar{h}_{ik}^{\text{TT}}(t, r) = \frac{2G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} Q_{ij}^{\text{TT}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \end{array} \right. , \tag{14.9}$$

troviamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{h}_{\mu 0}^{\text{TT}} = 0 , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \\ \bar{h}_{xx}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 z} \frac{d^2}{dt^2} Q_{xx}^{\text{TT}} = \frac{2G}{c^4 z} \frac{d^2}{dt^2} (Q_{xx} - Q_{yy}) = \frac{G}{c^4 z} \frac{d^2}{dt^2} q_{xx} = -\frac{2Gm}{c^4 z} (2A^2 \cos 2\omega t + Al_0 \cos \omega t) \omega^2 . \\ \bar{h}_{yy}^{\text{TT}} = -\bar{h}_{xx}^{\text{TT}} \end{array} \right. \tag{14.10}$$

Di conseguenza, la radiazione gravitazionale emessa da un oscillatore armonico è polarizzata linearmente. Per simmetria, anche la radiazione emessa lungo y sarà la stessa. Al contrario, la radiazione emessa lungo x è nulla.

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 15

Sulle onde gravitazionali emesse da un sistema binario

Traccia: Calcolare il segnale gravitazionale emesso da un sistema binario in orbita circolare e proiettarlo nella gauge-TT scegliendo una particolare direzione.

Consideriamo un sistema di 2 masse m_1 e m_2 che orbitano attorno al loro centro di massa, come mostrato in figura 15.1. Sia ℓ_0 la loro distanza reciproca;

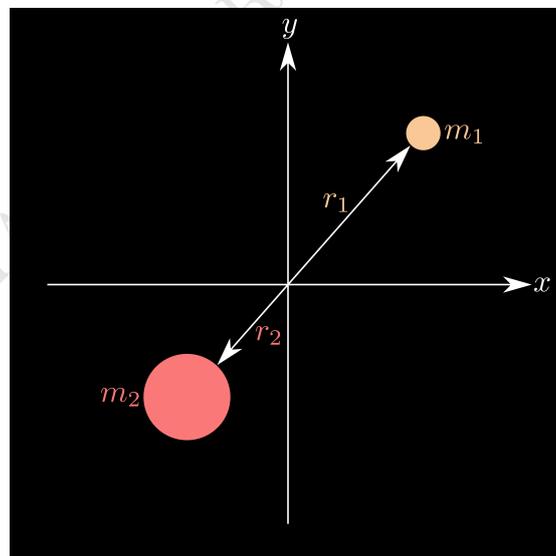


Figure 15.1

$\mu = m_1 m_2 / M$ la loro massa ridotta e $M = m_1 + m_2$ la massa totale. Siano r_1 e r_2 le loro distanze dal centro di massa:

$$r_1 = \frac{m_2}{M} \ell_0, \quad r_2 = \frac{m_1}{M} \ell_0. \quad (15.1)$$

La frequenza orbitale si calcola nel seguente modo:

$$\frac{Gm_1m_2}{\ell_0^2} = m_1r_1\omega_k^2 = \frac{m_1m_2}{M}\ell_0\omega_k^2 \rightarrow \omega_k = \sqrt{\frac{GM}{\ell_0^3}}, \quad (15.2)$$

e le equazioni del moto delle 2 masse sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \omega_k t = \frac{m_2 \ell_0}{M} \cos(\omega_k t), \\ y_1 &= r_1 \sin \omega_k t = \frac{m_2 \ell_0}{M} \sin(\omega_k t), \\ x_2 &= -r_2 \cos \omega_k t = -\frac{m_1 \ell_0}{M} \cos(\omega_k t), \\ y_2 &= -r_2 \sin \omega_k t = -\frac{m_1 \ell_0}{M} \sin(\omega_k t). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Calcoliamo la componente T^{00} del tensore energia-impulso:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \sum_{n=1}^2 cp_n^0(t)\delta(x-x^n)\delta(y-y^n)\delta(z) = \\ &= c^2 \sum_{n=1}^2 m_n \delta(x-x^n)\delta(y-y^n)\delta(z) \end{aligned} \quad (15.4)$$

e, di seguito, le componenti del momento di quadrupolo:

$$\begin{aligned} q^{ik} &= \frac{1}{c^2} \int_V T^{00} x^i x^k dV, \\ q^{xx} &= \left[m_1 \int_V x^2 \delta(x-x_1)\delta(y-y_1)\delta(z) dV + m_2 \int_V x^2 \delta(x-x_2)\delta(y-y_2)\delta(z) dV \right] = \\ &= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = \frac{m_1 m_2^2 \ell_0^2}{M^2} \cos^2(\omega_k t) + \frac{m_2 m_1^2 \ell_0^2}{M^2} \cos^2(\omega_k t) = \\ &= \frac{m_1 m_2}{M^2} \ell_0^2 \cos^2(\omega_k t) (m_1 + m_2) = \mu \ell_0^2 \cos^2(\omega_k t) = \\ &= \frac{\mu}{2} \ell_0^2 \cos(2\omega_k t) + \text{cost}, \\ q^{yy} &= m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 = \frac{m_1 m_2^2 \ell_0^2}{M^2} \sin^2(\omega_k t) + \frac{m_2 m_1^2 \ell_0^2}{M^2} \sin^2(\omega_k t) = \\ &= \mu \ell_0^2 \sin^2(\omega_k t) = -\frac{\mu}{2} \ell_0^2 \cos(2\omega_k t) + \text{cost}, \\ q^{xy} &= m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 = \frac{m_1 m_2^2 \ell_0^2}{M^2} \cos(\omega_k t) \sin(\omega_k t) + \frac{m_2 m_1^2 \ell_0^2}{M^2} \cos(\omega_k t) \sin(\omega_k t) = \\ &= \mu \ell_0^2 \sin(\omega_k t) \cos(\omega_k t) = \frac{\mu}{2} \ell_0^2 \sin(2\omega_k t). \end{aligned} \quad (15.5)$$

Calcoliamo ora il momento di quadrupolo ridotto $Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} q^k_k$, dove $q^k_k = \eta^{ik} q_{ik} = q_{xx} + q_{yy} = \text{cost}$. Prendendo solo la parte dipendente dal tempo di Q_{ij}

troviamo:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= q_{xx} , \\ Q_{yy} &= q_{yy} = -q_{xx} = -Q_{xx} , \\ Q_{xy} &= q_{xy} . \end{aligned} \quad (15.6)$$

Definendo la matrice $A_{ij}(t)$ come segue:

$$A_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\omega_k t) & \sin(2\omega_k t) & 0 \\ \sin(2\omega_k t) & -\cos(2\omega_k t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (15.7)$$

possiamo scrivere:

$$Q_{ij}(t) = \frac{\mu_0}{2} \ell_0^2 A_{ij}(t) , \quad (15.8)$$

e, proiettando nella gauge-TT, avremo

$$Q_{ij}^{\text{TT}}(t) = \mathcal{P}_{ijmn} Q_{mn} = \frac{\mu_0^2}{2} \mathcal{P}_{ijmn} A_{mn}(t). \quad (15.9)$$

Se consideriamo l'onda emessa lungo l'asse z possiamo porre:

$$\begin{aligned} n &= (0, 0, 1) , \\ P_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \\ A_{ij} &= \begin{pmatrix} \cos(2\omega_k t) & \sin(2\omega_k t) & 0 \\ \sin(2\omega_k t) & -\cos(2\omega_k t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \\ A_{ij}^{\text{TT}} &= \mathcal{P}_{ijmn} A_{mn} = \left(P_{im} P_{jn} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{mn} \right) A_{mn} . \end{aligned} \quad (15.10)$$

Di conseguenza, l'onda emessa sarà data da:

$$\begin{aligned} h_{ij}^{\text{TT}} &= \frac{2G}{c^4 z} \frac{d^2}{dt^2} Q_{ij}^{\text{TT}} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{2G}{c^4 z} \frac{\mu_0^2}{2} (2\omega_k)^2 A_{ij}^{\text{TT}} = -\frac{G}{c^4 z} \mu_0^2 4 \frac{GM}{\ell_0^3} A_{ij}^{\text{TT}} = \\ &= -\frac{4\mu G^2 M}{c^4 z \ell_0} A_{ij}^{\text{TT}} = -h_0 A_{ij}^{\text{TT}} , \end{aligned} \quad (15.11)$$

dove h_0 è l'ampiezza dell'onda. Quest'onda ha entrambe le polarizzazioni e, se calcolassimo le onde lungo x o lungo y , queste sarebbero polarizzate linearmente.

FLAVIANO MORONE-RELATIVITÀ

Tema 16

Sull'energia dissipata per irraggiamento gravitazionale da un sistema di stelle binario

Traccia: L'energia persa per unità di tempo da un sistema binario sotto forma di onde gravitazionali è:

$$\frac{dE_{\text{OG}}}{dt} \equiv L_{\text{OG}} = \frac{32 G^4 \mu^2 M^3}{5 c^5 \ell_0^5}, \quad (16.1)$$

dove μ è la massa ridotta, M è la massa totale, e ℓ_0 la separazione tra le 2 stelle. Trovare l'equazione che permette di calcolare come varia il periodo orbitale del sistema nel tempo.

A causa dell'emissione di energia sotto forma di onde gravitazionali, il sistema deve aggiustare l'orbita in modo da compensare l'energia persa, per cui avremo:

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} + L_{\text{OG}} = 0, \quad (16.2)$$

dove $E_{\text{orb}} = K + U$, con

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \mu \frac{GM}{\ell_0}, \\ U &= -\frac{\mu MG}{\ell_0}, \end{aligned} \quad (16.3)$$

da cui ricaviamo che $E_{\text{orb}} = -\frac{1}{2} \frac{\mu MG}{\ell_0}$ e

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\mu MG}{\ell_0^2} \frac{d\ell_0}{dt} = -E_{\text{orb}} \left(\frac{1}{\ell_0} \frac{d\ell_0}{dt} \right). \quad (16.4)$$

Ora, sappiamo che $\omega_k^2 = GM \ell_0^{-3}$, da cui, prendendo il logaritmo di ambo i membri, troviamo $2 \ln \omega_k = \ln GM - 3 \ln \ell_0$, e quindi

$$\frac{2}{\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt} = -\frac{3}{\ell_0} \frac{d\ell_0}{dt} \rightarrow \frac{1}{\ell_0} \frac{d\ell_0}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt}, \quad (16.5)$$

da cui ricaviamo

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = E_{\text{orb}} \frac{2}{3} \frac{1}{\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt}. \quad (16.6)$$

Il periodo orbitale é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_k} \rightarrow \omega_k = \frac{2\pi}{T}, \quad (16.7)$$

per cui avremo

$$\frac{1}{\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{T}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi}{T} \right) = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dt}, \quad (16.8)$$

da cui ricaviamo l'equazione seguente:

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{E_{\text{orb}}}{T} \frac{dT}{dt} \rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{T}{E_{\text{orb}}} \frac{dE_{\text{orb}}}{dt}, \quad (16.9)$$

che possiamo riscrivere nella forma finale seguente:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{3}{2} \frac{T}{E_{\text{orb}}} L_{\text{OG}}}. \quad (16.10)$$

La separazione ℓ_0 fra le due stelle può essere calcolata sapendo che:

$$\frac{dE_{\text{orb}}}{dt} = -L_{\text{OG}} = -\frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 \ell_0^5} = \frac{1}{2} \frac{\mu M G}{\ell_0^2} \frac{d\ell_0}{dt}, \quad (16.11)$$

dove

$$\frac{d\ell_0}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 \ell_0^3}. \quad (16.12)$$

Integrando fra ℓ_0^{in} e ℓ_0 e $t_0 = 0$ e t otteniamo:

$$\int_{\ell_0^{\text{in}}}^{\ell_0} \ell_0^3 d\ell_0 = \text{cost} \int_0^t dt \rightarrow \frac{1}{4} [\ell_0^4 - (\ell_0^{\text{in}})^4] = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5} \mu M^2 t, \quad (16.13)$$

ovverosia

$$\ell_0^4(t) = (\ell_0^{\text{in}})^4 - \frac{256}{5} \frac{G^3}{c^5} \mu M^2 t. \quad (16.14)$$

Definendo il **tempo di coalescenza** t_{coal} per mezzo della seguente equazione

$$t_{\text{coal}}^{-1} = \frac{256}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 (\ell_0^{\text{in}})^4}, \quad (16.15)$$

possiamo scrivere la soluzione per la distanza $\ell_0(t)$ in forma esplicita:

$$\boxed{\ell_0(t) = \ell_0^{\text{in}} \left(1 - \frac{t}{t_{\text{coal}}} \right)^{\frac{1}{4}}}. \quad (16.16)$$