Teoria dei campi

Flaviano Morone

Contents

Chapter 1

Trasformazioni di Lorentz quantistiche e normalizzazione covariante degli stati

Consideriamo una trasformazioni di Lorentz omogenea:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \ . \tag{1.1}$$

L'invarianza dell'intervallo conduce a:

$$x'^\mu x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'_\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \ . \tag{1.2}$$

Quindi deve valere:

$$\boxed{g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}} \ . \tag{1.3}$$

Moltiplico per $g^{\sigma\tau}\Lambda^\alpha{}_\tau$:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} \Lambda^\alpha{}_\tau = g_{\rho\sigma} g^{\sigma\tau} \Lambda^\alpha{}_\tau = \Lambda^\alpha{}_\rho \ . \tag{1.4}$$

Moltiplico per l'inverso di $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho$:

$$(g\Lambda)_{\nu\rho}[(g\Lambda)^{-1}]^{\rho\gamma} \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} \Lambda^\alpha{}_\tau = \Lambda^\alpha{}_\rho [(g\Lambda)^{-1}]_{\rho\gamma}. \tag{1.5}$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} \Lambda^\alpha{}_\tau = \Lambda^\alpha{}_\rho [\Lambda^{-1} g^{-1}]_{\rho\nu} \\ &\Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} \Lambda^\alpha{}_\tau = \Lambda^\alpha{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu g^{\mu\nu} = g^{\alpha\nu} \\ &\Lambda^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} (\Lambda^T)_\tau{}^\alpha = g^{\alpha\nu} \ , \end{aligned} \tag{1.6}$$

da cui

$$\boxed{\Lambda g \Lambda^T = g} \ . \tag{1.7}$$

Ogni trasformazione di simmetria sugli stati fisici è rappresentata da un operatore lineare e unitario o antilineare e antiunitario. Poiché le trasformazioni di Lorentz sono un gruppo continuo connesso all'identità con continuità (possiamo sempre rendere triviale una trasformazione di Lorentz variando con continuità i parametri della trasformazione), le trasformazioni di Lorentz saranno rappresentate da **operatori lineari unitari**.

Moltiplicando per $(\Lambda^{-1})^\sigma_\alpha$ otteniamo:

$$\begin{aligned} &g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\alpha = g_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\alpha \\ &g_{\mu\alpha} \Lambda^\mu{}_\rho = g_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\alpha \ . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Moltiplicando per $g^{\nu\rho}$:

$$
\begin{aligned}
g^{\nu\rho} g_{\mu\alpha} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} &= g^{\nu\rho} g_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^{\sigma}{}_{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\alpha} \\
(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\alpha} &= g_{\mu\alpha} g^{\nu\rho} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} = g_{\mu\alpha} \Lambda^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}{}^{\nu} \ .
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$$
\boxed{(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}{}^{\nu}} \ . \tag{1.10}
$$

Le trasformazioni indotte sugli stati fisici dello spazio di Hilbert

$$
\psi \ \to \ U(\Lambda, a)\psi \ , \tag{1.11}
$$

soddisfano la regola di composizione

$$
U(\Lambda_2, a_2) U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \ . \tag{1.12}
$$

Le trasformazioni con $a = 0$ formano un sottogruppo: **gruppo di Lorentz omogeneo**:

$$
U(\Lambda_2, 0) U(\Lambda_1, 0) = U(\Lambda_2 \Lambda_1, 0) \ . \tag{1.13}
$$

Dalla condizione $(\det \Lambda)^2 = 1 \ \to \ \det \Lambda = \pm 1$. Le trasformazioni con $\det \Lambda = 1$ formano un sottogruppo sia del gruppo omogeneo che inomogeneo.

Consideriamo ancora la condizione

$$
g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \ , \tag{1.14}
$$

o equivalentemente

$$
\begin{aligned}
&\Lambda g \Lambda^T = g \\
&\Lambda^{\mu}{}_{\nu} g^{\nu\rho} (\Lambda^T)_{\rho}{}^{\alpha} = g^{\mu\alpha} \\
&\Lambda^{\mu}{}_{\nu} g^{\nu\rho} \Lambda^{\alpha}{}_{\rho} = g^{\mu\alpha} \ .
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Prendendo la componente 00 otteniamo

$$
\begin{aligned}
&1 = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{0} \Lambda^{\nu}{}_{0} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \Lambda^{i}{}_{0} \Lambda^{i}{}_{0} \\
&1 = g_{\nu\rho} \Lambda^{0}{}_{\nu} \Lambda^{0}{}_{\rho} = (\Lambda^{0}{}_{0})^2 - \Lambda^{0}{}_{i} \Lambda^{0}{}_{i} \\
&\to (\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \Lambda^{i}{}_{0} \Lambda^{i}{}_{0} = 1 + \Lambda^{0}{}_{i} \Lambda^{0}{}_{i} \ ,
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

e quindi

$$
\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1 \ , \tag{1.17}
$$

oppure

$$
\Lambda^{0}{}_{0} \leq 1 \ . \tag{1.18}
$$

Le trasformazioni con $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 1$ formano un sottogruppo, infatti siano Λ e $\bar{\Lambda}$ due trasformazioni di Lorentz:

$$
(\bar{\Lambda}\Lambda)^{0}{}_{0} = \bar{\Lambda}^{0}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{0} = \bar{\Lambda}^{0}{}_{0} \Lambda^{0}{}_{0} + \bar{\Lambda}^{0}{}_{1} \Lambda^{1}{}_{0} + \bar{\Lambda}^{0}{}_{2} \Lambda^{2}{}_{0} + \bar{\Lambda}^{0}{}_{3} \Lambda^{3}{}_{0} \ . \tag{1.19}
$$

Sappiamo che il trivettore $(\Lambda^{1}{}_{0}, \Lambda^{2}{}_{0}, \Lambda^{3}{}_{0}$ ha lunghezza $\sqrt{(\Lambda^{0}{}_{0})^2 - 1}$ e ugualmente il trivettore $(\Lambda^{0}{}_{1}, \Lambda^{0}{}_{2}, \Lambda^{0}{}_{3}$ ha lunghezza $\sqrt{(\bar{\Lambda}^{0}{}_{0})^2 - 1}$. Di conseguenza il prodotto scalare dei due è limitato da

$$
\left| \bar{\Lambda}^{0}{}_{1} \Lambda^{1}{}_{0} + \bar{\Lambda}^{0}{}_{2} \Lambda^{2}{}_{0} + \bar{\Lambda}^{0}{}_{3} \Lambda^{3}{}_{0} \right| \leq \sqrt{(\Lambda^{0}{}_{0})^2 - 1} \sqrt{(\bar{\Lambda}^{0}{}_{0})^2 - 1} \ . \tag{1.20}
$$

Ma allora

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 \geq \bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1} \geq 1 \ . \tag{1.21}$$

Il sottogruppo di trasformazioni di Lorentz con $\det\Lambda = \pm 1$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ è **il gruppo di Lorentz proprio ortocrono**.

Il gruppo di Lorentz proprio ortocrono è una **simmetria esatta** della natura e come abbiamo detto sarà rappresentato da operatori $U(\Lambda, a)$ unitari nello spazio di Hilbert degli stati fisici.

Il gruppo di Poincarè è un gruppo continuo non compatto, infatti i parametri che determinano gli elementi del gruppo variano su un insieme illimitato. Di conseguenza le sue rappresentazioni non triviali sono necessariamente infinito-dimensionali.

Chapter 2

Funzione di Green a 2 punti e decomposizione spettrale

Scriviamo la **relazione di completezza** nello spazio di Fock come:

$$1 = \sum_n |n\rangle\langle n| \ , \tag{2.1}$$

ovvero

$$|n\rangle\langle n| = c_0|0\rangle\langle 0| + c_1 \int d^3p|p\rangle\langle p| + c_2 \int d^3p_1 d^3p_2 |p_1, p_2\rangle\langle p_1, p_2| + ... \tag{2.2}$$

Moltiplico scalarmente per $|0\rangle$:

$$\langle 0| \sum_n |n\rangle\langle n| = c_0\langle 0| = \langle 0| \ \rightarrow \ c_0 = 1 \ . \tag{2.3}$$

Moltiplico scalarmente per $|p'\rangle$:

$$\langle p'| \sum_n |n\rangle\langle n| = c_1 \int d^3p\langle p'|p\rangle\langle p| = c_1\langle p'| \ \rightarrow \ c_1 = 1 \ . \tag{2.4}$$

Moltiplico scalarmente per $|p'_1, p'_2\rangle$:

$$\langle p'_1, p'_2| \sum_n |n\rangle\langle n| = c_2 \int d^3p_1 d^3p_2 \langle p'_1, p'_2|p_1, p_2\rangle\langle p_1, p_2| \ . \tag{2.5}$$

Ora

$$\begin{aligned}\langle p'_1, p'_2|p_1, p_2\rangle &= (\langle p'_1| \otimes \langle p'_2|)(|p_1\rangle \otimes |p_2\rangle) = \langle p'_1|p_1\rangle\langle p'_2|p_2\rangle + \langle p'_1|p_2\rangle\langle p'_2|p_1\rangle = \\ &= \delta(p_1 - p'_1)\delta(p_2 - p'_2) + \delta(p'_1 - p_2)\delta(p'_2 - p_1) \ .\end{aligned} \tag{2.6}$$

Quindi

$$\begin{aligned}&c_2 \int d^3p_1 d^3p_2 \delta(p_1 - p'_1)\delta(p_2 - p'_2)\langle p_1, p_2| + c_2 \int d^3p_1 d^3p_2 \delta(p'_1 - p_2)\delta(p'_2 - p_1)\langle p_1, p_2| = \\ &= c_2\langle p'_1, p'_2| + c_2\langle p'_2, p'_1| \ ,\end{aligned} \tag{2.7}$$

da cui otteniamo

$$c_2 = \frac{1}{2} \ . \tag{2.8}$$

In definitiva

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = |0\rangle\langle 0| + \int d^3p |p\rangle\langle p| + \frac{1}{2!}\int d^3p_1 d^3p_2 |p_1, p_2\rangle\langle p_1, p_2| + ... \\ + \frac{1}{N!}\int d^3p_1 ... d^3p_N |p_1, ..., p_N\rangle\langle p_1, ..., p_N| + ... \ , \tag{2.9}$$

o anche

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = |0\rangle\langle 0| + \int \frac{d^3p}{2\omega_p} |\widetilde{p}\rangle\langle\widetilde{p}| + \frac{1}{2!}\int \frac{d^3p_1}{2\omega_{p_1}}\frac{d^3p_2}{2\omega_{p_2}} |\widetilde{p_1, p_2}\rangle\langle\widetilde{p_1, p_2}| + ... \tag{2.10}$$

Consideriamo un operatore $\hat{O}$ hermitiano e prendiamo la funzione a 2 punti:

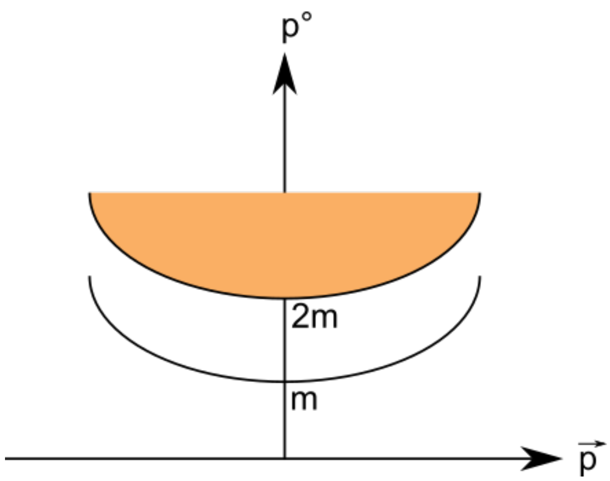
$$\begin{aligned} \langle 0|O(x)O(y)|0\rangle &= \sum_n \langle 0|O(x)|n\rangle\langle n|O(y)|0\rangle = \sum_n \langle 0|O(0)|n\rangle\langle n|O(0)|0\rangle e^{-\imath(x-y)P_n} = \\ &= \sum_n |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 e^{-\imath(x-y)P_n} = \\ &= \int d^4q \sum_n |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 e^{-\imath(x-y)P_n} \delta^4(q - P_n) = \\ &= \int d^4q e^{-\imath q(x-y)} \sum_n |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int d^4q e^{-\imath q(x-y)} \sum_{n\neq 0} |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int d^4q e^{-\imath q(x-y)} \widetilde{\rho}(q) \ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Quindi

$$\boxed{\langle 0|O(x)O(y)|0\rangle = |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int d^4q e^{-\imath q(x-y)} \widetilde{\rho}(q)} \ , \tag{2.12}$$

dove

$$\widetilde{\rho}(q) = \sum_{n\neq 0} |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) \ . \tag{2.13}$$



Il supporto di $\widetilde{\rho}$ è contenuto all'interno degli stati fisici per i quali $p^2 \geq 0$ e se ci limitiamo ad una teoria senza particelle a massa nulla allora $p^2 > 0$. Inoltre $p^0 > 0$.

La funzione spettrale $\widetilde{\rho}$ è chiaramente reale e positiva (o al più non negativa). Quindi riassumendo le proprietà di $\widetilde{\rho}$ sono:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\rho}(q) \geq 0 \ , \\ &\widetilde{\rho}(q) = 0 \ , \quad q^2 = 0 \quad \text{e} \quad q^2 < 0 \ , \\ &\widetilde{\rho}(q) = 0 \ , \quad q_0 < 0 \ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dimostro che $\widetilde{\rho}$ è funzione solo di q^2. Infatti:

$$\widetilde{\rho}(\Lambda q) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \delta^4(\Lambda q - P_n) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|\Lambda n\rangle|^2 \delta^4(\Lambda q - \Lambda P_n) \ , \tag{2.15}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che la relazione di completezza è uguale per gli stati trasformati di Lorentz. Procedendo troviamo:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|\Lambda n\rangle|^2 \frac{1}{|\det \Lambda|} \delta^4(q - \Lambda P_n) = \\ &= \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)U(\Lambda)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) = \\ &= \sum_{n \neq 0} |\langle 0|U^\dagger(\Lambda)O(0)U(\Lambda)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ora poichè

$$U^\dagger(\Lambda)O(\Lambda x)U(\Lambda) = O(x) \ \rightarrow \ U^\dagger(\Lambda)O(0)U(\Lambda) = O(0) \ , \tag{2.17}$$

e quindi:

$$\boxed{\widetilde{\rho}(\Lambda q) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) = \widetilde{\rho}(q)} \ . \tag{2.18}$$

Possiamo scrivere $\widetilde{\rho}(q)$ come:

$$\widetilde{\rho}(q) = \rho(q^2)\theta(q^0) \ . \tag{2.19}$$

Se $q^2 > 0$ allora $\theta(q^0)$ è Lorentz invariante. Se $q^2 < 0$ allora $\theta(q^0)$ non è Lorentz invariante, ma in questo caso $\widetilde{\rho}(q) = 0$. Quindi $\widetilde{\rho}(q)$ è invariante di Lorentz.

Ridefiniamo la $\widetilde{\rho}(q)$ in modo tale che

$$\widetilde{\rho}(q) = \frac{\rho(q^2)}{(2\pi)^3}\theta(q^0) \ . \tag{2.20}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle 0|O(x)O(y)|0\rangle &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-\imath q(x-y)} \theta(q^0)\rho(q^2) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int_0^\infty d\mu^2 \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-\imath q(x-y)} \theta(q^0)\rho(q^2)\delta(q^2 - \mu^2) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int_0^\infty d\mu^2 \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-\imath q(x-y)} \theta(q^0)\rho(\mu^2)\delta(q^2 - \mu^2) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \imath \Delta^+(x - y; \mu^2) \ , \end{aligned} \tag{2.21}$$

dove

$$\boxed{\imath\Delta^+(x-y;\mu^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-\imath q(x-y)}\theta(q^0)\delta(q^2-\mu^2)} \tag{2.22}$$

è il **propagatore di una singola particella libera di massa** μ. Notiamo che per $x = y$ a causa della positività di ρ la funzione a due punti è divergente.

Consideriamo il valor medio del commutatore

$$\langle 0|[O(x), O(y)]|0\rangle = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \left[\imath\Delta^+(x-y;\mu^2) - \imath\Delta^+(y-x;\mu^2)\right] \ , \tag{2.23}$$

dove $[\imath\Delta^+(x-y;\mu^2) - \imath\Delta^+(y-x;\mu^2)]$ è proprio il commutatore dei campi liberi di particelle di massa μ che si annulla per $x-y$ di tipo spazio.

Consideriamo inoltre

$$\langle 0|\{O(x), O(y)\}|0\rangle = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \left[\imath\Delta^+(x-y;\mu^2) + \imath\Delta^+(y-x;\mu^2)\right] \ . \tag{2.24}$$

Poichè $\imath\Delta^+(x-y;\mu^2)$ è pari in $x-y$, quando $x-y$ è di tipo spazio questa quantità è $\neq 0$ per $x \sim y$.

Ora se $O(x), O(y)$ fossero campi quantizzati per anticommutatori troverei

$$\{O(x), O(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \ , \tag{2.25}$$

e quindi

$$\langle 0|\{O(x), O(y)\}|0\rangle_{x^0=y^0} = 0 \ , \tag{2.26}$$

ma questo è assurdo poichè ho dimostrato che $\langle 0|\{O(x), O(y)\}|0\rangle_{x\sim y} \neq 0$. Quindi $O(x)$ è un campo **bosonico** (caso particolare del teorema **spin-statistica**).

Supponiamo che esista uno stato ad una particella di massa m, $|\widetilde{p}\rangle$, tale che $\langle 0|O(0)|\widetilde{p}\rangle \neq 0$. In generale $\langle 0|O(0)|\widetilde{p}\rangle = F(p)$. Inoltre $U^\dagger(\Lambda)O(0)U(\Lambda) = O(0)$. Quindi

$$\langle 0|U^\dagger(\Lambda)O(0)U(\Lambda)|\widetilde{p}\rangle = \langle 0|O(0)U(\Lambda)|\widetilde{p}\rangle = \langle 0|O(0)|\Lambda\widetilde{p}\rangle = \langle 0|O(0)|\widetilde{p}\rangle = F(p) \ . \tag{2.27}$$

Facendo tutte le trasformazioni di Lorentz possibili otterrei tutti gli stati possibili della particella di massa m. Quindi poichè

$$F(p) = \langle 0|O(0)|\widetilde{p}\rangle = \langle 0|O(0)|\Lambda\widetilde{p}\rangle = \text{cost} \ , \tag{2.28}$$

l'invarianza di Lorentz impone

$$\langle 0|O(0)|\widetilde{p}\rangle = \frac{\sqrt{Z_0}}{(2\pi)^{3/2}} \ . \tag{2.29}$$

(Se avessi normalizzato a una δ avrei avuto $\frac{\sqrt{Z_0}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}}$).

Infatti $F(p) = F(\Lambda p)$ è solo una funzione di p^μ invariante di Lorentz e può essere quindi solo una funzione di $p^2 = m^2$, cioè una costante. Quindi il contributo dello stato a una particella sarà

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}_1(q) &= \int \frac{d^3p}{2\omega_p} |\langle 0|O(0)|\widetilde{p}\rangle|^2 \delta^4(q-p) = \frac{Z_0}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\omega_p}\delta^4(q-p) = \\
&= \frac{Z_0}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)\delta(p-q) = \frac{Z_0}{(2\pi)^3}\theta(q^0)\delta(q^2-m^2) \ ,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

allora

$$\boxed{\rho_1(q^2) = Z_0\delta(q^2 - m^2)}\ . \tag{2.31}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\langle 0|O(x)O(y)|0\rangle &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2)\imath\Delta^+(x-y;\mu^2) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + Z_0\imath\Delta^+(x-y;m^2) + \int_{4m^2}^\infty d\mu^2\sigma(\mu^2)\imath\Delta^+(x-y;\mu^2)\ ,\end{aligned} \tag{2.32}$$

dove

$$\rho(\mu^2) = Z_0\delta(\mu^2 - m^2) + \sigma(\mu^2)\ . \tag{2.33}$$

Se consideriamo il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto T-ordinato otteniamo

$$\boxed{\langle 0|\mathcal{T}[O(x)O(y)]|0\rangle = Z_0\imath\Delta_F[(x-y);m^2] + \int_{4m^2}^\infty d\mu^2\sigma(\mu^2)\imath\Delta_F(x-y;\mu^2)}\ , \tag{2.34}$$

con

$$\boxed{\langle 0|\mathcal{T}[O(x)O(y)]|0\rangle_{FT} = \frac{\imath Z_0}{q^2 - m^2 + \imath\epsilon} + \int_{4m^2}^\infty d\mu^2\sigma(\mu^2)\frac{\imath}{q^2 - \mu^2 + \imath\epsilon}}\ , \tag{2.35}$$

dove

$$\frac{\imath Z_0}{q^2 - m^2 + \imath\epsilon} \tag{2.36}$$

dà lo spettro di massa della teoria.

Chapter 3

Trasformazione di Fourier di una distribuzione e prodotti di operatori

Come abbiamo visto il prodotto di operatori di campo non è ben definito e anzi è singolare quando i campi sono valutati nello stesso punto. Per costruire operatori di campo ben definiti che possono essere moltiplicati gli uni con gli altri dobbiamo considerare i campi come **distribuzioni a valori operatoriali** che devono essere integrate con funzioni di prova al quadrato integrabile per ottenere operatori ben definiti. Ad esempio l'operatore

$$a_f^\dagger \equiv \int d^3p f(\vec{p}) a_p^\dagger \tag{3.1}$$

è ben definito e crea il pacchetto d'onda:

$$a_f^\dagger|0\rangle = \int d^3p f(\vec{p})|p\rangle \ . \tag{3.2}$$

Finché $f(\vec{p})$ è al quadrato integrabile allora la norma di questo stato sarà finita:

$$\langle 0|a_f a_f^\dagger|0\rangle = \int d^3p d^3p' f^*(p) f(p') \delta(p-p') = \int d^3p |f(p)|^2 < \infty \ . \tag{3.3}$$

Anche il campo $\phi(x)$ va interpretato come una distribuzione a valori operatoriali:

$$\phi_f = \int d^x f(\vec{x}) \phi(x^0, \vec{x}) = \phi_f(x^0) \ . \tag{3.4}$$

(Il campo è una media sullo spazio 3-d). Quindi ad esempio le relazioni di commutazione a tempi uguali:

$$[\dot{\phi}(x^0, \vec{x}), \phi(x^0, \vec{y})] = -\imath \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \ , \tag{3.5}$$

va interpretata come

$$[\dot{\phi}_f(x^0), \phi_g(x^0)] = -\imath \int f(\vec{x}) g(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) d^3x d^3y = -\imath \int f(\vec{x}) g(\vec{x}) d^3x \ , \tag{3.6}$$

che esiste.

Definiamo trasformata di Fourier di una distribuzione $D(x)$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{D}(k) f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} D(x) \widetilde{f}(x)} \ , \tag{3.7}$$

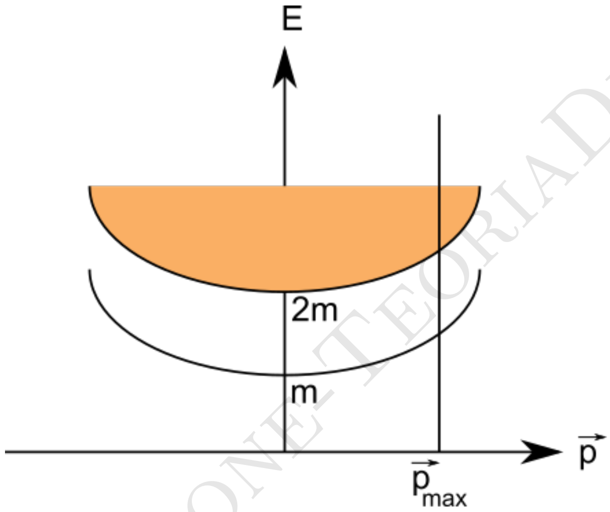
dove $\widetilde{f}(x)$ è l'antitrasformata di $f(k)$. Ora in generale la trasformata di Fourier di una funzione a supporto compatto non è a supporto compatto. Al contrario la trasformata di Fourier di una funzione a decrescita rapida è a decrescita rapida. Scegliamo come spazio delle funzioni di prova le **funzioni temperate**, funzioni che ti crescono più velocemente di ogni potenza inversa.

Riconsideriamo la funzione a due punti: $\langle 0|O(x)O(y)|0\rangle = \sum_n |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 e^{-\imath(x-y)P_n}$ e valutiamola come distribuzione:

$$\int f(\vec{x})g(\vec{y})\langle 0|O(x)O(y)|0\rangle d^3x d^3y = \sum_n |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 e^{-\imath E_n(x^0-y^0)}\widetilde{f}(\vec{P}_n)\widetilde{g}^*(\vec{P}_n) \ , \quad (3.8)$$

dove $\widetilde{f}(\vec{P}_n)$ e $\widetilde{g}^*(\vec{P}_n)$ vanno a zero rapidamente.

Come abbiamo visto lo spettro di energia della teoria è:



Fissiamo un impulso massimo $\vec{P}_{\max}$. Per $x^0 = y^0$ la somma è divergente perchè ho infinitistati possibili con $P_n = \vec{P}_{\max}$. Se invece di integrare in d^3x integro in d^4x ottengo

$$\sum_n |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \widetilde{f}(\vec{P}_n)\widetilde{g}^*(\vec{P}_n) \ , \quad (3.9)$$

e la somma può convergere.

Chapter 4

Matrice $\mathcal{S}$ e formule di riduzione

L'esperimento tipico in fisica delle particelle è quello in cui molte particelle partendo da una distanza macroscopicamente grande, interagiscono in una regione microscopicamente piccola, dopodiché i prodotti dell'interazione si allontanano di nuovo verso distanze macroscopicamente grandi. Gli stati fisici prima e dopo la collisione consistono di particelle che sono così lontane da essere praticamente non interagenti, così da poter essere descritti come prodotto diretto di stati a una particella. In questo tipo di esperimento quello che viene misurato è la distribuzione di probabilità o sezione d'urto per transizioni tra stati iniziali e finali di particelle distanti ed effettivamente non interagenti.

4.1 Stati IN e stati OUT

Uno stato consistente di molte particelle non-interagenti può essere considerato come uno che trasforma sotto il gruppo di Lorentz inomogeneo come un prodotto diretto di stati a 1-particella. Per etichettare gli stati a 1-particella usiamo i loro quadrimpulsi p^μ, componente z dello spin e un indice discreto n per il tipo di particella che include una specificazione della sua massa, spin, carica, etc.

La regola di trasformazione generale sarà:

$$U(\Lambda, a)\psi_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\dots} = e^{-\imath a_\mu(\Lambda p_1)^\mu - \imath a_\mu(\Lambda p_2)^\mu - \dots} \sum M^{(j_1)}_{\sigma_1\sigma_1'} \dots \psi_{\Lambda p_1,\sigma_1',n_1';\Lambda p_2,\sigma_2',n_2;\dots} \ . \tag{4.1}$$

In breve

$$\boxed{U(\Lambda, a)\psi_\alpha = e^{-\imath a_\mu(\Lambda P_{\text{tot}})^\mu}\psi_{\Lambda\alpha}} \ . \tag{4.2}$$

Con la condizione di normalizzazione covariante

$$\langle\psi_{\alpha'}|\psi_\alpha\rangle = (2\pi)^3 2E_\alpha \delta^3(\alpha - \alpha') \ . \tag{4.3}$$

Inoltre ψ_α è un autostato dell'energia:

$$H\psi_\alpha = E_\alpha\psi_\alpha \tag{4.4}$$

con E_α uguale alla somma delle energie a 1-particella

$$E_\alpha = p_1^0 + p_2^0 + \dots \tag{4.5}$$

Evidentemente la regola di trasformazione precedente si applica anche nei processi di scattering ai tempi $t \to \pm\infty$. Come abbiamo detto in un esperimento di scattering tipico cominciamo con particelle al tempo $t \to -\infty$ così lontane da essere non ancora interagenti e finiamo con particelle a $t \to +\infty$ così lontane da aver cessato di interagire. Abbiamo quindi non uno, ma due insiemi di stati che trasformano come una collezione di particelle libere.

Definiamo stati **in** ψ_α^{in} e stati **out** ψ_α^{out} come quegli stati che contengono le particelle descritte dell'indice α se le misure sono effettuate rispettivamente a $t \to -\infty$ o a $t \to +\infty$. Dobbiamo precisare che, poichè utilizziamo la rappresentazione di Heisenberg, i vettori di stato non cambiano col tempo cosicché $\psi_\alpha^{\text{in/out}}$ non sono i limiti per $t \to \pm\infty$ di un vettore di stato dipendente dal tempo $\psi(t)$.

Gli stati in e out formano separatamente una base completa nello spazio di Hilbert fisico. Questo implica che ogni stato fisico dello spazio di Hilbert può essere costruito come una sovrapposizione sia di stati in che di stati out. Se esistono stati legati stabili questi devono essere inclusi nell'insieme completo di stati. Lo stato di vuoto coincidere le due basi: $|0, \text{in}\rangle \equiv |0, \text{out}\rangle$. Anche gli stati a 1-particella coincidono: $|p, \text{in}\rangle \equiv |p, \text{out}\rangle$ poichè prendiamo come stati asintotici solo particelle stabili.

In accordo ai postulati della meccanica quantistica l'ampiezza:

$$\langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle \ , \tag{4.6}$$

determina la probabilità che uno stato **in**, $|\alpha, \text{in}\rangle$, a $t = -\infty$ sarà misurato come uno stato $|\beta, \text{out}\rangle$ al tempo $t = +\infty$.

La base in (out) è costruita applicando successivamente $(a^\dagger)^{\text{in}}$ (o $(a^\dagger)^{\text{in}}$) allo stato vuoto. Ovviamente

$$\begin{aligned} &[a_p^{\text{in}}, (a_{p'}^\dagger)^{\text{in}}] = \delta(\vec{p} - \vec{p'}) \ , \\ &[a_p^{\text{out}}, (a_{p'}^\dagger)^{\text{out}}] = \delta(\vec{p} - \vec{p'}) \ , \end{aligned} \tag{4.7}$$

mentre

$$[a_p^{\text{in}}, a_{p'}^{\text{out}}] = \ ? \ , \tag{4.8}$$

in generale è complicata.

L'invarianza di Lorentz ci dice che

$$\begin{aligned} &\langle \widetilde{q_1, ..., q_n}; \text{out} | \widetilde{p_1, ..., p_m}; \text{in} \rangle = F(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_m) = \\ &= \langle \widetilde{q_1, ..., q_n}; \text{out} | U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) | \widetilde{p_1, ..., p_m}; \text{in} \rangle = \\ &= \langle \widetilde{\Lambda q_1, ..., \Lambda q_n}; \text{out} | \widetilde{\Lambda p_1, ..., \Lambda p_m}; \text{in} \rangle = \\ &= F(\Lambda q_1, ..., \Lambda q_n; \Lambda p_1, ..., \Lambda p_m) \ , \end{aligned} \tag{4.9}$$

cioè F è funzione solo degli invarianti $p_i \cdot q_j$, p_i^2, q_i^2.

Possiamo associare a questi stati asintotici i campi asintoticamente ($t \to \pm\infty$) liberi $\phi^{\text{in/out}}(x)$ ch soddisfano l'equazione di Klein-Gordon(m è la massa fisica):

$$\begin{aligned} (\Box + m^2)\hat{\phi}_{\text{in}}(x) = 0 \ , \\ (\Box + m^2)\hat{\phi}_{\text{out}}(x) = 0 \ , \end{aligned} \tag{4.10}$$

che possono essere espansi nella base delle onde piane:

$$\boxed{\phi_{\text{in,out}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} 2\omega_p} \left[\widetilde{a_p}^{\text{in/out}} e^{-\imath px} + \widetilde{a_p}^{\dagger \ \text{in/out}} e^{\imath px} \right]} \ . \tag{4.11}$$

Per poter valutare quantità fisicamente rilevanti dobbiamo in qualche modo poter collegare l'operatore di campo $\phi(x)$ completo (interagente) ai campi asintotici. $\phi(x)$ è il **campo interpolante**. Vogliamo capire in che modo:

$$\lim_{x^0 \to \pm\infty} \phi(x) \to \phi^{\text{out/in}}(x) \ . \tag{4.12}$$

Innanzitutto un campo interagente soddisfa un'equazione di campo non lineare del tipo:

$$(\Box + m^2)\hat{\phi}(x) = \hat{j}(x) \ , \tag{4.13}$$

dove la sorgente $\hat{j}(x)$ è un operatore locale che dipende da $\hat{\phi}(x)$. Inoltre $\hat{j}(x)$ conterrà un termine che tiene conto dell'uso della massa fisica m invece che della massa nuda m_0. Tale termine è del tipo:

$$\hat{j}_{\delta m}(x) = (m^2 - m_0^2)\hat{\phi}^2(x) = -\delta m^2 \hat{\phi}^2(x) \ . \tag{4.14}$$

L'equazione differenziale può essere formalmente risolta usando le funzioni di Green, per cui avremo:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_{\text{in}}(x) + \int d^4x' \Delta_R(x - x') j(x') \ , \\ \phi(x) &= \phi_{\text{out}}(x) + \int d^4x' \Delta_A(x - x') j(x') \ , \end{aligned} \tag{4.15}$$

dove

$$\begin{aligned} \Delta_R(x - x') = 0 \quad \text{se} \quad x^0 < x'^0 \ , \\ \Delta_A(x - x') = 0 \quad \text{se} \quad x^0 > x'^0 \ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Se la sorgente agisse solo per un intervallo di tempo finito, cioè

$$j(x) = 0 \quad \text{per} \quad |t| > T \ , \tag{4.17}$$

potremmo dedurre immediatamente che

$$\begin{aligned} \lim_{x^0 \to -\infty} \phi(x) &= \phi_{\text{in}}(x) \ , \\ \lim_{x^0 \to +\infty} \phi(x) &= \phi_{\text{out}}(x) \ , \end{aligned} \tag{4.18}$$

che segue semplicemente dalle caratteristiche di causalità dei propagatori avanzati e ritardati. Ovviamente questa condizione non può essere soddisfatta in generale a causa dell'autointerazione (che in teoria delle perturbazioni è descritta in termini di emissione e riassorbimento di quanti virtuali del campo) che non può essere spenta, cosicché il contributo della secondo termine in (4.15) non si annullerà mai completamente.

Potremmo indebolire la condizione di limite e postulare una proporzionalità con l'operatore di campo asintotico del tipo:

$$\begin{aligned} \lim_{x^0 \to -\infty} \phi(x) &= \sqrt{Z}\phi_{\text{in}}(x) \ , \\ \lim_{x^0 \to +\infty} \phi(x) &= \sqrt{Z}\phi_{\text{out}}(x) \ , \end{aligned} \tag{4.19}$$

dove Z ha il significato di una **costante di rinormalizzazione**. In assenza di interazione avremmo banalmente $Z = 1$. Nel caso generale $\sqrt{Z}$ ha un semplice significato intuitivo:

essa descrive l'ampiezza di probabilità che l'operatore $\hat{\phi}(x)$ crei uno stato di singola particella quando applicato al vuoto. Infatti:

$$\langle 1|\phi(x)|0\rangle = \sqrt{Z}\langle 1|\phi_{\rm in}(x)|0\rangle \ . \tag{4.20}$$

Comunque a causa dell'interazione l'operatore $\phi(x)$ può anche creare stati a molte particelle complicati e quindi il valore della costante Z deve essere compreso fra 0 e 1:

$$0 \le Z < 1 \ . \tag{4.21}$$

Questo si può vedere facilmente usando una rappresentazione spettrale per la funzione di Weightman a due punti costruita con l'operatore $\phi(x)$. (Greiner 289).

Ancora non abbiamo però una descrizione soddisfacente del comportamento asintotico dell'operatore di campo. Infatti la condizione $Z \neq 1$ contraddice immediatamente le relazioni di commutazione a tempi uguali. Infatti poichè anche gli operatori $\phi_{\rm in}(x)$ soddisfano le relazioni di commutazione a tempi uguali ci aspettiamo che:

$$\lim_{x^0\to-\infty}[\phi(x^0,\vec{x}),\dot{\phi}(x^0,\vec{y})] = \imath\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = Z[\phi_{\rm in}(x^0,\vec{x}),\dot{\phi}_{\rm in}(x^0,\vec{y})] = Z\imath\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{4.22}$$

da cui $Z = 1$.

Per risolvere il dilemma dobbiamo definire cosa intendiamo per convergenza di una successione di operatori.

Se abbiamo una successione di operatori O_i diciamo che O_i converge in **norma** (convergenza forte) all'operatore O per $i \to \infty$ se $O_i\psi$ tende a $O\psi$ per ogni vettore ψ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, cioè:

$$\lim_{i\to\infty} ||O_i\psi - O\psi|| = 0 \quad \forall\ \psi \in \mathcal{H} \ , \tag{4.23}$$

dove nel nostro caso la norma $||...||$ è quella indotta dal prodotto scalare. Questa condizione risulta però troppo restrittiva e quindi definiamo una convergenza operatoriale **debole** nel senso che:

$$\lim_{i\to\infty}(\langle\chi|O_i|\psi\rangle - \langle\chi|O|\psi\rangle) = 0 \quad \forall\ \chi\ ,\psi \in \mathcal{H} \ . \tag{4.24}$$

In questo modo solo gli elementi di matrice della successione di operatori O_i devono tendere all'elemento di matrice dell'operatore O. Questa condizione risulta essere sufficiente per i nostri scopi poiché le osservabili fisiche sono descritte proprio da elementi di matrice (al quadrato). Matematicamente questa condizione è comunque più debole della convergenza in norma se consideriamo uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale. Infatti consideriamo:

$$\begin{aligned} ||(O_i - O)|\psi\rangle||^2 &= \langle\psi|(O_i^\dagger - O^\dagger)(O_i - O)|\psi\rangle = \\ &= \sum_\chi \langle\psi|O_i^\dagger - O^\dagger|\chi\rangle\langle\chi|O_i - O|\psi\rangle = \\ &= \sum_\chi |\langle\psi|O_i - O|\chi\rangle|^2 \ . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Se la successione O_i converge in norma all'operatore O la somma tende a 0 e quindi ciascun termine tende a zero poiché la somma e definita positiva. L'inverso non è vero in generale. Poiché la somma è infinita l'annullarsi dei singoli termini non implica che la somma stessa si annulli se la convergenza è non uniforme. Quindi la **condizione asintotica** per l'operatore di campo deve essere formulata nel senso di una **convergenza operatoriale debole**:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x^0 \to -\infty} \langle b|\phi(x)|a\rangle = \sqrt{Z}\langle b|\phi_{\text{in}}(x)|a\rangle \quad \forall\ |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}\ , \\
&\lim_{x^0 \to +\infty} \langle b|\phi(x)|a\rangle = \sqrt{Z}\langle b|\phi_{\text{out}}(x)|a\rangle \quad \forall\ |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}\ .
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

In questo modo non incontriamo la contraddizione precedente quando prendiamo il commutatore degli operatori di campo. Infatti se usiamo questo criterio di convergenza debole, i limiti $A_i \to A$ e $B_i \to B$ non implicano che il prodotto di operatori A_iB_i tende a AB e dunque il ragionamento precedente non è applicabile.

Rigorosamente anche questo limite è matematicamente non corretto poiché gli elementi di matrice sono funzioni oscillanti del tempo che non possiedono un limite ben definito.

Ricordiamo che nel caso dell'equazione di Klein-Gordon $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$ possiamo definire il **prodotto scalare** di due funzioni d'onda di Klein-Gordon $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ (che non è strettamente un prodotto scalare poiché non è definito positivo) come:

$$
\boxed{(\phi_1(x), \phi_2(x)) \equiv \imath \int d^3x \phi_1^*(x^0, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial_0} \phi_2^*(x^0, \vec{x})}\ . \tag{4.27}
$$

Ora se prendiamo un sistema di onde piane normalizzate:

$$
\begin{aligned}
f_p(x) &= \frac{e^{-\imath px}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}}\ , \\
f_p^*(x) &= \frac{e^{\imath px}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}}\ ,
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

queste formano un insieme ortonormale rispetto al prodotto scalare:

$$
\begin{aligned}
&(f_{p_1}, f_{p_2}) = \delta^3(\vec{p_1} - \vec{p_2})\ , \\
&(f_{p_1}^*, f_{p_2}) = 0\ , \\
&(f_{p_1}^*, f_{p_2}^*) = -\delta^3(\vec{p_1} - \vec{p_2})\ .
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Quindi proiettando i campi asintotici su f_p o f_p^* otteniamo:

$$
\begin{aligned}
(f_p, \phi_{\text{in}}) &= a_p^{\text{in}}\ , \\
-(f_p^*, \phi_{\text{in}}) &= a_p^{\dagger\text{in}}\ .
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

(Usando le equazioni del moto e un'integrazione per parti si può mostrare che $a_p^{\text{in}}, a_p^{\dagger\text{in}}$ sono indipendenti dal tempo).

Ora se prendiamo un pacchetto d'onda sovrapponendo solo onde a frequenza positiva avremo:

$$
\begin{aligned}
(f_p, \phi_{\text{in}}) &= a_f^{\text{in}}\ , \\
-(f_p^*, \phi_{\text{in}}) &= a_f^{\dagger\text{in}}\ .
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Avremo

$$
a_f^{\dagger\text{in}}|0\rangle = -\imath \int d^3x f(x^0, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial_0} \phi_{\text{in}}(x^0, \vec{x})|0\rangle\ . \tag{4.32}
$$

Ovviamente anche $f(x^0,\vec{x})$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon $(\Box + m^2)f(x) = 0$.

Se in generale prendiamo una sovrapposizione di soluzioni sia ad energia positiva che negativa avremo:

$$(f,\phi^{\rm in}) = \phi_f^{\rm in} \ . \tag{4.33}$$

Possiamo dimostrare che i campi asintotici proiettati su pacchetti d'onda soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono in realtà indipendenti dal tempo. Infatti

$$\begin{aligned}
\partial_0\phi_f^{\rm in} &= \imath\partial_0 \int d^3x f^*(x^0,\vec{x}) \overleftrightarrow{\partial_0} \phi_{\rm in}(x^0,\vec{x}) = \imath \int d^3x \left[f^*\partial_0^2\phi_{\rm in} - (\partial_0^2 f^*)\phi_{\rm in}\right] = \\
&= \imath \int d^3x \left[f^*(\partial_0^2\phi_{\rm in}) - (\nabla^2 - m^2)f^*\phi_{\rm in}\right] = \\
&= \imath \int d^3x \left[f^*(\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2)\phi_{\rm in}\right] = \\
&= \imath \int d^3x f^*(\Box + m^2)\phi_{\rm in} = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

dove il penultimo passaggio si ottiene integrando 2 volte per parti.

Il campo interpolante (interagente) proiettato sul pacchetto d'onda sarà:

$$(f,\phi) = \phi_f \ , \tag{4.35}$$

che in generale dipende dal tempo. Nonostante ciò gli elementi di matrice tendono asintoticamente ad un valore costante. Infatti una volta che abbiamo proiettato i campi sul pacchetto d'onda il limite:

$$\boxed{\lim_{x^0\to\pm\infty} \langle b|\phi_f(x^0)|a\rangle = \sqrt{Z}\langle b|\phi_f^{\rm out/in}|a\rangle} \ , \tag{4.36}$$

è ben definito.

4.2 Formula di riduzione

È facile vedere che la costante Z che appare nel limite asintotico è proprio uguale alla costante Z che abbiamo trovato nella rappresentazione spettrale della funzione a 2 punti di Weightman.

Consideriamo l'elemento di matrice di $\phi_f(x^0)$ tra il vuoto e lo stato ad 1 particella:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi_f(x^0)|\widetilde{p}\rangle &= \imath \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle 0|\phi(x)|\widetilde{p}\rangle = \\
&= \imath \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle 0|e^{\imath Px}\phi(0)e^{-\imath Px}|\widetilde{p}\rangle = \\
&= \imath \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} e^{-\imath px}\langle 0|\phi(0)|\widetilde{p}\rangle = \\
&= \frac{\imath\sqrt{Z'}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} e^{-\imath px} \ .
\end{aligned} \tag{4.37}$$

D'altra parte

$$\langle 0|\phi_f^{\rm in,out}|\widetilde{p}\rangle = \imath \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle 0|\phi^{\rm in,out}(x)|\widetilde{p}\rangle = \frac{\imath}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} e^{-\imath px} \ . \tag{4.38}$$

Ora il prodotto scalare

$$\int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} e^{-\imath px} \ , \tag{4.39}$$

è il prodotto scalare di 2 soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon e quindi è indipendente dal tempo. Allora:

$$\begin{aligned} \lim_{x^0\to\pm\infty} \langle 0|\phi_f(x^0)|\widetilde{p}\rangle &= \frac{\imath\sqrt{Z'}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} e^{-\imath px} = \sqrt{Z'}\langle 0|\phi_f^{\text{out,in}}|\widetilde{p}\rangle = \\ &= \sqrt{Z}\langle 0|\phi_f^{\text{out,in}}|\widetilde{p}\rangle \\ &\to \boxed{Z' = Z} \ . \end{aligned} \tag{4.40}$$

Consideriamo l'ampiezza

$$\langle q_1, q_2, \text{out}|p_1, p_2, \text{in}\rangle \ , \tag{4.41}$$

con $p_1, p_2 \neq q_1, q_2$. Evidentemente

$$\begin{aligned} &\langle q_1, q_2, \text{out}|p_1, p_2, \text{in}\rangle = \langle q_1, q_2, \text{out}|a_{p_1}^{\dagger\text{in}}|p_2, \text{in}\rangle = \\ &\langle q_1, q_2, \text{out}|a_{p_1}^{\dagger\text{out}}|p_2, \text{in}\rangle + \langle q_1, q_2, \text{out}|a_{p_1}^{\dagger\text{in}} - a_{p_1}^{\dagger\text{out}}|p_2, \text{in}\rangle \ . \end{aligned} \tag{4.42}$$

Ora

$$\begin{aligned} &\langle q_1, q_2, \text{out}|a_{p_1}^{\dagger\text{out}}|p_2, \text{in}\rangle = \langle 0, \text{out}|a_{q_1}^{\dagger\text{out}} a_{q_2}^{\text{out}} a_{p_1}^{\dagger\text{out}}|p_2, \text{in}\rangle = \\ &\langle q_1, \text{out}|p_2, \text{in}\rangle\delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) + \langle q_2, \text{out}|p_2, \text{in}\rangle\delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) = 0 \ , \end{aligned} \tag{4.43}$$

perchè $p_1 \neq q_1, q_2$.

Assumere che tutti gli impulsi delle particelle corrispondenti a stati in e out siano differenti equivale a tralasciare quei processi in cui qualcuna delle particelle "passa indisturbata" senza partecipare alla diffusione. Possiamo chiaramente anche includere questi termini facilmente poiché essi sono semplicemente gli elementi della matrice $\mathcal{S}$ con un numero ridotto di particelle.

Ora sappiamo che

$$\begin{aligned} a_p^{\text{in}} &= \imath \int d^3x f_p^*(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \phi^{\text{in}}(x) \ , \\ a_p^{\dagger\text{in}} &= -\imath \int d^3x f_p(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \phi^{\text{in}}(x) \ , \end{aligned} \tag{4.44}$$

dove $\phi^{\text{in}}(x)$ è reale. Quindi

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2, \text{out}|p_1, p_2, \text{in}\rangle &= \imath \int d^3x f_{p_1}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle q_1, q_2, \text{out}|\phi^{\text{out}}(x) - \phi^{\text{in}}(x)|p_2, \text{in}\rangle = \\ &= \imath \left(\lim_{x^0\to+\infty} - \lim_{x^0\to-\infty}\right) \frac{1}{\sqrt{Z}} \int d^3x f_{p_1}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle = \\ &= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[f_{p_1}(x) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle\right] \ . \end{aligned} \tag{4.45}$$

Possiamo prendere come campo interpolante un campo qualsiasi avendo cura di cambiare opportunamente la costante Z.

Procedendo ulteriormente avremo:

$$
\begin{aligned}
&\langle q_1, q_2, \text{out}|p_1, p_2, \text{in}\rangle = \\
&= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[f_{p_1}(x)\partial_0^2 \langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle - \left(\partial_0^2 f_{p_1}(x)\right) \langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle \right] = \\
&= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[f_{p_1}(x)\partial_0^2 \langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle + (m^2 - \triangle) f_{p_1}(x) \langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle \right] = \\
&= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4x f_{p_1}(x)(\Box + m^2)\langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle = \\
&= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4x f_{p_1}(x)\hat{K}_x \langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle \ ,
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

dove $\hat{K}_x = \Box_x + m^2$ (con m la massa fisica) e abbiamo integrato $(m^2 - \triangle)$ per parti su d^3x.

Ora valutiamo $\langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle &= \langle q_2, \text{out}|a_{q_1}^{\text{out}}\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle = \\
&= \langle q_2, \text{out}|\phi(x)a_{q_1}^{\text{in}}|p_2, \text{in}\rangle + \langle q_2, \text{out}|a_{q_1}^{\text{out}}\phi(x) - \phi(x)a_{q_1}^{\text{in}}|p_2, \text{in}\rangle \ .
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Ora

$$
\begin{aligned}
\langle q_2, \text{out}|\phi(x)a_{q_1}^{\text{in}}|p_2, \text{in}\rangle &= \langle q_2, \text{out}|\phi(x)a_{q_1}^{\text{in}}a_{p_2}^{\dagger\text{in}}|0, \text{in}\rangle = \\
&= \langle q_2, \text{out}|\phi(x)[a_{q_1}^{\text{in}}, a_{p_2}^{\dagger\text{in}}] + a_{p_2}^{\dagger\text{in}}a_{q_1}^{\text{in}}|0, \text{in}\rangle = \\
&= \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_2)\langle q_2, \text{out}|\phi(x)|0, \text{in}\rangle = 0 \ ,
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

perchè $q_1 \neq p_2$. Quindi:

$$
\begin{aligned}
&\langle q_1, q_2, \text{out}|\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle = \langle q_2, \text{out}|a_{q_1}^{\text{out}}\phi(x) - \phi(x)a_{q_1}^{\text{in}}|p_2, \text{in}\rangle = \\
&= \imath \int d^3y f_{q_1}^*(y) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle q_2, \text{out}|\phi^{\text{out}}(y)\phi(x) - \phi(x)\phi^{\text{in}}(y)|p_2, \text{in}\rangle = \\
&= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \left[\lim_{y_0 \to +\infty} \int d^3y f_{q_1}^*(y) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle q_2, \text{out}|\phi(y)\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle - \right. \\
&\left. - \lim_{y_0 \to -\infty} \int d^3y f_{q_1}^*(y) \overleftrightarrow{\partial_0} \langle q_2, \text{out}|\phi(x)\phi(y)|p_2, \text{in}\rangle \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z}} \left[\lim_{y_0 \to +\infty} \langle q_2, \text{out}|\phi_{f_{q_1}}(y^0)\phi(x)|p_2, \text{in}\rangle - \lim_{y_0 \to -\infty} \langle q_2, \text{out}|\phi(x)\phi_{f_{q_1}}(y^0)|p_2, \text{in}\rangle \right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{Z}} \left[\lim_{y_0 \to +\infty} \langle q_2, \text{out}|\mathcal{T}\left[\phi_{f_{q_1}}(y^0)\phi(x)\right]|p_2, \text{in}\rangle - \lim_{y_0 \to -\infty} \langle q_2, \text{out}|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi_{f_{q_1}}(y^0)\right]|p_2, \text{in}\rangle \right]
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

e ancora

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4y \partial_{y_0} \left(f_{q_1}^*(y) \overleftrightarrow{\partial_{y_0}} \langle q_2, \text{out}|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(y)\right]|p_2, \text{in}\rangle \right) = \\
&= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4y \left[f_{q_1}^*(y)\partial_{y_0}^2 \langle q_2, \text{out}|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(y)\right]|p_2, \text{in}\rangle - \left(\partial_{y_0}^2 f_{q_1}^*(y)\right) \langle q_2, \text{out}|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(y)\right]|p_2, \text{in}\rangle \right] \\
&= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4y f_{q_1}^*(y)\hat{K}_y \langle q_2, \text{out}|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(y)\right]|p_2, \text{in}\rangle \ .
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned}
\langle q_1, q_2, \mathrm{out}|p_1, p_2, \mathrm{in}\rangle &= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4x f_{p_1}(x) \hat{K}_x \langle q_1, q_2, \mathrm{out}|\phi(x)|p_2, \mathrm{in}\rangle \ , \\
\langle q_1, q_2, \mathrm{out}|\phi(x)|p_2, \mathrm{in}\rangle &= \frac{\imath}{\sqrt{Z}} \int d^4y f^*_{q_1}(y) \hat{K}_y \langle q_2, \mathrm{out}|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(y)\right]|p_2, \mathrm{in}\rangle \ , \\
\to \langle q_1, q_2, \mathrm{out}|p_1, p_2, \mathrm{in}\rangle &= \left(\frac{\imath}{\sqrt{Z}}\right)^2 \int d^4x f_{p_1}(x) \hat{K}_x \int d^4y f^*_{q_1}(y) \hat{K}_y \langle q_2, \mathrm{out}|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(y)\right]|p_2, \mathrm{in}\rangle \ .
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Continuando a ridurre otteniamo la formula finale

$$\begin{aligned}
&\langle q_1, q_2, \mathrm{out}|p_1, p_2, \mathrm{in}\rangle = \\
&\left(\frac{\imath}{\sqrt{Z}}\right)^4 \int d^4x d^4y d^4z d^4w f_{p_1}(x) f_{p_2}(y) f^*_{q_1}(z) f^*_{q_2}(w) \hat{K}_x \hat{K}_y \hat{K}_z \hat{K}_w \langle 0|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(w)\right]|0\rangle \ .
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Consideriamo la funzione di Weightman a 2 punti

$$\langle 0|A(x)B(0)|0\rangle = \Delta_{AB}(x) \ , \tag{4.53}$$

con A e B operatori locali scalari. Poiché

$$\begin{aligned}
A(\Lambda x) &= U(\Lambda)A(x)U^\dagger(\Lambda) \ , \\
B(0) &= U(\Lambda)B(0)U^\dagger(\Lambda) \ , \\
U^\dagger(\Lambda)B(0) &= B(0)U^\dagger(\Lambda) \ ,
\end{aligned} \tag{4.54}$$

allora:

$$\langle 0|A(\Lambda x)B(0)|0\rangle = \Delta_{AB}(\Lambda x) = \langle 0|U(\Lambda)A(x)U^\dagger(\Lambda)B(0)|0\rangle = \langle 0|A(x)B(0)|0\rangle = \Delta_{AB}(x) \ , \tag{4.55}$$

e quindi **le funzioni di Weightman sono invarianti di Lorentz**. Se prendiamo una trasformazione di Lorentz infinitesima avremo:

$$\begin{aligned}
&\Lambda x = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \qquad \epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu} \ , \\
&\to \Delta_{AB}(x^\mu + \epsilon^{\mu\nu}x_\nu) = \Delta_{AB}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Delta_{AB}(x)\epsilon^{\mu\nu}x_\nu = \Delta_{AB}(x) \ , \\
&\to \left(\partial_\mu \Delta_{AB}(x)\right)\epsilon^{\mu\nu}x_\nu = 0 \ .
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Poiché $\epsilon^{\mu\nu}$ è antisimmetrico avremo

$$\left(x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu\right)\Delta_{AB}(x)\epsilon^{\mu\nu} = 0 \ , \tag{4.57}$$

e poiché $\epsilon^{\mu\nu}$ è arbitrario e i 6 parametri della trasformazione sono indipendenti avremo:

$$\boxed{\left(x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu\right)\Delta_{AB}(x) = 0} \ , \tag{4.58}$$

condizione che assicura l'invarianza di Lorentz di $\Delta_{AB}(x)$.

Definiamo il $\mathcal{T}$-prodotto come

$$\langle 0|\mathcal{T}\left[A(x)B(0)\right]|0\rangle = \theta(x^0)\Delta_{AB}(x) - \theta(-x^0)\Delta_{AB}(x) \ . \tag{4.59}$$

Dalla condizione di invarianza della funzione di Weightman:

$$(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\, \Delta_{AB}(x) = 0 \ , \tag{4.60}$$

vediamo che c'è un problema quando $\mu = 0$ oppure $\nu = 0$. Infatti:

$$\begin{aligned}
&(x_0\partial_i - x_i\partial_0)\, \langle 0|\mathcal{T}\,[A(x)B(0)]\,|0\rangle = (x_0\partial_i - x_i\partial_0)\left[\theta(x^0)\Delta_{AB}(x) - \theta(-x^0)\Delta_{AB}(x)\right] = \\
&= x_0\theta(x^0)\partial_i\Delta_{AB}(x) + x_0\theta(-x^0)\partial_i\Delta_{BA}(x) - x_i\delta(x^0)\Delta_{AB}(x) - x_i\theta(x^0)\partial_0\Delta_{AB}(x) - \\
&- x_i\delta(-x^0)\Delta_{BA}(x) - x_i\theta(-x^0)\partial_0\Delta_{BA}(x) = -x_i\delta(x^0)\Delta_{AB}(x) + x_i\delta(x^0)\Delta_{BA}(x) = \\
&= x_i\delta(x^0)\,[\Delta_{BA}(x) - \Delta_{AB}(x)] \ ,
\end{aligned} \tag{4.61}$$

allora:

$$\boxed{(x_0\partial_i - x_i\partial_0)\, \langle 0|\mathcal{T}\,[A(x)B(0)]\,|0\rangle = -x_i\delta(x^0)\langle 0|\,[A(x), B(0)]\,|0\rangle} \ . \tag{4.62}$$

Ora

$$\delta(x^0)\langle 0|\,[A(x), B(0)]\,|0\rangle = \delta(x^0)\langle 0|\left[A(0,\vec{x}), B(0,\vec{0})\right]|0\rangle \ , \tag{4.63}$$

ma il commutatore a tempi uguali

$$\left[A(0,\vec{x}), B(0,\vec{0})\right] = 0 \ , \tag{4.64}$$

perchè la separazione è di tipo spazio.

Quando $\vec{x} \to 0$, il commutatore non può comportarsi come una delta di Dirac o una derivata di ordine arbitrario della delta. (In generale non possiamo sapere se è un c-numero o un operatore. Assumeremo che sia un c-numero). La possibilità più generale è che sia una combinazione lineare arbitraria di delta e delle sue derivate.

Quindi ad esempio:

$$\langle 0|\left[A(0,\vec{x}), B(0,\vec{0})\right]|0\rangle = c_0\delta(\vec{x}) \ , \tag{4.65}$$

ma

$$-x^i\delta(x^0)c_0\delta(\vec{x}) = 0 \ . \tag{4.66}$$

Oppure

$$\langle 0|\left[A(0,\vec{x}), B(0,\vec{0})\right]|0\rangle = c_1 \triangle \delta(\vec{x}) \ . \tag{4.67}$$

(Non ci può essere $\partial_i\delta(\vec{x})$ perchè deve essere scalare). Dall'identità

$$\begin{aligned}
x^i\delta(\vec{x}) &= 0 \ , \\
\partial_j\left(x^i\delta(\vec{x})\right) &= \delta^{ij}\delta(\vec{x}) + x^i\partial^j\delta(\vec{x}) \ , \\
\partial_j\partial_j\left(x^i\delta(\vec{x})\right) &= \partial_i\delta(\vec{x}) + \partial^i\delta(\vec{x}) + x^i \triangle \delta(\vec{x}) = 0 \ , \\
\to 2\partial_i\delta(\vec{x}) &= -x^i \triangle \delta(\vec{x}) \ ,
\end{aligned} \tag{4.68}$$

e quindi

$$\boxed{-x^i\delta(x^0)c_1 \triangle \delta(\vec{x}) = 2\delta(x^0)c_1\partial^i\delta(\vec{x})} \ , \tag{4.69}$$

è diverso da zero. In questo modo il $\mathcal{T}$-prodotto non soddisfa la condizione di covarianza relativistica. Questo viene dal fatto che il prodotto di due distribuzioni singolari può non essere ben definito.

Diamo una definizione di $\mathcal{T}$-prodotto che soddisfa le giuste condizioni di invarianza:

$$\langle 0|\mathcal{T}^* \left[A(x)B(0)\right]|0\rangle = \langle 0|\mathcal{T}\left[A(x)B(0)\right]|0\rangle + \alpha\delta'(x^0)\delta(\vec{x}) \ , \tag{4.70}$$

(scelgo una distribuzione che è singolare dove $\mathcal{T}$ è singolare). Applicando

$$\begin{aligned}(x_0\partial_i - x_i\partial_0)\langle 0|\mathcal{T}^* \left[A(x)B(0)\right]|0\rangle &= 2c_1\delta(x^0)\partial^i\delta(\vec{x}) + \alpha x^0\delta'(x^0)\partial^i\delta(\vec{x}) = \\ &= 2c_1\delta(x^0)\partial^i\delta(\vec{x}) - \alpha\delta(x^0)\partial^i\delta(\vec{x}) = \\ &= (2c_1 - \alpha)\delta(x^0)\partial^i\delta(\vec{x}) \ ,\end{aligned} \tag{4.71}$$

avendo usato:

$$x^0\delta(x^0) = 0 \ \rightarrow \ \delta(x^0) + x^0\delta'(x^0) = 0 \ \rightarrow \ x^0\delta'(x^0) = -\delta(x^0) \ . \tag{4.72}$$

Scegliendo $\alpha = 2c_1$ otteniamo zero e quindi un oggetto che soddisfa la condizione di invarianza relativistica.

Occorre verificare che usando $\mathcal{T}^*$ la fisica non cambia. Questo si può verificare ad esempio nella rappresentazione spettrale:

$$\langle 0|\mathcal{T}^* \left[A(x)B(0)\right]|0\rangle_{\mathrm{FT}} = \frac{\imath Z}{q^2 - m^2 + \imath\epsilon} + \int \cdots + \left[\alpha\delta'(x^0)\delta(\vec{x})\right]_{\mathrm{FT}} \ , \tag{4.73}$$

e quindi il polo rimane in $q^2 = m^2$.

Anche nelle formule di riduzione $\mathcal{T}^*$ non cambia il risultato fisico poichè differisce da $\mathcal{T}$ solo per un termine che ha supporto nel solo punto $t = 0$, mentre le formule sono sensibili solo ai tempi $t \to \pm\infty$. In effetti si potrebbe regolarizzare direttamente la $\theta(x^0)$ in modo da non avere singolarità.

Chapter 5

Integrale funzionale

Definiamo il funzionale generatore delle funzioni di Green come:

$$\boxed{Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath)^n}{n!} \int d^4x_1 ... d^4x_n \langle 0| \mathcal{T} \left[\phi(x_1)...\phi(x_n) \right] |0\rangle J(x_1)...J(x_n)} \ . \tag{5.1}$$

Per estrarre le funzioni di Green dal funzionale generatore dobbiamo ricorrere alla derivata funzionale.

In generale dato un funzionale $F[Q]$ definiamo la derivata funzionale di F come:

$$\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(x)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[F[Q(x') + \epsilon\delta(x - x')] - F[Q(x')] \right] \ . \tag{5.2}$$

Ad esempio se $F[Q] = \int dx' Q(x') f(x')$ allora $F[Q + \epsilon\delta]$ sarà dato da:

$$F[Q + \epsilon\delta] = \int dx' \left(Q(x') + \epsilon\delta(x - x') \right) f(x') = F[Q] + \epsilon f(x) \ , \tag{5.3}$$

allora

$$\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(x)} = f(x) \ . \tag{5.4}$$

Se

$$\begin{aligned} F[Q] &= \int dx' Q(x') \delta(x' - x) = Q(x) \ , \\ F[Q + \epsilon\delta] &= \int dx' Q(x') \delta(x' - x) + \epsilon\delta(y - x') \delta(x' - x) = F[Q] + \epsilon\delta(y - x) \ , \\ \frac{\delta F[Q]}{\delta Q(y)} &= \frac{\delta Q(x)}{\delta Q(y)} = \delta(x - y) \ , \end{aligned} \tag{5.5}$$

e ancora se

$$\begin{aligned} F[Q] &= e^{\int Q(x) f(x) dx} \ , \\ F[Q + \epsilon\delta] &= e^{\int Q(x) f(x) + \epsilon\delta(x - y) f(x) dx} = F[Q] e^{\epsilon f(y)} \ , \\ \to \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[F[Q + \epsilon\delta] - F[Q] \right] &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} F[Q] \left(e^{\epsilon f(y)} - 1 \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} F[Q] \left(\epsilon f(y) + O(\epsilon^2) \right) = f(y) F[Q] \ , \\ \to \frac{\delta F[Q]}{\delta Q(y)} &= f(y) e^{\int Q(x) f(x) dx} \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Quindi con questa definizione di derivata funzionale la funzione di Green a n punti può essere ricavata del funzionale generatore come la derivata funzionale n-esima:

$$\boxed{\langle 0|\mathcal{T}\left[\phi(x_1)...\phi(x_n)\right]|0\rangle = (-\imath)^n \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_n)...\delta J(x_1)}\right|_{J=0}} \ . \tag{5.7}$$

Facciamo un altro esempio:

$$\begin{aligned}
F[J] &= e^{\int dxdy J(x)A(x,y)J(y)} \ , \\
F[J+\epsilon\delta] &= \exp\left[\int dxdy(J(x)+\epsilon\delta(x-z))A(x,y)(J(y)+\epsilon\delta(y-z))\right] = \\
&= F[J]\exp\left[\int dxdy\epsilon\delta(x-z)A(x,y)J(y)\right]\exp\left[\int dxdy J(x)A(x,y)\epsilon\delta(y-z)+O(\epsilon^2)\right] \ , \\
\rightarrow \ \frac{\delta F[J]}{\delta J(z)} &= F[J]\lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{\epsilon}\left[\epsilon\int dy A(z,y)J(y)+\epsilon\int dx J(x)A(x,z)\right] = \\
&= F[J]\left[\int dy A(z,y)J(y)+\int dx J(x)A(x,z)\right] \ .
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Se $A(x,y) = A(y,x)$ è simmetrica allora

$$\frac{\delta F[J]}{\delta J(z)} = 2\left[\int dy A(z,y)J(y)\right] e^{\int JAJ} \ . \tag{5.9}$$

Notiamo che il funzional generatore è definito solo per le funzioni di Green che sono simmetriche in $x_1, ..., x_n$, ma non per le funzioni di Weightmann.

Il funzionale generatore può essere scritto sotto forma di integrale funzionale:

$$Z[J] = \int [\delta\phi] e^{\imath S(\phi)+\imath\int d^4x J(x)\phi(x)} \ . \tag{5.10}$$

Questa espressione ha carattere puramente formale e occorre definirla in qualche modo per poterla calcolare.

Consideriamo la funzione di Green a 2 punti $\langle 0|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(y)\right]|0\rangle$ e prendiamo $x^0 > y^0$. Inserendo un insieme completo di stati asintotici otteniamo:

$$\begin{aligned}
\langle 0|\mathcal{T}\left[\phi(x)\phi(y)\right]|0\rangle &= \sum_n \langle 0|e^{\imath Hx^0}\phi(0,\vec{x})e^{-\imath Hy^0}|n\rangle\langle n|e^{\imath Hx^0}\phi(0,\vec{y})e^{-\imath Hy^0}|0\rangle = \\
&= \sum_n \langle 0|\phi(0,\vec{x})|n\rangle\langle n|\phi(0,\vec{y})|0\rangle e^{-\imath E_n(x^0-y^0)} \ .
\end{aligned} \tag{5.11}$$

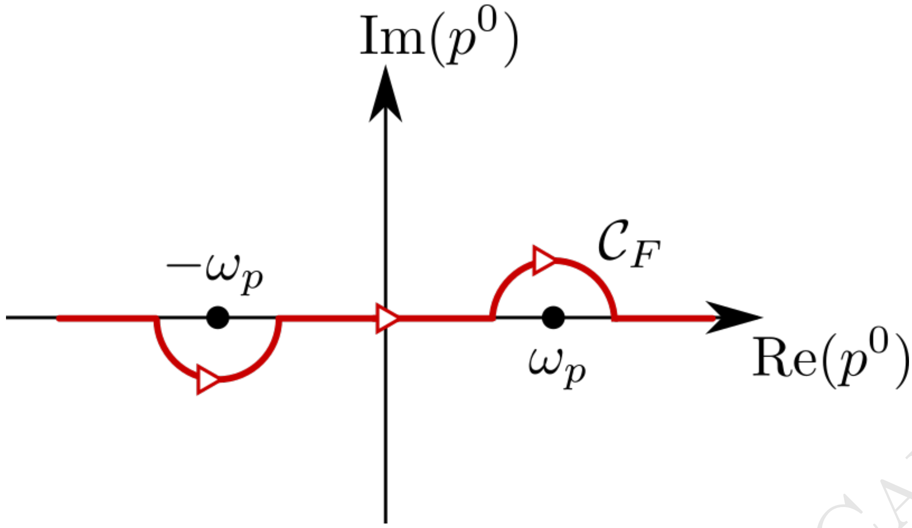
Prolunghiamo analiticamente questa funzione nel piano della variabile complessa temporale al modo seguente:

$$x^0 \ \rightarrow \ x^0 e^{\imath\theta} \ , \tag{5.12}$$

cosicchè

$$e^{-\imath E_n(x^0-y^0)} \ \rightarrow \ \exp\left[-\imath E_n(x^0-y^0)e^{\imath\theta}\right] = e^{-\imath E_n(x^0-y^0)\cos\theta} e^{E_n(x^0-y^0)\sin\theta} \ . \tag{5.13}$$

Ora se $\sin\theta > 0$ la somma su n diverge. Ma se $\sin\theta < 0$ l'esponenziale decrescente aggiunge un fattore di convergenza.



Consideriamo il propagatore della teoria libera:

$$\imath\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) = \frac{\imath}{(2\pi)^4}\int_{C_F}\frac{e^{\imath p(x-y)}}{p^2-m^2}d^4p \ . \tag{5.14}$$

Se prolunghiamo analiticamente nel piano complesso della variabile x^0:

$$x^0 = x_4 e^{-\imath\theta} \quad \text{con} \quad x_4 \text{ reale} \ , \tag{5.15}$$

otteniamo una funzione $\imath\Delta_\theta(x^0)$ che si riduce a $\imath\Delta_{\mathrm{F}}(x^0)$ per $\theta \to 0$. Se sostituiamo banalmente $x^0 = x_4 e^{-\imath\theta}$ nell'espressione del propagatore otteniamo un integrali divergente non ben definito. Per definire opportunamente il prolungamento analitico dobbiamo modificare anche il cammino di integrazione ruotandolo in senso opposto. In sostanza contemporaneamente alla sostituzione $x^0 = x_4 e^{-\imath\theta}$ dobbiamo effettuare la sostituzione $p^0 = p_4 e^{\imath\theta}$ con p_4 reale. Quindi avremo

$$\imath\Delta_\theta(x^0) = \frac{\imath}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\imath p_4 x_4}}{p^2 e^{\imath 2\theta}-\omega_p^2}e^{\imath\theta}dp_4 \ . \tag{5.16}$$

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ avremo

$$\boxed{\Delta_E(x_E) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p_E\frac{e^{\imath p_E x_E}}{p_E^2+m^2}} \ , \tag{5.17}$$

dove

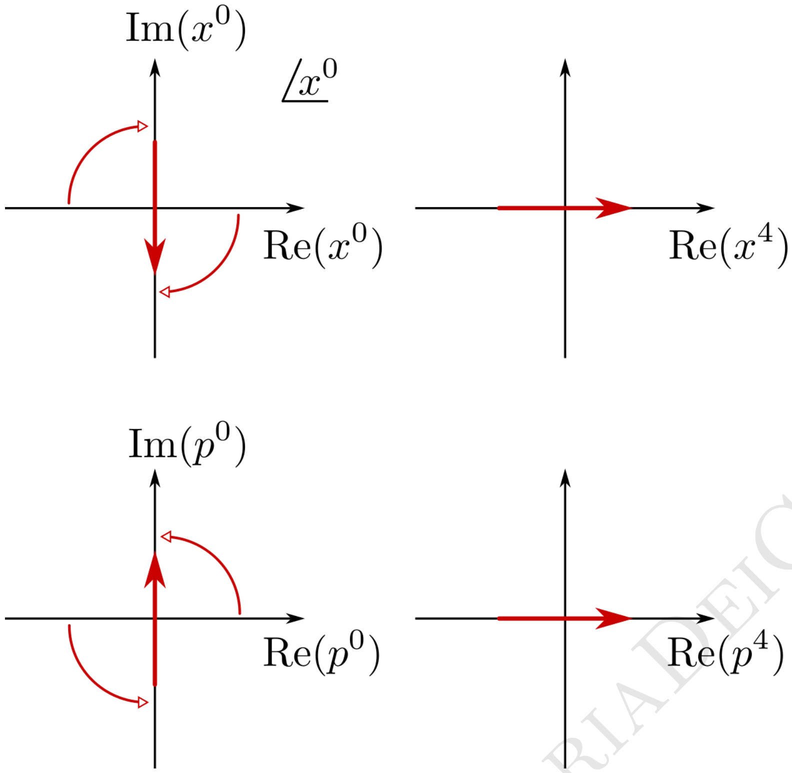
$$\begin{aligned} p_E x_E &= p_4x_4 + \vec{p}\cdot\vec{x} = (-\imath p^0)(\imath x^0) + \vec{p}\cdot\vec{x} = p^0x^0 + \vec{p}\cdot\vec{x} \neq p\cdot x \ , \\ p_E &= (p_4,\vec{p}) = (-\imath p^0,\vec{p}) \ , \\ p_E^2 &= p_4^2 + \vec{p}^2 = -p_0^2 + \vec{p}^2 - p^2 \ . \end{aligned} \tag{5.18}$$

Prescrizione per la rotazione di Wick:

$$\boxed{\begin{aligned} x_4 &= \imath x^0 \ , \\ p_4 &= -\imath p^0 \end{aligned}} \tag{5.19}$$

Consideriamo ora il funzionale generatore

$$Z[J] = \int[\delta\phi]\exp\left[\imath\mathcal{S}(\phi) + \imath\int d^4x J(x)\phi(x)\right] \ , \tag{5.20}$$



e prolunghiamolo analiticamente nell'euclideo. L'azione:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial^0\phi\partial^0\phi - \vec{\partial}\phi\cdot\vec{\partial}\phi - m_0^2\phi^2 - g_0\phi^4\right) \;, \tag{5.21}$$

va sostituita con

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial(-\imath x^0)} = \imath\frac{\partial}{\partial x^4} \;\rightarrow\; \partial^0\phi\partial^0\phi = -\partial^4\phi\partial^4\phi \;, \tag{5.22}$$

quindi

$$\frac{\imath}{2}\int d^4x_E\left(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m_0^2\phi^2 + g_0\phi^4\right) = \imath\mathcal{S}_E \;, \tag{5.23}$$

e

$$e^{\imath\mathcal{S}} \;\rightarrow\; e^{-\mathcal{S}_E} \;, \tag{5.24}$$

allora

$$\boxed{Z_E[J] = \int[\delta\phi]\exp\left[-\mathcal{S}_E(\phi) + \int d^4x_E J(x)\phi(x)\right]} \;, \tag{5.25}$$

ossia

$$Z_E[J] = \int[\delta\phi]\exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x_E\left(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m_0^2\phi^2 + g_0\phi^4\right) + \int d^4x_E J(x)\phi(x)\right] \;. \tag{5.26}$$

Dobbiamo ancora definire l'integrale funzionale, ovvero dare una procedura per calcolarlo. Lo definiamo come limite di un integrale finito dimensionale. Supponiamo di sostituire allo spazio-tempo un reticolo finito di passo a. I punti del reticolo saranno identificati con

$$x^\mu = n^\mu a = a(n_1, n_2, n_3, n_4) \;. \tag{5.27}$$

Alla derivata sostituiamo la loro forma discretizzata:

$$\partial_\mu = \frac{\phi(x^\mu + a\hat{n}^\mu) - \phi(x^\mu - a\hat{n}^\mu)}{2a} \ , \tag{5.28}$$

dove $\hat{n}^\mu$ è la direzione di x^μ. Quindi

$$Z_E[J] = \lim_{V_4 \to \infty} \lim_{a \to 0} Z_E^{(a,V_4)}[J] \ , \tag{5.29}$$

dove

$$Z_E^{(a,V_4)}[J] = \int \prod_{n \in V_4} d\phi(x^\mu) \exp\left[-a^4 \sum_n \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + g_0 \phi^4 - J\phi\right)\right] \ . \tag{5.30}$$

Questo integrale esiste se $g_0 > 0$. Il problema è dimostrare che esistono i due limiti $a \to 0$ e $V_4 \to \infty$. Il limite $V_4 \to \infty$ è sostanzialmente un limite termodinamico ed è sotto controllo. Il limite difficile è $a \to 0$. Notiamo subito che poichè $-\frac{\pi}{a} \geq p \leq \frac{\pi}{a}$, allora a^{-1} è un cut-off sugli impulsi.

Quello che ci interessa è che le funzioni di Green siano ben definite (non divergenti) nel limite $a \to 0$. Questo è possibile se la teoria è **rinormalizzabile**. Ovvero se consideriamo m_0 e g_0 come funzioni del passo reticolare a e nel limite $a \to 0$ riusciamo a scegliere queste funzioni cosìcche le funzione di Green sono finite in questo limite allora la teoria di campo sarà rinormalizzabile.

Supponiamo di aver calcolato un osservabile $\phi_1(g_0, m_0, a)$. Assegnamo a ϕ_1 il valore sperimentale:

$$\phi_1^{\exp} = \phi_1(m_0, g_0, a) \ . \tag{5.31}$$

Questa equazione stabilisce un legame fra m_0 e g_0. Calcolando un'altra osservabile $\phi_2(m_0, g_0, a)$ ed uguagliandolo ad un secondo valore sperimentale

$$\phi_2^{\exp} = \phi_2(m_0, g_0, a) \ , \tag{5.32}$$

potremo ricavare m_0 e g_0 come funzioni di

$$\begin{aligned} m_0 &= m_0(\phi_1^{\exp}, \phi_2^{\exp}, a) \ , \\ g_0 &= g_0(\phi_1^{\exp}, \phi_2^{\exp}, a) \ . \end{aligned} \tag{5.33}$$

A questo punto potremmo predire:

$$\phi_3^{\exp} = \phi_3(m_0, g_0, a) = F_3(\phi_1^{\exp}, \phi_1^{\exp}, a) \ . \tag{5.34}$$

Il limite si fa per $a \to 0$ a $\phi_1^{\exp}$ e $\phi_2^{\exp}$ fissati e non a m_0 e g_0 fissati.

Come abbiamo visto le funzioni di Green possono essere ottenute come le derivate funzionali del funzionale generatore:

$$(-\imath)^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_n) ... \delta J(x_1)} Z[J] \bigg|_{J=0} = \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1) ... \phi(x_n)] | 0 \rangle \ . \tag{5.35}$$

Nel caso libero è semplice valutare esplicitamente il funzionale generatore:

$$Z[J] = \int [\delta\phi] \exp\left[\imath \mathcal{S}(\phi) + \imath \int J\phi\right] \ , \tag{5.36}$$

dove

$$\mathcal{S}(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 \ . \tag{5.37}$$

Valutiamo $Z[J]$ nell'euclideo e poi prolunghiamo analiticamente il risultato in $\mathcal{H}_4$:

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \int [\delta\phi] \exp\left[-\mathcal{S}_E(\phi) + \int d^4x_E J(x_E)\phi(x_E)\right] \ , \\ \mathcal{S}_E(\phi) &= \int \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 \ d^4x_E \ . \end{aligned} \tag{5.38}$$

Valutiamo l'argomento dell'esponenziale:

$$\begin{aligned} &-\int \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 \ d^4x_E - J\phi = \int \frac{1}{2}\phi\partial_\mu\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 \ d^4x_E + J\phi = \\ &= -\int d^4x_E \frac{1}{2}\phi\hat{K}\phi - J\phi = -\int d^4x_E \frac{1}{2}\left(\phi + \hat{K}^{-1}J\right)\hat{K}\left(\phi + \hat{K}^{-1}J\right) - \frac{1}{2}J\hat{K}^{-1}J \ , \end{aligned} \tag{5.39}$$

dove $K = -\partial_\mu\partial_\mu + m_0^2 = -\left(\partial_t^2 + \nabla^2\right) + m_0^2$.

Cambiando variabile: $\phi' = \phi + \hat{K}^{-1}J$ la misura non cambia e otteniamo:

$$Z_E[J] = \exp\left(\frac{1}{2}\int d^4x_E \ J\hat{K}^{-1}J\right)\int[\delta\phi]\exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x_E \ \phi\hat{K}\phi\right) \ . \tag{5.40}$$

Ora

$$\int[\delta\phi]\exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x_E \ \phi\hat{K}\phi\right) = \int\prod_x d\phi(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_x \phi\hat{K}\phi\right) \ , \tag{5.41}$$

è gaussiano. Ora

$$\int\prod_i dx_i \exp\left(-\frac{1}{2}x_iA_{ij}x_j\right) \tag{5.42}$$

si risolve cambiando variabile:

$$\begin{aligned} y_i &= C_{ij}x_j \ , \\ x_i &= C_{ij}^{-1}y_j \ , \end{aligned} \tag{5.43}$$

dove C è una matrice ortogonale, cosicchè:

$$\begin{aligned} x_iA_{ij}x_j &= C_{ik}^{-1}y_kA_{ij}C_{jl}^{-1}y_l \ , \\ &= y_kC_{ik}^TA_{ij}C_{jl}^{-1}y_l \ , \\ &= y_kC_{ki}A_{ij}C_{jl}^{-1}y_l \ , \\ &= y_kA'_{kl}y_l = \lambda_k(y_k)^2 \ . \end{aligned} \tag{5.44}$$

Formalmente:

$$\int[\delta\phi]\exp\left(-\frac{1}{2}\int d^4x_E \ \phi\hat{K}\phi\right) = (2\pi)^{N/2}\left(\det\hat{K}\right)^{-1/2} \quad \text{per} \quad N\to\infty \ . \tag{5.45}$$

Quindi a parte questo fattore costante che eliminiamo con un'opportuna normalizzazione otteniamo:

$$Z_E[J] = \exp\left(\frac{1}{2}\int d^4x_E \ J\hat{K}^{-1}J\right) \ . \tag{5.46}$$

Ora

$$\hat{K}^{-1}J = \int d^4y_E\ G(x_E - y_E)J(y_E)\ , \tag{5.47}$$

e vale

$$KG(x_E) = \delta^4(x_E)\ . \tag{5.48}$$

Ora ricordando che $K = -\partial_\mu\partial_\mu + m_0^2$ e passando alla trasformata di Fourier troviamo:

$$\begin{aligned}\left(-\partial_\mu\partial_\mu + m_0^2\right)\int d^4p_E\ e^{\imath p_E x_E}\widetilde{G}(p_E) &= \int d^4p_E\ \left(p_E^2 + m_0^2\right)\widetilde{G}(p_E)e^{\imath p_E x_E} = \\ &= \int d^4p_E\ e^{\imath p_E x_E}\ ,\end{aligned} \tag{5.49}$$

allora

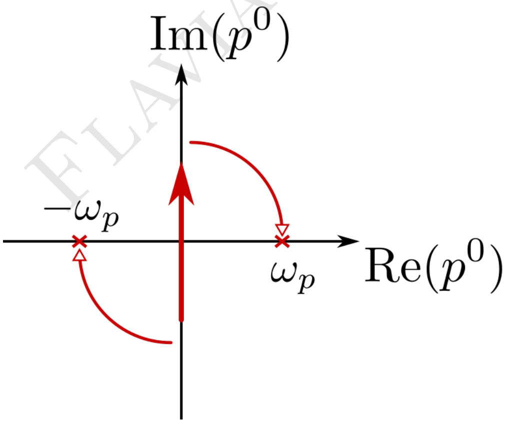
$$\begin{aligned}\widetilde{G}(p_E) &= \frac{1}{p_E^2 + m_0^2}\ , \\ G(x_E) &= \int d^4p_E\ e^{\imath p_E x_E}\frac{1}{p_E^2 + m_0^2}\ .\end{aligned} \tag{5.50}$$

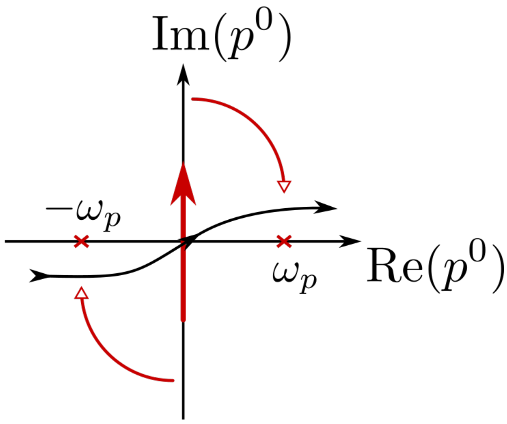
Ora dobbiamo continuare analiticamente $\widetilde{G}(p_E)$ nello spazio di Minkowski o equivalentemente $G(x_E)$. Per effettuare la continuazione analitica poniamo $x_4 = \imath x_0$. Allora

$$G(\imath x_0, \vec{x}) = \int d^4p_E\ \exp\left[\imath p_E^4(\imath x^0) + \imath\vec{p}\cdot\vec{x}\right]\frac{1}{p_4^2 + \vec{p}^2 + m_0^2}\ . \tag{5.51}$$

Ponendo $p_4 = -\imath p_0$:

$$\begin{aligned}G(\imath x_0, \vec{x}) &= \int -\imath d^4p\ \exp\left[\imath(-\imath p_0)\imath x^0 + \imath\vec{p}\cdot\vec{x}\right]\frac{1}{-p_0^2 + \vec{p}^2 + m_0^2} = \\ &= \imath\int d^4p e^{\imath px}\frac{1}{p^2 - m_0^2} = \\ &= \imath\Delta_F(x)\ .\end{aligned} \tag{5.52}$$





Il cammino d'integrazione per p^0 va da $-\imath\infty$ a $+\imath\infty$ (perchè l'integrale è su p_4 reale). Possiamo deformare questo cammino, in accordo al teorema dei residui, fino all'asse reale aggirando i poli opportunamente.

Quindi il funzionale generatore minkowskiano sarà

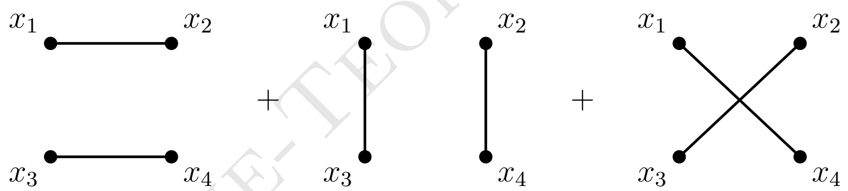
$$
\begin{aligned}
Z_E[J] &= \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4x_E d^4y_E J(x_E) G(x_E - y_E) J(y_E)\right] \ , \\
Z_E[J] &= \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x) \imath\Delta(x-y) J(y)\right] = \\
&= \exp\left[-\frac{\imath}{2}\int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y)\right] \ .
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

Calcolando la derivata del funzionale generatore rispetto a $J(x)$ si ottengono le funzioni di Green. Ad esempio per le funzioni di Green a 2 e 4 punti otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)]|0\rangle &= G(x_1,x_2) = \imath\Delta_F(x_1-x_2) \ , \\
\langle 0|\mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)]|0\rangle &= G(x_1,x_2,x_3,x_4) = \\
&= \imath\Delta_F(x_1-x_2)\imath\Delta_F(x_3-x_4) + \\
&+ \imath\Delta_F(x_1-x_3)\imath\Delta_F(x_2-x_4) + \\
&+ \imath\Delta_F(x_1-x_4)\imath\Delta_F(x_2-x_3) \ .
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

Diagrammaticamente:

$$G(x_1,x_2,x_3,x_4) =$$



In generale la funzione di Green a $2n$ punti sarà il prodotto di n funzioni di Green a 2 punti disgiunte (con tutte le permutazioni possibili).

Conviene a questo punto considerare solo le funzioni di Green **connesse**, cioè quelle che non possono essere ulteriormente fattorizzate nel prodotto di altre funzioni di Green con numero minore di punti. Graficamente queste sono rappresentate da diagrammi in cui tutti i vertici sono connessi tra loro.

Possiamo dimostrare che il funzionale definito da:

$$Z[J] = e^{\imath W[J]} \ , \tag{5.55}$$

è un funzionale generatore per le sole funzioni di Green connesse:

$$G_c(x_1,...,x_n) = \langle 0|\mathcal{T}[\phi(x_1)...\phi(x_n)]|0\rangle_{\text{conn}} = (-\imath)^{n-1}\left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_n)...\delta J(x_1)}\right|_{J=0} \ . \tag{5.56}$$

Nel nostro caso

$$W[J] = -\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_f(x-y)J(y) \ , \tag{5.57}$$

e la sola funzione di Green connessa è quella a 2 punti:

$$G^{(2)}_{\text{conn}}(x,y) = \imath\Delta_F(x-y) \ . \tag{5.58}$$

Chapter 6

Interazione e teoria delle perturbazioni

Consideriamo una teoria di campo scalare con autointerazione del tipo descritto dalla lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4 \ , \quad \lambda > 0 \ , \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} \ . \end{aligned} \tag{6.1}$$

Il funzionale generatore per questa teoria sarà dato da

$$Z[J] = \int [\delta\phi] \exp\left(\imath \int d^4x \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + J\phi\right) = \int [\delta\phi] e^{\imath\int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}} \exp\left(\imath\int d^4x\mathcal{L}_0 + J\phi\right) \ . \tag{6.2}$$

Espandendo in serie di Taylor il primo esponenziale troviamo

$$Z[J] = \int [\delta\phi] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath)^n}{n!} \left[\int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)\right]^n \exp\left(\imath\int d^4x \mathcal{L}_0 + J\phi\right) \ . \tag{6.3}$$

Per procedere notiamo che se prendiamo la derivata funzionale dell'esponenziale rispetto a J otteniamo:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\imath\int d^4x'(\mathcal{L}_0 + J(x')\phi(x'))} = \imath\phi(x) e^{\imath\int d^4x'(\mathcal{L}_0 + J\phi)} \ , \\ &\to -\imath\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\imath\int d^4x'(\mathcal{L}_0+J\phi)} = \phi(x) e^{\imath\int d^4x'(\mathcal{L}_0+J\phi)} \ , \end{aligned} \tag{6.4}$$

e così la derivata funzionale seconda dà:

$$(-\imath)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x)^2} e^{\imath\int d^4x'(\mathcal{L}_0+J\phi)} = \phi(x)^2 e^{\imath\int d^4x'(\mathcal{L}_0+J\phi)} \ . \tag{6.5}$$

Ad esempio se prendiamo $n = 1$ avremo:

$$\begin{aligned} &\int d^4x \mathcal{L}_I(\phi) \exp\left[\imath\int d_4x' \left(\mathcal{L}_0 + J(x')\phi(x')\right)\right] = \\ &-\frac{1}{4!}\lambda\int d^4x \phi^4(x) \exp\left[\imath\int d_4x' \left(\mathcal{L}_0 + J(x')\phi(x')\right)\right] = \\ &-\frac{1}{4!}\lambda\int d^4x (-\imath)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \exp\left[\imath\int d_4x' \left(\mathcal{L}_0 + J(x')\phi(x')\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{6.6}$$

Quindi sostituendo $\phi(x) \to -\imath \frac{\delta}{\delta J(x)}$ possiamo riscrivere il funzionale generatore come:

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \int [\delta\phi] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\imath)^2}{n!} \frac{(-\lambda)^n}{(4!)^n} \left[\int d^4x (-\imath)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right]^n e^{\imath \int d^4x' (\mathcal{L}_0 + J\phi)} = \\
&= \int [\delta\phi] \exp\left[-\frac{\imath\lambda}{4!} \int d^4x (-\imath)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] e^{\imath \int d^4x' (\mathcal{L}_0 + J\phi)} ,
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

ossia:

$$
\boxed{Z[J] = \exp\left[-\frac{\imath\lambda}{4!} \int d^4x (-\imath)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] Z_0[J]} , \tag{6.8}
$$

dove $Z_0[J]$ è il funzionale generatore della teoria libera. Le funzioni di Green si ottengono come sempre prendendo le derivate funzionali del funzionale generatore.

Valutiamo il funzionale generatore al primo ordine in λ:

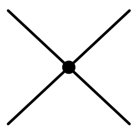
$$
\begin{aligned}
Z[J] &= \left[1 - \frac{\imath\lambda}{4!} \int d^4x (-\imath)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] Z_0[J] = \\
&= \left[1 - \frac{\imath\lambda}{4!} \int d^4x (-\imath)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] \exp\left[-\frac{\imath}{2} \int dx dy J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] .
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Per semplificare indichiamo:

$\imath\Delta_F(x-y) =$ x y, (6.10)

$\imath \int J(x) dx =$  , (6.11)

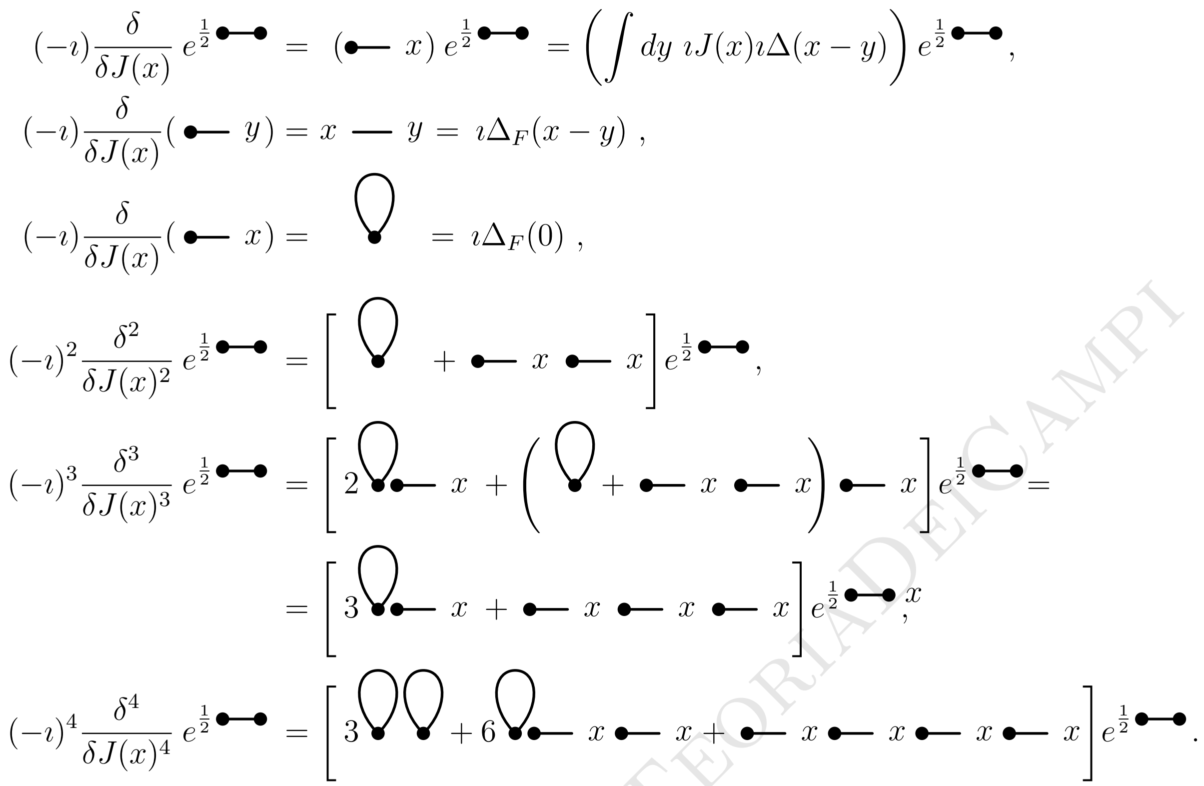
$\imath\Delta_F(0) =$  , (6.12)

$\imath\lambda \int d^4x =$  . (6.13)

Quindi

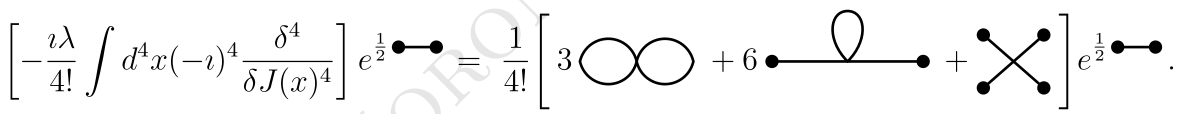
$Z[J] = \left[1 - \frac{\imath\lambda}{4!} \int d^4x (-\imath)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] e^{\frac{1}{2}}$  . (6.14)

Notiamo che



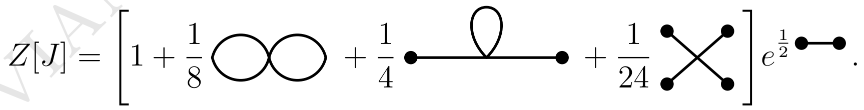
(6.15)

Avremo



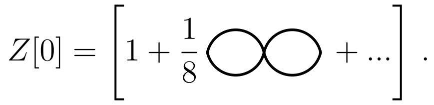
(6.16)

Quindi all'ordine λ:



(6.17)

Consideriamo $Z[0]$:

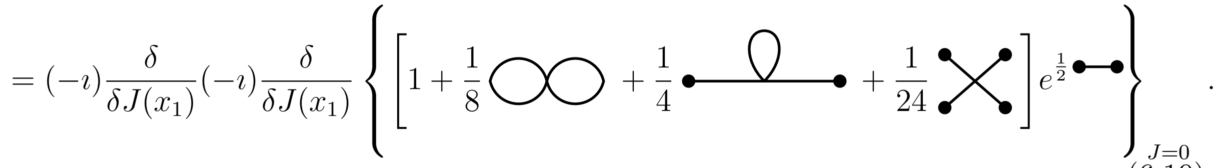


(6.18)

In generale, $Z[0]$ rappresenta la somma di tutti i diagrammi del tipo **vuoto-vuoto**, cioè senza gambe esterne. Poiché abbiamo scelto una normalizzazione del funzional generatore $Z[0] = 1$ si può vedere che la somma di tutti i diagrammi vuoto-vuoto è identicamente nulla e quindi li possiamo omettere del tutto nel calcolo ad esempio delle funzioni di Green.

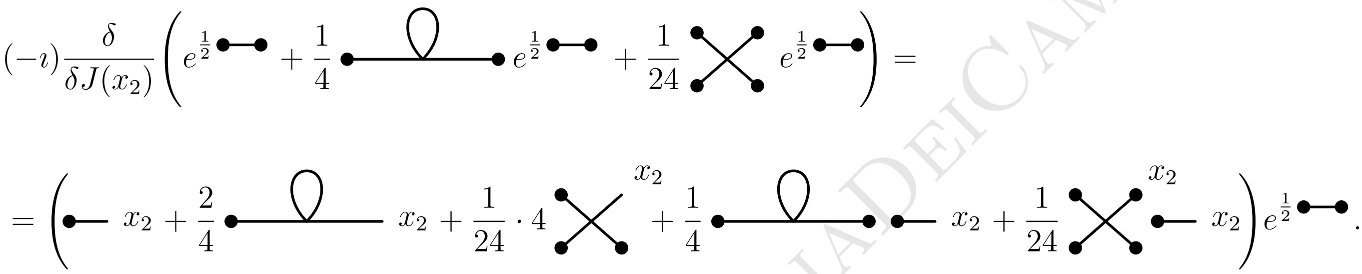
Procediamo a calcolare le funzioni di Green al primo ordine perturbativo:

$$G(x_1, x_2) = \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle = (-\imath)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] \Bigg|_{J=0} =$$



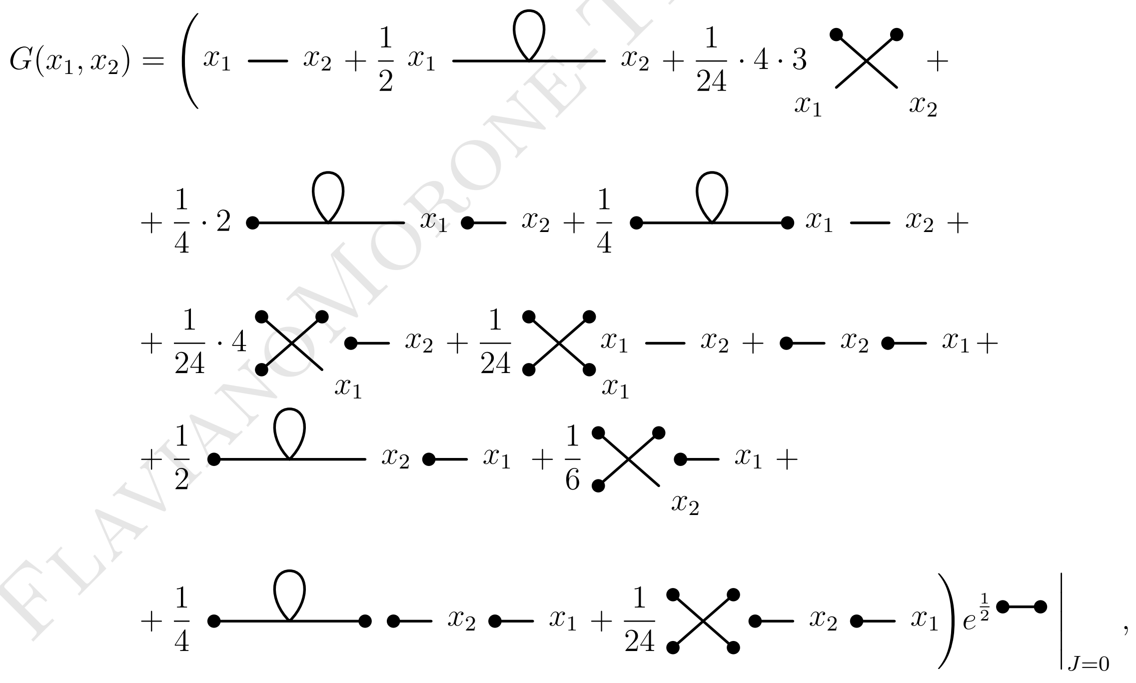
(6.19)

Valutiamo la prima derivata. Avremo 3 termini:



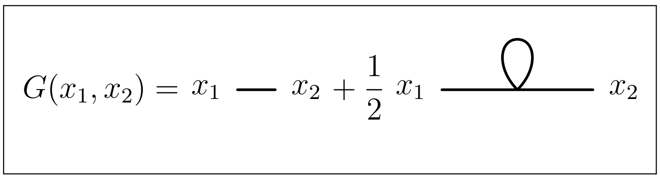
(6.20)

Prendendo la derivata seconda avremo



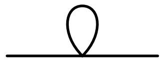
(6.21)

da cui otteniamo



(6.22)

Esplicitamente

$$G(x_1,x_2) = x_1$$ $$x_2 + \frac{1}{2}\, x_1$$  $$x_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \imath\Delta_F(x_1-x_2) + \frac{1}{2}\imath\Delta_F(0)(-\imath)\lambda \int \imath\Delta_F(x_1-x)\imath\Delta_F(x-x_2)d^4x = \\
&= \imath\Delta_F(x_1-x_2) - \frac{1}{2}\Delta_F(0)\lambda \int \Delta_F(x_1-x)\Delta_F(x-x_2)d^4x \ .
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Ora

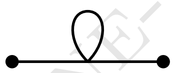
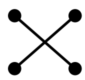
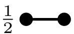
$$\imath\Delta_F(x-y) = \frac{\imath}{(2\pi)^4}\int d^4p\ \frac{e^{\imath p(x-y)}}{p^2-m^2+\imath\epsilon}\ , \tag{6.24}$$

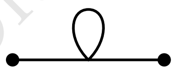
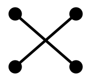
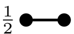
quindi

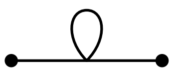
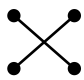
$$\imath\Delta_F(0) = \frac{\imath}{(2\pi)^4}\int d^4p\ \frac{1}{p^2-m^2+\imath\epsilon} \sim \Lambda^2\ , \tag{6.25}$$

diverge quadraticamente.

Come abbiamo detto il funzionale generatore per le funzioni di Green connesse è $\imath W[J] = \ln Z[J]$. Ovverosia:

$$\imath W[J] = \ln\Bigg\{\Bigg[1+\frac{1}{4}$$  $$+\frac{1}{24}$$  $$\Bigg] e^{\frac{1}{2}}$$  $$\Bigg\} =$$

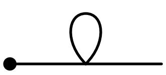
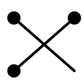
$$= \ln\Bigg(1+\frac{1}{4}$$  $$+\frac{1}{24}$$  $$\Bigg) + \ln\ e^{\frac{1}{2}}$$  $$= \tag{6.26}$$

$$= \frac{1}{2}$$  $$+\frac{1}{4}$$  $$+\frac{1}{24}$$  $$+\ O(\lambda^2)\ .$$

Ad esempio la funzione di Green connessa a 2 punti sarà

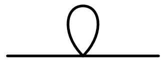
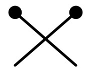
$$G^c(x_1,x_2) = (-\imath)\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\Bigg|_{J=0} = (-\imath)\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(-\imath)\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\imath W[J]\Bigg|_{J=0}\ . \tag{6.27}$$

Ora

$$(-\imath)\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\imath W[J] = \frac{1}{2}\cdot 2$$  $$x_2 + \frac{1}{4}\cdot 2$$  $$x_2 + \frac{1}{24}\cdot 4$$  $$_{x_2}\ +\ O(\lambda^2)\ , \tag{6.28}$$

e

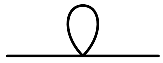
$$(-\imath)\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(-\imath)\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\imath W[J] = x_1$$

$$x_2 + \frac{1}{2} x_1$$

$$x_2 + \frac{4\cdot 3}{24}$$


$$+\ O(\lambda^2)\ . \tag{6.29}$$

Quindi avremo:

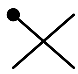
$$G^c(x_1,x_2) = x_1$$

$$x_2 + \frac{1}{2}\ x_1$$

$$,x_2 \tag{6.30}$$

che coincide con quella trovata precedentemente.

E' facile ora calcolare anche la funzione di Green a 4-punti connessa:

$$G^c(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-\imath)^3 \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{\delta}{\delta J(x_3)}\frac{\delta}{\delta J(x_4)} W[J]\bigg|_{J=0} =$$

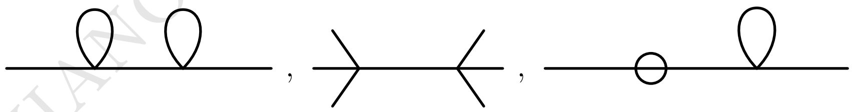
$$(-\imath)\frac{\delta}{\delta J(x_4)}\left[\frac{4\cdot 3\cdot 2}{24}\right.$$


$$\left. +\ O(\lambda^2)\right] =$$


$$+\ O(\lambda^2) \tag{6.31}$$

6.1 Diagrammi irriducibili a 1 particella (1PI)

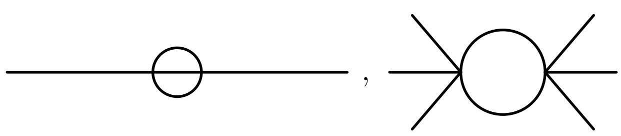
Abbiamo visto che le funzioni di Gren a n-punti connesse $G^c(x_1, ..., x_n)$ hanno il vantaggio di non contenere contributi che vengono banalmente dalla moltiplicazione di funzioni a n-punti di ordine più basso. In realtà possiamo suddividere ulteriormente l'insieme dei diagrammi connessi. Consideriamo ad esempio i diagrammi:



(6.32)

Questi diagrammi possono essere separati in due parti disgiunte tagliando una singola linea interna e sono chiamati **riducibili**.

Consideriamo invece i diagrammi



(6.33)

Questi diagrammi non possono essere separati in parti disgiunte tagliando una linea interna e sono quindi **irriducibili** (1PI). L'irriducibilità a una particella è una proprietà più forte della connessione che ci dice che i diagrammi devono essere connessi in modo non banale.

6.2 Grado di divergenza superficiale

Consideriamo un diagramma con N_e linee esterne, N_i linee interne e V vertici. Da ogni vertice partono 4 linee e ogni linea interna connette 2 vertici quindi:

$$\boxed{4V = E + 2I} \ . \tag{6.34}$$

Per valutare il grado di divergenza superficiale di un diagramma ci occorre il numero di integrazioni indipendenti sugli impulsi interni (**loop**). Ogni linea interna può essere associata ad un valore q_i. Non tutti i q_i sono indipendenti, infatti ad ogni vertice abbiamo una funzione δ che assicura la conservazione dell'impulso al vertice. Una delle δ è semplicemente una condizione sulla conservazione dell'impulso totale e quindi il numero di integrali indipendenti (loops) è:

$$L = I - (V - 1) \ , \tag{6.35}$$

e poichè $I = \frac{1}{2}(4V - E)$ avremo:

$$L = \frac{1}{2}(4V - E) - V + 1 = 2V - \frac{E}{2} - V + 1 = V - \frac{E}{2} + 1 \ , \tag{6.36}$$

e quindi

$$\boxed{L = V - \frac{E}{2} + 1} \ . \tag{6.37}$$

Il grado di divergenza superficiale di un diagramma è il grado di divergenza dell'integrazione sulla regione dello spazio degli impulsi in cui gli impulsi di tutte le linee interne vanno ad infinito contemporaneamente. Quindi l'espressione per un diagramma ad L loops:

$$I_L = \int d^4p_1 ... d^4p_L \prod_{i=1}^{I} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \ , \tag{6.38}$$

quando $p_i \to sp_i$ con $s \gg 1$, diventa:

$$I_L \sim s^{4L-2I} = s^{\delta} \ . \tag{6.39}$$

Quindi il grado di divergenza superficiale di un diagramma a L loops è:

$$\delta = 4L - 2I = 4\left(V - \frac{E}{2} + 1\right) + (E - 4V) = 4V - 2E + 4 + E - 4V \ , \tag{6.40}$$

da cui otteniamo:

$$\boxed{\delta = 4 - E} \ . \tag{6.41}$$

Notiamo che se $\delta \geq 0$ il diagramma sarà certamente divergente. Tuttavia se $\delta < 0$ il diagramma potrebbe ancora essere divergente quando solo un sottoinsieme delle variabili d'integrazione nello spazio degli impulsi vanno infinito. (Quando il diagramma contiene qualche sottodiagramma divergente).

Nella teoria scalare con autointerazione $\lambda\phi^4$ il grado di divergenza superficiale di un diagramma è $\delta = 4 - E$e non dipende dall'ordine perturbativo. Quindi i soli diagrammi che divergono superficialmente sono:

- funzione di Green a 2 punti - $\delta = 2$ - grado di divergenza superficiale uguale a 2, ovvero divergenza quadratica.

- funzione di Green a 4 punti - $\delta = 0$ - divergenza logaritmica.

Le divergenze UV ottenute mediante la valutazione del grado di divergenza superficiale esauriscono in sostanza le divergenze possibili. Precisamente, ci sarà di sicuro qualche diagramma con $E > 4$ divergente ma la divergenza è riconducibile ad una divergenza superficiale (già individuata mediante il conteggio precedente) di un sottodiagramma.

Le uniche divergenze della teoria ϕ^4 relative alle funzioni a 2 e 4 punti possono essere eliminate dal calcolo di una qualsiasi grandezza fisica, ad ogni ordine perturbativo, mediante il procedimento di **rinormalizzazione**.

Possiamo subito intuire che è sufficiente considerare diagrammi connessi, poichè i diagrammi non connessi sono sempre il prodotto di diagrammi connessi con un numero inferiore di punti e quindi basta considerare le divergenze di diagrammi connessi. Ma possiamo dire ancora di più. Infatti tra i diagrammi connessi e sufficiente considerare solo i diagrammi connessi **1PI** per quanto riguarda le divergenze. Infatti dopotutto se combiniamo sottodiagrammi 1PI per ottenere un diagramma riducibile non otterremo nuove divergenze poiché i propagatori che connettono i pezzi irriducibili hanno impulsi fissati. Quindi studieremo le divergenze UV della funzione a 2 punti 1PI e della funzione a 4 punti 1PI.

6.3 Rinormalizzazione

Poiché il numero di diagrammi divergenti è finito possiamo eliminare automaticamente le divergenze attraverso una ridefinizione delle costanti fisiche e una rinormalizzazione dei campi. Abbiamo visto che le sole funzioni divergenti superficialmente sono quelle a 2 e 4 punti. Ciascun programma divergerà come Λ^δ. Se deriviamo $\delta + 1$ volte rispetto agli impulsi esterni otteniamo quindi un'espressione finita. Quindi poichè la differenziazione $\delta+1$ volte rende l'integrale finito segue che il contributo del diagramma può essere scritto come un polinomio di ordine δ negli impulsi esterni con coefficienti divergenti più un resto finito. Così avremo per la funzione a N punti un comportamento del tipo:

$$A_N \sim \sum_{i=0}^{\delta} P^i(p)\Lambda^{\delta-i} + \bar{A}_N \ , \tag{6.42}$$

dove $P^i(p)$ è un polinomio nell'impulso esterno di grado i e $\bar{A}_N$ è finito. Il punto essenziale è che i termini divergenti in A_N corrispondono precisamente a **vertici** che possono essere costruiti prendendo N potenze dei campi con i derivate così da ottenere i polinomi appropriati nell'impulso esterno e un accoppiamento che si comporta come $\Lambda^{\delta-i}$. Ad esempio $A_2(p)$ ha $\delta = 2$ e i termini divergenti sono della forma $c_2 p^2 \ln(\Lambda)$ e $c_0\Lambda^2$. Il primo termine può essere riprodotto con un vertice del tipo $c_2\frac{\ln(\Lambda)}{2}(\partial_\mu\phi)^2$, mentre il secondo con un vertice del tipo $c_0\frac{\Lambda^2}{2}\phi^2$. In generale il tipo di vertici che corrispondono ai termini divergenti sono precisamente della forma dei termini che sono permessi nella più generale interazione rinormalizzabile che possiamo scrivere per questi campi. Così possiamo cancellare i termini divergenti modificando i coefficienti degli accoppiamenti che appaiono nella lagrangiana originale. Quindi aggiungiamo dei **controtermini**, uno per ciascuna divergenza in ciascun' ampiezza divergente superficialmente, arrangiando i coefficienti per cancellare le divergenze dei diagrammi a 1-loop. Usando questa "nuova" lagrangiana (ch nuova non è) rinormalizzata, le ampiezza a 1-loop saranno finite. Ovviamente la cancellazione delle divergenze ultraviolette richiede che gli accoppiamenti **bare** divergano quando $\Lambda \to \infty$.

La lagrangiana sarà

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_0\right)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!}\lambda_0 \phi_0^4 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_0\right)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!}\lambda \phi_0^4 - \frac{1}{2}\delta m^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!}\delta\lambda \phi_0^4 = \\ &= \frac{Z}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2 - \frac{Z}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda Z^2 \phi^4 - \frac{1}{2} Z \delta m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} Z^2 \delta\lambda \phi^4 = \\ &= \mathcal{L}_{\mathrm{REN}} + \mathcal{L}_{\mathrm{CONTROT.}} \ ,\end{aligned} \tag{6.43}$$

dove

$$\begin{aligned}\delta m^2 &= m_0^2 - m^2 \ , \\ \delta\lambda &= \lambda_0 - \lambda \ , \\ \phi_0 &= \sqrt{Z}\phi \ .\end{aligned} \tag{6.44}$$

Cosa succede all'ordine successivo? All'ordine corrispondente a 2-loop anche i diagrammi convergenti primigeni (superficialmente) potrebbero divergere a causa di sottodiagrammi divergenti. Ma questi sono sottodiagrammi divergenti a 1-loop che dovrebbero essere finiti se abbiamo aggiustato attentamente i controtermini che abbiamo aggiunto. Quindi o diagrammi convergenti superficialmente dovrebbero essere finiti. I diagrammi divergenti superficialmente divergeranno di nuovo come Λ^δ, ma queste divergenze nasceranno sono dal diagramma come un tutto e non dai suoi sottodiagrammi. Dunque se di nuovo deriviamo $\delta + 1$ volte rispetto agli impulsi esterni otteniamo un'espressione finita. I termini divergenti saranno di nuovo polinomi negli impulsi esterni e possono essere cancellati aggiungendo controtermini alla lagrangiana originale del secondo ordine negli accoppiamenti. Così modifichiamo di nuovo la lagrangiana bare assicurandoci che tutte le ampiezze ad albero+1-loop+2-loop siano finite. Andiamo avanti così fino a stabilire che con un'attenta modifica dei parametri nella lagrangiana originale possiamo rendere tutte le ampiezze finite **a tutti gli ordini in teoria delle pertubazioni**.

Nella teoria del campo scalare con autointerazione $\lambda\phi^4$ abbiamo visto che le sole ampiezze superficialmente divergenti sono quelle 2 e 4 punti. Dobbiamo imporre quindi delle condizioni di finitezza su queste funzioni. Una scelta possibile sarebbe imporre ad esempio che la funzione a 2 punti rinormalizzata soddisfi:

$$\begin{aligned}\Delta_R^{-1}(m^2) &= 0 \ , \\ \frac{d}{dq^2}\Delta_R^{-1}(m^2) &= 1\end{aligned} \tag{6.45}$$

cioè che la funzione di Green a 2 punti abbia un polo in corrispondenza della **massa fisica** m con residuo 1. Ovviamente c'è grande libertà nella scelta delle condizioni di finitezza per cui potrebbe essere più conveniente usare condizioni anche meno fisiche. Ad esempio è conveniente scegliere delle condizioni di finitezza nell'origine dello spazio degli impulsi.

Lavoriamo nell'euclideo. Per la funzione a 2 punti all'ordine più basso abbiamo:

$$\Delta_\Lambda^{-1}(q^2) = q^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) = \left(\mathrm{FT}\langle 0|\mathcal{T}[\phi_0\phi_0]|0\rangle\right)^{-1} \ . \tag{6.46}$$

Riscaliamo i campi $\phi = Z^{-1/2}\phi_0$, cosicchè:

$$\Delta_R(q^2) = Z^{-1}\Delta_\Lambda(q^2) = Z^{-1}\left(q^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2}G_\Lambda(0)\right)^{-1} \ , \tag{6.47}$$

e imponiamo le condizioni di finitezza:

$$\begin{aligned} \Delta_R^{-1}(0) = Z\Delta_\Lambda^{-1}(0) = M^2 = Z\left(m_0^2 + \frac{g_0}{2}G_\Lambda(0)\right) \ , \\ \frac{d}{dq^2}\Delta_R^{-1}(0) = Z\frac{d}{dq^2}\Delta_\Lambda^{-1}(0) = Z = 1 \ . \end{aligned} \tag{6.48}$$

A quest'ordine

$$\begin{aligned} Z &= 1 \ , \\ M^2 &= m_0^2 + \frac{g_0}{2}G_\Lambda(0) \ , \end{aligned} \tag{6.49}$$

quindi

$$\boxed{\Delta_R^{-1}(q^2) = q^2 + M^2} \ . \tag{6.50}$$

Anche se a quest'ordine M è la massa della particella, in generale M non corrisponde alla massa fisica della particella. Un'altra condizione di finitezza deve essere imposta sulla funzione a 4-punti 1PI:

$$\Delta_R^4(q_1, q_2, q_3, q_4) = Z^{-2}\Delta_\Lambda^4(q_1, q_2, q_3, q_4) \ . \tag{6.51}$$

Ora la funzione di Green a 4-punti 1PI è data da:

$$\boxed{\Gamma^4 = \frac{\Delta^4(q_1, q_2, q_3, q_4)}{\Delta(q_1)\Delta(q_2)\Delta(q_3)\Delta(q_4)}} \ . \tag{6.52}$$

e

$$\Gamma_R^4 = \frac{\Delta_R^4}{\Delta_R\Delta_R\Delta_R\Delta_R} = \frac{Z^{-2}\Delta_\Lambda^4}{Z^{-4}\Delta_\Lambda\Delta_\Lambda\Delta_\Lambda\Delta_\Lambda} = Z^2\Gamma_\Lambda^4 \ . \tag{6.53}$$

A questo punto imponiamo che

$$Z^2\Gamma_\Lambda^4(0,0,0,0) = \Gamma_R^4(0,0,0,0) = -\lambda \ , \tag{6.54}$$

dove λ è la costante di accoppiamento fisica.

Le tre condizioni di finitezza sono dunque:

$$\boxed{\begin{aligned} Z\Delta_\Lambda^{-1}(0) = M^2 \ , \\ Z\frac{d}{dq^2}\Delta_\Lambda^{-1}(0) = 1 \ , \\ Z^2\Gamma_\Lambda^4(0,0,0,0) = -\lambda \ . \end{aligned}} \tag{6.55}$$

Riassumendo, al primo ordine avremo

$$\begin{aligned} & Z\left(q^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2}G_\Lambda(0)\right)\Big|_{q^2=0} = M^2 \ , \\ & Z = 1 \ , \\ & Z^2(-\lambda_0) = -\lambda \ , \end{aligned} \tag{6.56}$$

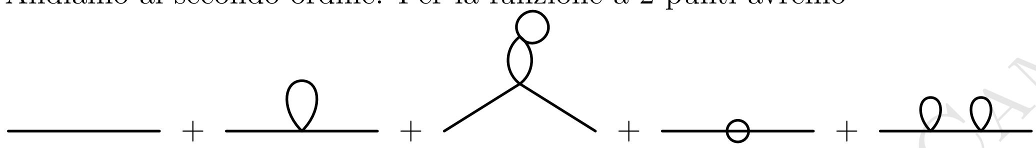
da cui otteniamo

$$
\begin{aligned}
Z &= 1 \ , \\
\lambda_0 &= \lambda \ , \\
M^2 &= m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) \ ,
\end{aligned}
\tag{6.57}
$$

e

$$
\boxed{\begin{aligned}
\Delta_R^{-1}(q^2) &= q^2 + M^2 \ , \\
\Gamma_R &= -\lambda \ .
\end{aligned}}
\tag{6.58}
$$

Andiamo al secondo ordine. Per la funzione a 2-punti avremo



(6.59)

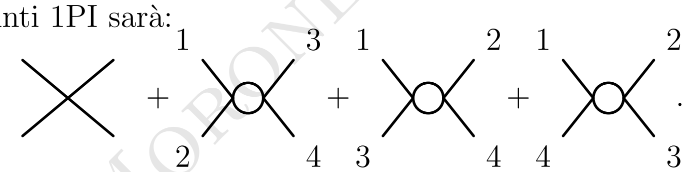
L'ultimo diagramma è riducibile e non lo consideriamo. Quindi a quest'ordine avremo che la funzione di Green a 2-punti 1PI è

$$
\Delta_\Lambda^{-1}(q^2) = q^2 + m_0^2 + \Sigma_\Lambda(q^2) \ ,
\tag{6.60}
$$

dove $\Sigma_\Lambda(q^2)$ è la somma dei diagrammi 1PI . Precisamente

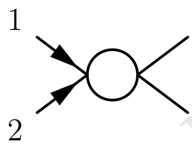
$$
\boxed{\Delta_\Lambda^{-1}(q^2) = q^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(q^2)} \ .
\tag{6.61}
$$

La funzione a 4-punti 1PI sarà:



(6.62)

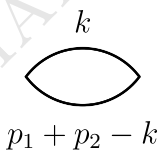
Ora



$$
= \left(\frac{1}{p_1^2 + m_0^2} I_\Lambda(p_1 + p_2) \frac{1}{p_2^2 + m_0^2} \frac{1}{p_3^2 + m_0^2} \frac{1}{p_4^2 + m_0^2} \right) \frac{1}{2} g_0^2 \ ,
\tag{6.63}
$$

dove

$I_\Lambda(1+2) =$



$$
= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k)^2 + m_0^2} \sim \log \Lambda \ ,
\tag{6.64}
$$

e quindi

$$
\boxed{\Gamma^4(p_1, p_2, p_3, p_4) = -\lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} \left(I_\Lambda(1+2) + I_\Lambda(1+3) + I_\Lambda(1+4) \right)} \ .
\tag{6.65}
$$

Quindi avremo:

$$
\begin{aligned}
Z \Delta_\Lambda^{-1}(0) &= Z \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} G_\Lambda(0) + g_0^2 \Pi_\Lambda(0) \right) = M^2 \ , \\
Z \frac{d}{dq^2} \Delta_\Lambda^{-1}(0) &= Z \left(1 + g_0^2 \Pi'_\Lambda(0) \right) = 1 \ , \\
Z^2 \left(-\lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} 3 I_\Lambda(0) \right) &= -\lambda \ .
\end{aligned}
\tag{6.66}
$$

Quindi

$$Z = \frac{1}{1 + g_0^2 \Pi'_\Lambda}(0) \sim 1 - g_0^2 \Pi'_\Lambda(0) + O(g_0^4) \ , \tag{6.67}$$

e

$$Z^2 = \left(1 - g_0^2 \Pi'_\Lambda(0) + O(g_0^4)\right)^2 = 1 - 2 g_0^2 \Pi'_\Lambda(0) + O(g_0^4) \ . \tag{6.68}$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\left(1 - 2\lambda_0^2 \Pi'_\Lambda(0)\right) \left(-\lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} 3 I_\Lambda(0)\right) = -\lambda_0 + \frac{3}{2}\lambda_0^2 I_\Lambda(0) + O(\lambda_0^3) = -\lambda \ , \\
&\to \lambda = \lambda_0 - \frac{3}{2}\lambda_0^2 I_\Lambda(0) + O(\lambda_0^3) \ , \\
&\to \lambda_0 = \lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 I_\Lambda(0) + O(\lambda^3) \ .
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\Delta_R^{-1}(q^2) &= Z \left[q^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} G_\Lambda(0) + \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(q^2)\right] = \\
&= Z \left[q^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} G_\Lambda(0) + \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0) + \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) - \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0)\right] = \\
&= Z q^2 + M^2 + Z\lambda_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) - Z\lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0) = \\
&= q^2 \left(1 - \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0)\right) + M^2 + \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) - \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0) = \\
&= q^2 + M^2 + \lambda_0^2 \left[\Pi_\Lambda(q^2) - q^2 \Pi'_\Lambda(0) - \Pi_\Lambda(0)\right] = \\
&= q^2 + M^2 + \lambda^2 \left[\Pi_\Lambda(q^2) - q^2 \Pi'_\Lambda(0) - \Pi_\Lambda(0)\right] \ .
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Ora $\Pi_\Lambda(q^2)$ diverge quadraticamente, quindi se sviluppiamo in 0 otteniamo:

$$\Pi_\Lambda(q^2) = \Pi_\Lambda(0) + q^2 \Pi'_\Lambda(0) + \widetilde{\Pi}_\Lambda(q^2) \ , \tag{6.71}$$

dove $\Pi_\Lambda(0)$ diverge quadraticamente ($\Lambda^2 \log \Lambda$) e $\Pi'_\Lambda(0)$ diverge log, mentre $\widetilde{\Pi}_\Lambda(q^2)$ è finito; quindi l'espressione fra parentesi è finita per $\Lambda \to \infty$.

Vediamo cosa accade per la funzione a 4-punti 1PI:

$$\begin{aligned}
\Gamma_R^4 &= Z^2 \left[-\lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{2}\left(I_\Lambda(1+2) + I_\Lambda(1+3) + I_\Lambda(1+4)\right)\right] = \\
&= Z^2 \left[-\lambda_0 + \frac{3}{2}\lambda_0^2 I_\Lambda(0) + \frac{\lambda_0^2}{2}\left(I_\Lambda(1+2) + I_\Lambda(1+3) + I_\Lambda(1+4) - 3 I_\Lambda(0)\right)\right] = \\
&= -\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\left[\left(I_\Lambda(1+2) - I_\Lambda(0)\right) + \left(I_\Lambda(1+3) - I_\Lambda(0)\right) + \left(I_\Lambda(1+4) - I_\Lambda(0)\right)\right] \ .
\end{aligned} \tag{6.72}$$

Poichè $I_\Lambda(1+2)$ diverge log, allora $I_\Lambda(1+2) - I_\Lambda(0)$ è finito e analogamente per $I_\Lambda(1+3)$ e $I_\Lambda(1+4)$.

Ricapitolando abbiamo al 2° ordine:

$$\begin{aligned}
Z &= 1 - \lambda^2 \Pi'_\Lambda(0) \ , \\
\lambda_0 &= \lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 I_\Lambda(0) \ , \\
m_{\text{phys}}^2 &= M^2 + \lambda^2 \left[\Pi_\Lambda(q^2) - q^2 \Pi'_\Lambda(0) - \Pi_\Lambda(0)\right] \ ,
\end{aligned} \tag{6.73}$$

da cui si vede $m_{\text{phys}}^2 \neq M$ come notato precedentemente. Inoltre:

$$m_0^2 = M^2 - \frac{\lambda}{2} G_\Lambda(0) + \lambda^2 \left[M^2 \Pi'_\Lambda(0) - \frac{3}{4} I_\Lambda(0) - \Pi_\Lambda(0)\right] \ . \tag{6.74}$$

6.4 Gruppo di Rinormalizzazione

Lo scopo del gruppo di rinormalizzazione è di descrivere come cambia la dinamica del sistema quando cambiamo la scala di distanze a cui testiamo il sistema. È una caratteristica essenziale della natura il fatto che la fisica ad una data scala si disaccoppia dalla fisica ad una scala differente. Ora, questa separazione non è così evidente a priori in una teoria di campo locale relativistica che descrive la fisica a tutte le scale di energia. In altri termini una QFT coinvolge gradi libertà con tutti i possibili valori dell'impulso. Come avviene il disaccoppiamento? Una risposta parziale può essere data considerando la teoria della rinormalizzazione. Abbiamo visto che la lagrangiana bare contiene parametri che si riferiscono a distanze arbitrariamente piccole ed è collegata, in modo complicato, alla fisica a distanze finite che è testata con esperimenti effettuati ad energie finite. Il tratto peculiare di una teoria di campo rinormalizzabile è che tutti gli effetti di alta energia possono essere assorbiti in pochi parametri, gli accoppiamenti rinormalizzati, le normalizzazione dei campi e delle masse.

Nel discutere la rinormalizzazione della teoria scalare con autointerazione abbiamo scelto il punto di sottrazione (cioè il punto in cui definire le funzioni di Green rinormalizzate) nell'origine dello spazio degli impulsi. Le condizioni di finitezza delle funzioni di Green erano:

$$\boxed{\begin{aligned} Z\Delta_\Lambda^{-1}(0) &= \Delta_R^{-1}(0) = M^2 \ , \\ Z\frac{d}{dq^2}\Delta_\Lambda^{-1}(q^2)\Big|_{q^2=0} &= \frac{d}{dq^2}\Delta_R^{-1}(q^2)\Big|_{q^2=0} = 1 \ , \\ Z^2\Gamma_\Lambda^4(0,0,0,0) &= \Gamma_R^4(0,0,0,0) = -\lambda \ , \end{aligned}} \tag{6.75}$$

dove M e λ non sono direttamente la massa è la costante di accoppiamento fisica della teoria, ma sono ad esse collegate.

Ora è evidente che la scelta del punto di sottrazione è del tutto arbitraria, infatti avremmo potuto scegliere come punto di sottrazione un punto differente $q^2 = \bar{q}^2$. Ovviamente cambiando q^2 dovremmo cambiare anche M e λ per poter descrivere la stessa fisica.

In effetti la scelta del punto $q^2 = 0$ non è conveniente per una teoria a massa nulla. Infatti dovremmo imporre:

$$\Delta_R^{-1}(0) = 0 \ , \tag{6.76}$$

il che conduce immediatamente ad una divergenza infrarossa. Conviene, invece, effettuare la sottrazione in un punto $q = \mu$ finito e fissato, ma arbitrario, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \Delta_R^{-1}(q^2)\Big|_{q^2=\mu^2} &= \mu^2 \ , \\ \frac{d}{dq^2}\Delta_R^{-1}(q^2)\Big|_{q^2=\mu^2} &= 1 \ , \qquad \text{per una teoria a massa NULLA} \ , \\ \Gamma_R^4(\mu) &= -\lambda \ , \end{aligned} \tag{6.77}$$

dove $\Gamma_R^4(\mu)$ è calcolato nel punto simmetrico:

$$\begin{aligned} p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 &= \mu^2 \ , \\ p_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_3 &= -\frac{2\mu^2}{3} \ . \end{aligned} \tag{6.78}$$

Queste condizioni sono ovviamente soddisfatte all'ordine più basso e non conducono a divergenze infrarosse. Prima di procedere ulteriormente vorremmo capire come due teorie

rinormalizzate corrispondenti a due differenti scelte di μ sono collegate. Chiaramente una può essere ricostruita dall'altra attraverso l'introduzione di controtermini finiti, determinati ordine per ordine per implementare le nuove condizioni. Come nel caso della rinormalizzazione infinita questo è equivalente ad una ridefinizione dei parametri della teoria (in questo caso λ e Z). Poichè questi parametri sono uguali al valore della funzione di Green in un dato punto μ, cambiare μ in μ' equivale a cambiare i parametri λ e 1 in λ' e z. Quindi:

$$\Gamma_R^{(n)}(p_1, ..., p_n; \lambda, \mu) = z^{n/2}\Gamma_R^{(n)}(p_1, ..., p_n; \lambda', \mu') \ , \tag{6.79}$$

dove λ' e z sono funzioni di λ, μ e μ' calcolabili ordine per ordine in teoria delle perturbazioni.

Le funzioni di Green **bare** sono funzioni di Λ e g_0:

$$G_n^{(0)} = G_n^{(0)}(\Lambda, g_0) \ . \tag{6.80}$$

Le funzioni di Green **rinormalizzate** saranno funzioni di g e μ:

$$G_n^R = G_n^R(g, \mu) = Z^{-n/2}G_n^{(0)}(\Lambda, g_0) \quad (\Lambda \to \infty) \ , \tag{6.81}$$

e abbiamo visto che

$$Z = Z(\lambda, \Lambda, \mu) = Z\left(\lambda, \frac{\mu}{\Lambda}\right) \ , \tag{6.82}$$

perchè deve essere adimensionale. D'altra parte poichè la teoria è **rinormalizzabile**:

$$\lim_{\Lambda\to\infty; \mu, g \ \text{fix}} Z^{-n/2}G_n^{(0)}(\Lambda, g_0) = \text{esiste} = G_n^R(g, \mu) \ . \tag{6.83}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} Z^{-n/2}G_n^{(0)}(\Lambda, g_0) &= G_n^R(g, \mu) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \ , \\ \to G_n^{(0)}(\Lambda, g_0) &\sim Z^{n/2}\left(g, \frac{\mu}{\Lambda}\right) G_n^R(g, \mu) \ . \end{aligned} \tag{6.84}$$

Sappiamo che

$$\begin{aligned} g_0 &= g_0(g, \mu/\Lambda) \ , \\ g &= g(g_0, \mu/\Lambda) \ , \end{aligned} \tag{6.85}$$

quindi **a** g_0 **e** Λ **fissati** g **è una funzione di** μ. D'altra parte se fissiamo Λ e g_0 avremo:

$$\boxed{\mu \frac{d}{d\mu} G_n^{(0)}(\Lambda, g_0)\Big|_{\Lambda, g_0 \ \text{fissati}} = 0} \ , \tag{6.86}$$

e allora

$$\frac{n}{2}Z^{n/2-1}\mu\frac{dZ}{d\mu}\Bigg|_{\Lambda,g_0} G_n^R(g,\mu) + Z^{n/2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}G_n^R(g,\mu)\Bigg|_{\Lambda,g_0} + Z^{n/2}\mu\frac{\partial}{\partial g}G_n^R(g,\mu)\frac{\partial g}{\partial\mu}\Bigg|_{\Lambda,g_0} = O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) . \tag{6.87}$$

Da cui:

$$\frac{n}{2}\mu\frac{d\log Z}{d\mu}\Bigg|_{\Lambda,g_0} G_n^R(g,\mu) + \mu\frac{\partial}{\partial\mu}G_n^R(g,\mu)\Bigg|_{\Lambda,g_0} + \mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\Bigg|_{\Lambda,g_0}\frac{\partial G_n^R}{\partial g} = O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \ . \tag{6.88}$$

Definisco

$$\mu \frac{d}{d\mu} \log \sqrt{Z}\Big|_{\Lambda, g_0} = \gamma\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \ , \tag{6.89}$$

la **dimensione anomala del campo** ϕ; e

$$\mu \frac{dg}{d\mu}\Big|_{\Lambda, g_0} = \beta\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \ , \tag{6.90}$$

la **dimensione anomala dell'accoppiamento** g. Allora

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_n^R(g, \mu)\Bigg|_{\Lambda, g_0} + \beta\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \frac{\partial}{\partial g} G_n^R + n\gamma\left(g, \frac{\Lambda}{\mu}\right) G_n^R(g, \mu) = 0 + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \ . \tag{6.91}$$

Non ci resta che prendere $\lim \Lambda \to \infty$.

Ora il limite $\lim_{\Lambda \to \infty} \beta(g, \Lambda/\mu) = \beta(g)$ esiste così come $\lim_{\Lambda \to \infty} \gamma(g, \Lambda/\mu) = \gamma(g)$. Infatti se prendiamo $n = 2, 4$ possiamo impostare un sistema per ricavare β e γ in funzione di G_2^R e G_4^R, il cui limite per $\Lambda \to \infty$ esiste perchè la teoria è rinormalizzabile. Inoltre β e γ in questo limite non possono dipendere da μ essendo adimensionali. L'equazione:

$$\boxed{\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma(g)\right] G_n^R(g, \mu) = 0} \ , \tag{6.92}$$

è **l'equazione del gruppo di rinormalizzazione**. Poichè le funzioni di Green soddisfano quest'equazione, esse non possono dipendere arbitrariamente da g e μ.

6.5 Soluzione dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione

Poniamo

$$G_n^{(R)}(g, \mu) = \exp\left[-n \int_{\bar{g}}^{g} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg'\right] \phi_n(g, \mu) \ , \tag{6.93}$$

dove $\bar{g} = g(\bar{\mu})$ si riferisce ad un punto di sottrazione fissato $\bar{\mu}$. Allora:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g}\right) \phi_n(g, \mu) = 0 \ . \tag{6.94}$$

Ora ricordando la definizione della funzione β abbiamo:

$$\frac{dg}{\beta(g)} = \frac{d\mu}{\mu} \ . \tag{6.95}$$

Integrando troviamo

$$\int_{\bar{\mu}}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu} = \int_{\bar{g}}^{g} \frac{dg'}{\beta(g')} \ \to \ \ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \int_{\bar{g}}^{g} \frac{dg'}{\beta(g')} \ . \tag{6.96}$$

E' facile verificare che

$$\phi_n(g, \mu) = F_n\left(\ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} - \int_{\bar{g}}^{g} \frac{dg'}{\beta(g')}\right) = F(z) \ , \tag{6.97}$$

è soluzione dell'equazione. Cioè

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)F_n(z)=0\ . \tag{6.98}$$

Inoltre

$$\phi_n(\bar{g},\bar{\mu})=F_n(0)=G_n^{(R)}(\bar{g},\bar{\mu})\ . \tag{6.99}$$

Tenendo conto della condizione imposta dalla relazione differenziale

$$\mu\frac{\partial g}{\partial\mu}=\beta(g)\ , \tag{6.100}$$

vediamo che

$$\phi_n(\mu,g)\equiv\phi_n(\bar{\mu},\bar{g})=F_n(0)\ , \tag{6.101}$$

e quindi:

$$\boxed{G_n^{(R)}(\mu,g(\mu))=\exp\left[-n\int_{\bar{g}}^{g}\frac{\gamma(g')}{\beta(g')}dg'\right]G_n^{(R)}(\bar{\mu},\bar{g})}\ , \tag{6.102}$$

Le due funzioni di Green rinormalizzate $G_n^{(R)}(\bar{\mu},\bar{g})$ e $G_n^{(R)}(\mu,g)$ differiscono per una costante in moltiplicativa finita. Possiamo vedere facilmente che la fisica non cambia se usiamo una o l'altra. In generale consideriamo due set di funzioni di Green:

$$\begin{aligned}&\langle\phi_1,...,\phi_n\rangle\ ,\\ &c^n\langle\phi_1,...,\phi_n\rangle\ .\end{aligned} \tag{6.103}$$

Consideriamo quindi la matrice $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_{fi}=(i)^n\int ff...f^*f^*\hat{K}\hat{K}...\hat{K}\langle\frac{\phi_1}{\sqrt{Z\phi}}...\frac{\phi_n}{\sqrt{Z\phi}}\rangle\ . \tag{6.104}$$

Abbiamo visto che possiamo utilizzare come campo interpolante un qualsiasi operatore che ha elementi di matrice non nulli tra vuoto e stati ad 1 particella. Ma se

$$\langle 0|\frac{\phi_1}{\sqrt{Z\phi}}|\widetilde{p}\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\ , \tag{6.105}$$

evidentemente l'operatore $O=c\phi$ avrà:

$$\langle 0|\frac{O}{\sqrt{Z_O}}|\widetilde{p}\rangle=\langle 0|\frac{c\phi}{c\sqrt{Z_O}}|\widetilde{p}\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\neq 0\ . \tag{6.106}$$

Quindi sostituendo ϕ con $O(=c\phi)$ e $Z\phi$ con Z_O la matrice $\mathcal{S}$ rimane inalterata. In altre parole la matrice $\mathcal{S}$ (e quindi la sezione d'urto) è invariante sotto il gruppo di rinormalizzazione.

L'utilità del gruppo di rinormalizzazione risiede nella possibilità di migliorare i calcoli perturbativi. Consideriamo, ad esempio, la funzione a 4-punti Γ_R^4 ad un loop. A grandi p^2 il coefficiente di λ^2 contiene un logaritmo di p^2 che rovina l'accuratezza della teoria delle perturbazioni. Termini di ordine più elevato contengono 1 logaritmo extra per loop. Abbiamo quindi cosiddetto **problema dei grandi logaritmi**. Possiamo tentare di eliminare i grandi logaritmi attraverso una scelta opportuna del punto di sottrazione μ. Ovviamente un cambiamento di μ deve essere compensato da un cambiamento del valore dei parametri rinormalizzati finiti della teoria in modo da lasciare invarianti le quantità fisicamente rilevanti della teoria (sezioni d'urto, rate di decadimento,...). A questo punto i calcoli perturbativi sono validi se non ci sono grandi logaritmi e se contemporaneamente l'accoppiamento $g(\mu)$ è piccolo.

Consideriamo quindi la nostra funzione di Green $G_n^R(p_1, ..., p_n; \bar{g}, \bar{\mu})$. Perturbativamente avremo:

$$G_n^R(p_1, ..., p_n; \bar{g}, \bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}^n c_n(p_1, ..., p_n; \bar{\mu}) \ . \tag{6.107}$$

I I coefficienti c_n conterranno grandi logaritmi se $p_1, ..., p_n$ sono lontani dal punto di sottrazione $\bar{\mu}$. Supponiamo ad esempio che

$$p = \lambda\bar{p} \quad \text{con} \quad \lambda \gg 1 \ \text{ e } \ \bar{p} \sim \bar{\mu} \ , \tag{6.108}$$

(dove λ è un fattore di dilatazione, non la costante di accoppiamento).

Dall'equazione del GR sappiamo che:

$$G_n(p, \bar{g}, \bar{\mu}) = \exp\left[n \int_{\bar{g}}^{g} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg'\right] G_n(p, g(\mu), \mu) \ . \tag{6.109}$$

Ora notiamo che la funzione di Green G_n è una funzione omogenea di grado $D_n = 4-3n$, quindi:

$$G_n(p, g(\mu), \mu) = \mu^{D_n} G_n\left(\frac{p}{\mu}, g(\mu), 1\right) \ . \tag{6.110}$$

A questo punto scegliamo come punti di sottrazione μ:

$$\mu = \lambda\bar{\mu} \ , \tag{6.111}$$

allora

$$\begin{aligned} G_n(p, g(\mu), \mu) &= G_n(\lambda\bar{p}, g(\mu), \mu) = G_n(\lambda\bar{p}, g(\lambda\bar{\mu}), \lambda\bar{\mu}) = \\ &= (\lambda\bar{\mu})^{D_n} G_n\left(\frac{\lambda\bar{p}}{\lambda\bar{\mu}}, g\lambda, 1\right) = \lambda^{D_n} G_n(\bar{p}, g_\lambda, \bar{\mu}) \ , \end{aligned} \tag{6.112}$$

quindi

$$G_n(p, g(\mu), \mu) = \lambda^{D_n} G_n(\bar{p}, g(\lambda\bar{\mu}) = g_\lambda, \bar{\mu}) \ , \tag{6.113}$$

e in definitiva

$$\boxed{G_n(p = \lambda\bar{p}, \bar{g}, \bar{\mu}) = \exp\left[n \int_{\bar{g}}^{g} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg'\right] \lambda^{D_n} G_n(\bar{p}, g_\lambda, \bar{\mu})} \ . \tag{6.114}$$

Ora $G_n(\bar{p}, g_\lambda, \bar{\mu})$ può essere calcolato perturbativamente senza il problema dei grandi logaritmi poichè $\bar{p} \sim \bar{\mu}$. Ovviamente dobbiamo controllare come varia g_λ. Se g_λ aumenta non riesco comunque a migliorare la teoria delle perturbazioni.

Controlliamo quindi l'andamento della costante di accoppiamento. L'equazione di evoluzione è:

$$\boxed{\mu \frac{d}{d\mu} g(\mu) = \beta(g)} \ . \tag{6.115}$$

Ora poichè mi interessa sapere il comportamento$\lambda \to \infty$ ($\mu \to \infty$) allora se $\beta(g) > 0$ la teoria delle perturbazioni non funziona perchè $g(\mu)$ cresce. Ovviamente se $\beta(g) > 0$

allora per $\lambda \to 0$ ($\mu \to 0$)la teoria delle perturbazioni funziona perchè $g(\mu)$ diminuisce. Riassumendo:

$$
\begin{aligned}
&\lambda \to \infty \quad \beta > 0 \;, \quad \text{NO P.T. UV} \;, \\
&\lambda \to 0 \quad \beta > 0 \;, \quad \text{vale P.T. IR} \;, \quad \text{teoria asint. libere} \\
&\lambda \to \infty \quad \beta < 0 \;, \quad \text{vale P.T. UV} \;, \quad \text{teoria asint. libere} \\
&\lambda \to 0 \quad \beta < 0 \;, \quad \text{NO P.T. IR} \;.
\end{aligned}
\tag{6.116}
$$

Per la teoria libera ovviamente $\beta(g) = 0$.

Calcoliamo il primo termine dello sviluppo della β-function per la teoria $\lambda\phi^4$. Ricordiamo che

$$
g = g\left(g_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \;, \tag{6.117}
$$

e $\lim \Lambda \to \infty$ esist a g fissato, cioè se aggiustiamo g_0 in modo che g sia fissato. D'altra parte

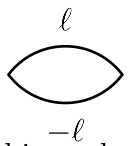
$$
\beta(g) = \mu \frac{d}{d\mu} g(\mu)\Big|_{\Lambda, g_0 \text{ fissati}} \;. \tag{6.118}
$$

Nella teoria $\lambda\phi^4$ abbiamo visto che:

$$
g = g_0 - \frac{3}{2} g_0^2 I_\Lambda(0) \;, \tag{6.119}
$$

dove

$$
I_\Lambda(0) = \int^\Lambda \frac{d\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2} \frac{1}{\ell^2} = \tag{6.120}
$$



(se prendiamo $\mu = 0$ come punto di sottrazione abbiamo la divergenza IR. Prendiamo $\mu \neq 0$). I_Λ è una funzione solo di $\frac{\mu}{\Lambda}$:

$$
I_\Lambda = I_\Lambda\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \;. \tag{6.121}
$$

Infatti abbiamo:

$$
\begin{aligned}
I_\Lambda(\mu) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(\mu-k)^2} = \int_0^1 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(\mu-k)^2 x + (1-x)k^2\right]^2} = \\
&= \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[\ell^2 + \mu^2 x(1-x)\right]^2} = \int_0^1 dx \int_0^\Lambda \frac{\ell^3 d\ell}{(2\pi)^4} \Omega_4 \frac{1}{\left[\ell^2 + \mu^2 x(1-x)\right]^2} = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda/\mu} \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{y^3 dy}{\left[y^2 + x(1-x)\right]^2} = I_\Lambda\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) \;,
\end{aligned}
\tag{6.122}
$$

avendo posto prima $\ell = k - \mu x$, e poi $\frac{\ell}{\mu} = y$.

Ora

$$
\int_0^{\Lambda/\mu} \frac{y^3}{[y^2+\alpha]^2} = \frac{1}{2}\left[\log(y^2+\alpha) - \frac{y^2}{y^2+\alpha}\right]_0^{\Lambda/\mu} = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{\Lambda^2/\mu^2+\alpha}{\alpha}\right) - \frac{(\Lambda/\mu)^2}{(\Lambda/\mu)^2+\alpha}\right] \;, \tag{6.123}
$$

e quindi

$$\begin{aligned}
I_\Lambda\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) &= \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4}\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2 x(1-x)}+1\right)-\frac{1}{1+x(1-x)\mu^2/\Lambda^2}\right]= \\
&= \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4}\frac{1}{2}\int_0^1 dx\left[\log\frac{\Lambda^2}{\mu^2}+\log\left[\frac{1}{x(1-x)}+\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right]-\frac{1}{1+x(1-x)\mu^2/\Lambda^2}\right]= \\
&= \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4}\left(\log\frac{\Lambda}{\mu}+\text{parte finita}\right)=\frac{1}{8\pi^2}\log\frac{\Lambda}{\mu}+\text{parte finita}\ ,
\end{aligned} \tag{6.124}$$

avendo usato $\Omega_4 = 2\pi^2$. Avremo allora:

$$g = g_0 - \frac{3}{16\pi^2}g_0^2\left(\log\frac{\Lambda}{\mu}+\text{parte finita}\right)\ . \tag{6.125}$$

In definitiva

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mu\frac{d}{d\mu}g\Big|_{\Lambda,g_0} = \frac{3}{16\pi^2}g_0^2 = \frac{3}{16\pi^2}g^2 > 0\ , \\
&\to\ \beta(g) = \frac{3}{16\pi^2}g^2 + O(g^3) > 0\ .
\end{aligned}} \tag{6.126}$$

Il segno della β-function è fissato dal 1^o ordine della teoria delle perturbazioni. Dalla discussione precedente, poichè $\beta(g) > 0$, la teoria è sotto controllo nell'IR (e quindi è sotto controllo lo spettro di massa), ma non nell'UV. Quindi:

$$\begin{aligned}
&\beta(g) = \beta_0 g^2 + O(g^3) \quad \text{con} \quad \beta_0 = \frac{3}{16\pi^2}\ , \\
&\to \log\frac{\mu}{\bar\mu} = \int_{\bar g}^{g(\mu)}\frac{dg'}{\beta(g')} = -\frac{1}{\beta_0 g'}\Big|_{\bar g}^{g} = \frac{1}{\beta_0}\left(\frac{1}{\bar g}-\frac{1}{g}\right)\ , \\
&\to \frac{1}{g} = \frac{1}{\bar g} - \beta_0\log\frac{\mu}{\bar\mu}\ , \\
&\to \boxed{g(\mu) = \frac{\bar g}{1-\beta_0\bar g\log\frac{\mu}{\bar\mu}}}\ .
\end{aligned} \tag{6.127}$$

Se μ cresce g cresce. Se μ diminuisce g diminuisce.

Riespandendo

$$g(\mu) = \bar g\left(1+\beta_0\bar g\log\frac{\mu}{\bar\mu}+...\right) = \bar g + \beta_0\bar g^2\log\frac{\mu}{\bar\mu}+... \tag{6.128}$$

Questa relazione può essere ottenuta anche in teoria delle perturbazioni da $g = g(g_0, \Lambda/\mu)$ eliminando g_0 e μ a favore di $\bar g$ e $\bar\mu$. Allora si otterranno anche altri termini del tipo $\bar g^3\log\mu/\bar\mu$. Quindi la relazione precedente è solo una somma ai logaritmi **dominanti**. Ai Log dominanti possiamo anche scrivere:

$$g = \frac{g_0}{1+\beta_0 g_0\log\frac{\Lambda}{\mu}} \sim g_0\left(1-\beta_0 g_0\log\frac{\Lambda}{\mu}+...\right)\ . \tag{6.129}$$

Riprendiamo l'equazione per la costante **running**:

$$g = \frac{g_0}{1+\beta_0 g_0\log\frac{\Lambda}{\mu}}\ , \quad \beta_0 > 0\ . \tag{6.130}$$

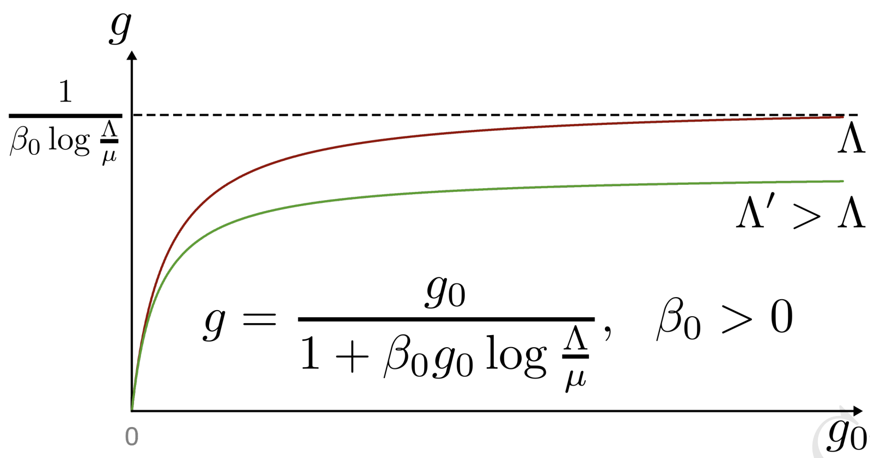


Figure 6.1: Caso $\beta_0 > 0$. Asintoto orizzontale.

Ora se cambiamo il cut-off Λ otteniamo un'altra curva. Il limite $\Lambda \to \infty$ deve essere effettuato a g fissato. Se g ha un asintoto orizzontale avremo l'andamento in figura 6.1 Se fissiamo g potrebbe non esistere il limite $\Lambda \to \infty$, nel qual caso la teoria non potrà essere **universale**, ma varrà solo in un certo intervallo di energia al di sotto del cut-off.

Vediamo che succede se $\beta_0 < 0$. In questo caso (vedi figura 6.2):

$$\boxed{g = \frac{g_0}{1 - |\beta_0| g_0 \log \frac{\Lambda}{\mu}}} \ . \tag{6.131}$$

Se fissiamo g in questo caso il limite $\Lambda \to \infty$ può esistere (teoria asintoticamente libera nell'UV).

Consideriamo la funzione di Green a 2-punti euclidea:

$$\langle 0|O(x)O(0)|0\rangle = \sum_n \langle 0|O(0,\vec{x})|n\rangle\langle n|O(0)|0\rangle e^{-E_n x^0} \to_{x^0\to\infty} \langle 0|O(0,\vec{x})|p\rangle\langle p|O(0)|0\rangle e^{-mx^0} \ , \tag{6.132}$$

dove m è la massa dello stato di singola particella a riposo. Se aspetto un tempo abbastanza lungo posso conoscere lo spettro di massa della teoria. Consideriamo la funzione di Green a 2-punti **rinormalizzata** nello spazio delle x:

$$G_2^R(\bar{x};\bar{g},\bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}^n c_n(\bar{x},\bar{\mu}) \ . \tag{6.133}$$

Dall'equazione del G.R. sappiamo che

$$G_2(\bar{x};\bar{g},\bar{\mu}) = e^{2\int_{\bar{g}}^{g(\mu)} \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} dg'} G_2(\bar{x};\mu,g(\mu)) \ . \tag{6.134}$$

Studiamo cosa accade quando:

$$\begin{aligned} \bar{x} &\to \lambda \bar{x} \ , \\ \bar{\mu} &\to \frac{\bar{\mu}}{\lambda} \ , \\ \lambda &\to \infty \ . \end{aligned} \tag{6.135}$$

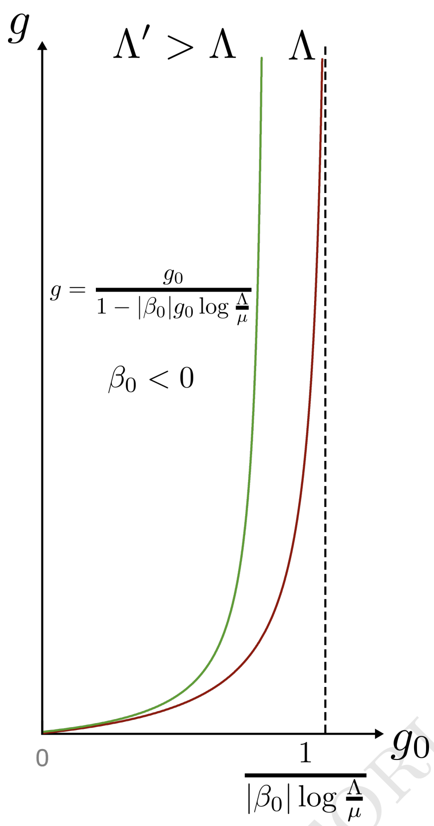


Figure 6.2: Caso $\beta_0 < 0$. Asintoto verticale: libertà asintotica UV

Dalla semplice analisi dimensionale:

$$G_2(x;\mu,g(\mu)) = \mu^{D_2} G(\mu x; g(\mu), 1) \ , \tag{6.136}$$

con $D_2 = -(4 - 3 \cdot 2) = 2$. Allora:

$$G_2(x;\mu,g(\mu)) = \mu^2 G(\mu x; g(\mu), 1) = \frac{\bar{\mu}^2}{\lambda^2} G(\bar{\mu}\bar{x}, g_\lambda, 1) = \frac{1}{\lambda^2} G(\bar{x}, g_\lambda, \bar{\mu}) \ , \tag{6.137}$$

con $g_\lambda = g(\mu = \bar{\mu}/\lambda) = g\left(\frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right)$ e quindi:

$$G_2(x = \lambda\bar{x}; \bar{g}, \bar{\mu}) = e^{2\int_{\bar{g}}^{g} \frac{\gamma}{\beta} dg'} G_2(x = \lambda\bar{x}; \mu, g(\mu)) = e^{2\int_{\bar{g}}^{g_\lambda} \frac{\gamma}{\beta} dg'} \frac{1}{\lambda^2} G_2(\bar{x}, \bar{\mu}, g_\lambda) \ , \tag{6.138}$$

da cui segue:

$$\boxed{G_2(\lambda\bar{x}; \bar{g}, \bar{\mu}) = \frac{1}{\lambda^2} \exp\left(2\int_{\bar{g}}^{g_\lambda} \frac{\gamma}{\beta} dg'\right) G_2(\bar{x}, \bar{\mu}, g_\lambda)} \ . \tag{6.139}$$

Per essere valida la T.P. dobbiamo avere:

$$\lim_{\lambda \to \infty} g_\lambda = 0 \ , \tag{6.140}$$

ovverosia

$$g_\lambda = g\left(\frac{\bar{\mu}}{\lambda}\right) \to g(0) = 0 \ , \tag{6.141}$$

cioè la teoria deve essere **asintoticamente libera** nell'IR.

6.6 Integrali gaussiani grassmaniani

$$\int dc_1 dc_2 e^{-c_i A_{ij} c_j} = \int dc_1 dc_2 \,(1 - c_i A_{ij} c_j) = -\int dc_1 dc_2 (c_1 A_{12} c_2 + c_2 A_{21} c_1) = A_{12} - A_{21} \ . \tag{6.142}$$

Quindi se A è simmetrica l'integrale è identicamente nullo. Possiamo prendere A antisimmetrica. Allora:

$$\int dc_1 dc_2 e^{-c_i A_{ij} c_j} = 2A_{12} = 2\sqrt{\det A} \ . \tag{6.143}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
&\int dc d\bar{c} e^{-a\bar{c}c} = \int dc d\bar{c}(1 - a\bar{c}c) = -a \ , \\
&\int dc_i d\bar{c}_i e^{-\bar{c}_i A_{ij} c_j} = -\int dc_i d\bar{c}_i \bar{c}_i A_{ij} c_j + \frac{1}{2}\int dc_i d\bar{c}_i (\bar{c}_i A_{ij} c_j)^2 = \\
&= -\int dc_1 d\bar{c}_1 dc_2 d\bar{c}_2 \Big[(\bar{c}_1 A_{11} c_1 + \bar{c}_1 A_{12} c_2 + \bar{c}_2 A_{21} c_1 + \bar{c}_2 A_{22} c_2) - \\
&- \frac{1}{2}(\bar{c}_1 A_{11} c_1 + \bar{c}_1 A_{12} c_2 + \bar{c}_2 A_{21} c_1 + \bar{c}_2 A_{22} c_2)(\bar{c}_1 A_{11} c_1 + \bar{c}_1 A_{12} c_2 + \bar{c}_2 A_{21} c_1 + \bar{c}_2 A_{22} c_2)\Big] = \\
&= \frac{1}{2}\int dc_1 d\bar{c}_1 dc_2 d\bar{c}_2 (\bar{c}_1 A_{11} c_1 \bar{c}_2 A_{22} c_2 + \bar{c}_1 A_{12} c_2 \bar{c}_2 A_{21} c_1 + \bar{c}_2 A_{21} c_1 \bar{c}_1 A_{12} c_2 + \bar{c}_2 A_{22} c_2 \bar{c}_1 A_{11} c_1) = \\
&= \frac{1}{2}(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} - A_{21}A_{12} + A_{11}A_{22}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \det A \ .
\end{aligned} \tag{6.144}$$

Generalizzando:

$$\boxed{\int \prod_i dc_i d\bar{c}_i e^{-\bar{c}_i A_{ij} c_j} = \det A} \ . \tag{6.145}$$

Consideriamo la lagrangiana di un sistema di **pioni** e **nucleoni**:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\mu_0^2}{2}\phi^2 + \bar{\psi}(\imath\partial_\mu\gamma^\mu - m_0)\psi + \imath g_0\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi - \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4} \ , \tag{6.146}$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{KIN}} + \mathcal{L}_{\text{MASS}} + \imath g_0\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4$.

Passiamo all'euclideo. La prescrizione per la continuazione analitica è:

$$\begin{aligned}
x_0 &= -\imath x_4 \ , \\
p_0 &= \imath p_4 \ .
\end{aligned} \tag{6.147}$$

Avremo:

$$\begin{aligned}
\exp\left[\imath\int d^4x \ \bar{\psi}(\imath\partial\!\!\!/ - m_0)\psi\right] &= \exp\left[\imath\int -\imath d^4x_E \ \bar{\psi}\left(\imath\frac{\partial}{-\imath\partial x_4}\gamma^0 - \imath\vec{\partial}\cdot\vec{\gamma} - m_0\right)\psi\right] = \\
&= \exp\left[\int d^4x_E \ \bar{\psi}\left((\imath\gamma^0)\imath\frac{\partial}{\partial x_4} - \imath\vec{\partial}\cdot\vec{\gamma} - m_0\right)\psi\right] = \\
&= \exp\left[\int d^4x_E \ \bar{\psi}(\imath\partial\!\!\!/ - m_0)\psi\right] \ ,
\end{aligned} \tag{6.148}$$

con

$$
\begin{aligned}
\gamma_0^E &= \imath\gamma^0 \ , \\
(\gamma_0^E)^\dagger &= -\gamma_0^E \ , \\
\not{\partial} &= \gamma_0^E\partial_0 + \gamma^i\partial_i \ .
\end{aligned}
\tag{6.149}
$$

Il funzionale generatore minkowskiano è:

$$
Z(J,\eta,\bar\eta) = \langle 0|\mathcal{T}\exp\left[\imath\int J\phi + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta\right]|0\rangle \ . \tag{6.150}
$$

Poniamo $J=0$ e consideriamo solo le sorgenti fermioniche:

$$
\begin{aligned}
Z(0,\eta,\bar\eta) &= 1 + \frac{1}{2!}(\imath)^2\langle 0|\mathcal{T}\int(\bar\eta\psi + \bar\psi\eta)d^4x\int(\bar\eta\psi + \bar\psi\eta)d^4y|0\rangle + ... \\
&= 1 + (\imath)^2\langle 0|\mathcal{T}\int\bar\eta(x)\psi(x)\bar\psi(y)\eta(y)d^4xd^4y|0\rangle + ...
\end{aligned}
\tag{6.151}
$$

Dal funzionale generatore otteniamo le funzioni di Green al solito modo:

$$
(-\imath)^2\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar\eta_j(x_2)\delta\eta_i(x_1)}\bigg|_{\eta=\bar\eta=0} = -\langle 0|\mathcal{T}(\psi_j(x_2)\bar\psi_i(x_1))|0\rangle \ . \tag{6.152}
$$

Il funzionale generatore euclideo è

$$
Z_E(J,\eta,\bar\eta) = \int\delta\phi\delta\bar\psi\delta\psi\exp\left[-S_E(\phi,\psi,\bar\psi) + \int J\phi + \bar\eta\psi + \bar\psi\eta\ d^4x_E\right] \ , \tag{6.153}
$$

con

$$
\begin{aligned}
S_E &= \int d^4x_E\ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{\mu_0^2}{2}\phi^2 + \bar\psi(\imath\not{\partial}_E - m_0)\psi - g_0\bar\psi\gamma^5\psi\phi + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 = \\
&= S_0(\phi,\bar\psi,\psi) - g_0\bar\psi\gamma^5\psi\phi + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 \ .
\end{aligned}
\tag{6.154}
$$

In $\bar\psi\psi$ l'integrale è gaussiano (non lo è in ϕ). Calcoliamo

$$
\begin{aligned}
&\int\delta\psi\delta\bar\psi\exp\left[-\int\bar\psi(x)D(\phi)\psi(x)\ d^4x + \int\bar\psi(x)\eta(x) + \bar\eta(x)\psi(x)d^4x\right] = \int\delta\psi\delta\bar\psi = e^{-\widetilde{S}} \ , \\
&\widetilde{S} = \int\bar\psi(x)D(\phi)\psi(x) - \bar\psi\eta - \bar\eta\psi = \int\bar\psi(\imath\not{\partial} - m_0 - g_0\phi\gamma^5)\psi - \bar\psi\eta - \bar\eta\psi \ , \\
&\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta\bar\psi} = D(\phi)\psi - \eta = (\imath\not{\partial} - m_0 - g_0\phi\gamma^5)\psi - \eta = 0 \ , \\
&\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta\psi} = -\bar\psi(\imath\overleftarrow{\not{\partial}} + m_0 + g_0\phi\gamma^5) - \bar\eta = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{6.155}
$$

Abbiamo il sistema

$$
\begin{aligned}
(\imath\not{\partial} - m_0 - g_0\phi\gamma^5)\psi - \eta &= 0 \ , \\
\bar\psi(\imath\overleftarrow{\not{\partial}} + m_0 + g_0\phi\gamma^5) + \bar\eta &= 0 \ .
\end{aligned}
\tag{6.156}
$$

In notazione compatta:

$$
\begin{aligned}
D(\phi)\psi - \eta &= 0 \ , \\
\bar\psi\overleftarrow{D}(\phi) + \bar\eta &= 0 \ .
\end{aligned}
\tag{6.157}
$$

Chiamo $\widetilde{\psi}$ e $\widetilde{\bar{\psi}}$ le soluzioni e faccio il cambio di variabili:

$$\begin{aligned} \psi &= \widetilde{\psi} + \chi \ , \\ \bar{\psi} &= \widetilde{\bar{\psi}} + \bar{\chi} \ . \end{aligned} \tag{6.158}$$

Avremo

$$\begin{aligned} &\int \delta\chi\delta\bar{\chi} \exp\left[-\int (\widetilde{\bar{\psi}} + \bar{\chi}) D(\phi)(\widetilde{\psi} + \chi) \ d^4x + \int (\widetilde{\bar{\psi}} + \bar{\chi})\eta + \bar{\eta}(\widetilde{\psi} + \chi) \ d^4x\right] = \\ &= \int \delta\chi\delta\bar{\chi} \exp\left[-\int \widetilde{\bar{\psi}} D(\phi)\widetilde{\psi} + \widetilde{\bar{\psi}} D(\phi)\chi + \bar{\chi} D(\phi)\widetilde{\psi} + \bar{\chi} D(\phi)\chi - \widetilde{\bar{\psi}}\eta - \bar{\chi}\eta - \bar{\eta}\widetilde{\psi} - \bar{\eta}\chi\right] = \\ &= \int \delta\chi\delta\bar{\chi} \exp\left[-\int \widetilde{\bar{\psi}} D(\phi)\chi + \bar{\chi} D(\phi)\chi - \bar{\eta}\widetilde{\psi} - \bar{\eta}\chi\right] \ . \end{aligned} \tag{6.159}$$

Ora

$$\begin{aligned} \int \widetilde{\bar{\psi}} D(\phi)\chi - \bar{\eta}\chi &= \int \widetilde{\bar{\psi}}(\imath\partial\!\!\!/ - m_0 - g_0\phi\gamma^5)\chi - \bar{\eta}\chi = -\int \widetilde{\bar{\psi}}(\imath\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m_0 + g_0\phi\gamma^5)\chi + \bar{\eta}\chi = \\ &= -\int \widetilde{\bar{\psi}}\overleftarrow{D}(\phi)\chi + \bar{\eta}\chi = 0 \ , \end{aligned} \tag{6.160}$$

e quindi

$$\int \delta\chi\delta\bar{\chi} \ \exp\left[-\int \bar{\chi} D(\phi)\chi - \bar{\eta}\widetilde{\psi}\right] \ . \tag{6.161}$$

Ora l'equazione $D(\phi)\widetilde{\psi} = \eta(x)$ può essere risolta come $\widetilde{\psi}(x) = \int d^4y \ S(x,y;\phi)\eta(y)$ dove S soddisfa $D(\phi)S(x,y;\phi) = \delta(x-y)$. Quindi:

$$\left(\int \delta\chi\delta\bar{\chi} \ \exp\left[-\int \bar{\chi} D(\phi)\chi\right]\right) e^{\int \bar{\eta}(x)\widetilde{\psi}(x)} = \exp\left[\int d^4x d^4y \ \bar{\eta} S(x,y;\phi)\eta(y)\right] \det[D(\phi)] \ . \tag{6.162}$$

Dopo aver eseguito l'integrale gaussiano fermionico troviamo quindi:

$$\boxed{\begin{aligned} Z_E(J,\eta,\bar{\eta}) &= \int \delta\phi \ e^{-S_0(\phi) - \int \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 + J\phi} \exp\left[\int \bar{\eta}(x) S(x,y;\phi)\eta(y) dx dy\right] \det[D(\phi)] \ , \\ S_0(\phi) &= \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{\mu_0^2}{2}\phi^2 \ , \\ D(\phi)S &= (\imath\partial\!\!\!/ - m_0 - g_0\phi\gamma^5) S(x,y;\phi) = \delta^4(x-y) \ . \end{aligned}} \tag{6.163}$$

Se $g_0 = 0$ abbiamo $S = S(x-y)$ e quindi $(\imath\partial\!\!\!/ - m_0)S(x-y) = \delta^4(x-y)$. Passando alla trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} &S(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \widetilde{S}(q) e^{\imath q(x-y)} \ , \\ &\to \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-q\!\!\!/ - m_0)\widetilde{S}(q) e^{\imath q(x-y)} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{\imath q(x-y)} \ , \\ &\to \widetilde{S}(q) = -\frac{1}{q\!\!\!/ + m_0} \ . \end{aligned} \tag{6.164}$$

Ora usando il fatto che $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$ nell'euclideo e quindi:

$$\not{q}^2 = q_\mu q_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = q_\mu q_\nu [\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \gamma^\mu \gamma^\nu] = q_\mu q_\nu [-2\delta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu] - 2q_E^2 - \not{q}^2 \ , \tag{6.165}$$

allora

$$\not{q}^2 = -q_E^2 \ . \tag{6.166}$$

Abbiamo

$$\widetilde{S}(q) = -\frac{1}{\not{q} + m_0} = -\frac{\not{q} - m_0}{\not{q}^2 - m_0^2} = -\frac{\not{q} - m_0}{-q_E^2 - m_0^2} = \frac{\not{q} - m_0}{q_E^2 + m_0^2} \ . \tag{6.167}$$

Torniamo al caso $g_0 \neq 0$. Dal funzionale generatore calcoliamo la funzione di Green euclidea:

$$\begin{aligned} G^2(x,y) = \langle 0 | \mathcal{T}[\psi_i(x)\bar{\psi}_j(y)] | 0 \rangle = -\frac{\delta^2 Z[J,\eta,\bar{\eta}]}{\delta\bar{\eta}_i(x)\delta\eta_j(y)}\bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \\ = \int \delta\phi \ e^{-S_0(\phi) - \frac{\lambda_0}{4!}\int \phi^4 + \int J\phi} \ S_{ij}(x,y;\phi) \det[D(\phi)] \ . \end{aligned} \tag{6.168}$$

Non conosciamo né $S_{ij}(x,y;\phi)$, né $\det[D(\phi)]$. Sviluppiamo perturbativamente S in potenze dell'accoppiamento g_0. All'ordine più basso $(g_0)^0$: $S = S_0(x-y)$.

Per scrivere lo sviluppo perturbativo di S torniamo all'equazione differenziale:

$$(\imath\not{\partial} - m_0 - g_0\phi\gamma^5) S(x,y;\phi) = \delta^4(x-y) \ , \tag{6.169}$$

che possiamo scrivere come

$$(\imath\not{\partial} - m_0) S(x,y;\phi) = \delta^4(x-y) + g_0\phi\gamma^5 S(x,y;\phi) \ , \tag{6.170}$$

che possiamo trasformare in un'equazione integrale:

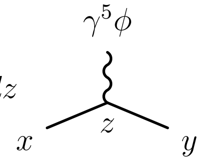
$$\boxed{S(x,y;\phi) = S_0(x-y) + g_0 \int dz \ S_0(x-z)\gamma_5\phi(z)S(z,y;\phi)} \ . \tag{6.171}$$

Applicando $(\imath\not{\partial}_x - m_0)$ troviamo proprio:

$$\begin{aligned} (\imath\not{\partial}_x - m_0) S(x,y;\phi) &= \delta^4(x-y) + g_0 \int dz \ \delta^4(x-z)\gamma_5\phi(z)S(z,y;\phi) = \\ &= \delta^4(x-y) + g_0\gamma_5\phi(x)S(x,y;\phi) \ , \end{aligned} \tag{6.172}$$

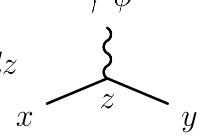
cioè l'equazione precedente. A questo punto possiamo procedere perturbativamente. Quindi all'ordine g_0 avremo:

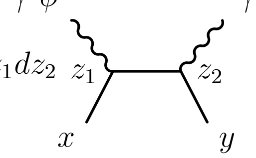
$$S(x,y;\phi) = S_0(x-y) + g_0 \int dz \ S_0(x-z)\gamma_5\phi(z)S_0(z-y) + O(g_0^2) =$$

x —— y $\quad + g_0 \int dz$ 

$+ O(g_0^2)$. (6.173)

Al secondo ordine avremo:

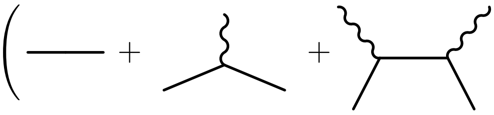
$S(x,y;\phi) = x$ —— y $\quad + g_0 \int dz$ 

$+ g_0^2 \int dz_1 dz_2$ 

$+ O(g_0^3)$ (6.174)

Quindi

$$\boxed{\langle\psi_i(x)\bar{\psi}_j(y)\rangle = \int \delta\phi\ e^{-S_0(\phi)-\frac{\lambda_0}{4!}\int\phi^4+\int J\phi}\Bigg(\quad} \tag{6.175}$$



$$\boxed{+\dots\Bigg)\det[D(\phi)]} \ .$$

Ora dobbiamo capire cosa dà il $\det[D(\phi)]$. Usiamo l'identità: $\det A = e^{\mathrm{tr}\log A}$, e trasformiamo l'operatore differenziale $(\imath\partial\!\!\!/ - m_0 - g_0\phi\gamma^5)$ in un operatore integrale:

$$\boxed{K(x,y) = (\imath\partial\!\!\!/_x - m_0 - g_0\phi_x\gamma^5)\delta^4(x-y)}\ , \tag{6.176}$$

cosicché avremo

$$\int dy\ K(x,y)\psi(y) = D(\phi)\psi(x)\ . \tag{6.177}$$

D'altra parte possiamo riscrivere $K(x,y)$ come:

$$\boxed{K(x,y) = (\imath\partial\!\!\!/_x - m_0)\{\delta^4(x-y) - g_0S_0(x-y)\gamma^5\phi(y)\}}\ . \tag{6.178}$$

Prendendo il det avremo

$$\det K = \det(\imath\partial\!\!\!/ - m_0)\det\{\delta^4(x-y) - g_0S_0(x-y)\gamma^5\phi(y)\}\ . \tag{6.179}$$

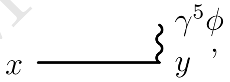
Ora il $\det(\imath\partial\!\!\!/-m_0)$ si semplifica quando dividiamo per $Z[0]$. Valutiamo quindi $\det\{\delta^4(x-y) - g_0S_0(x-y)\gamma^5\phi(y)\}$. Ponendo $B = S_0(x-y)\gamma^5\phi(y)$ avremo

$$\det(I-g_0B) = \exp\left[\mathrm{tr}\log(I-g_oB)\right] = \exp\left(-\mathrm{tr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_0^n}{n}B^n\right) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_0^n}{n}\mathrm{tr}B^n\right)\ , \tag{6.180}$$

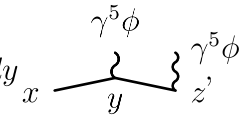
e quindi

$$\boxed{\det(I-g_0B) = e^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_0^n}{n}(-)\mathrm{tr}(B^n)}}\ . \tag{6.181}$$

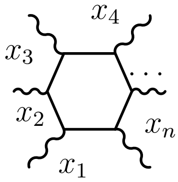
Ora

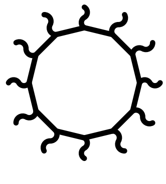
$B_{ij} = [S_0(x-y)\gamma^5]_{ij}\phi(y) =$ 

,

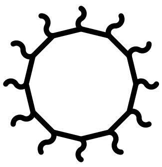
$B^2 = (B_{ij})^2 = B_{ik}B_{kj} = \int [S_0(x-y)\gamma^5]_{ik}[S_0(y-z)\gamma^5]_{kj}\phi(y)\phi(z)\ dy = \int dy$ 

,

$\rightarrow\ \mathrm{tr}(B^n) = \int dx_1 \dots dx_n$ 

$=$  ,

$$\rightarrow\ \det(I-g_0B) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_0^n}{n}(-)\quad\right. \tag{6.182}$$



$$\left.\quad\right] = \det[D(\phi)]\ .$$

Il logaritmo del $\det[D(\phi)]$ dà tutti i diagrammi a 1-loop. Espandendo l'esponenziale si ottengono tutti i diagrammi con un numero arbitrario di loop.

6.7 Integrazione sul gruppo

Consideriamo un gruppo continuo, ad esempio $SU(N)$ con la parametrizzazione esponenziale $e^{\imath\lambda_a t_a}$. Questo gruppo può essere pensato come una varietà differenziabile, almeno nell'intorno dell'identità, e i parametri λ_a come coordinate sulla varietà.

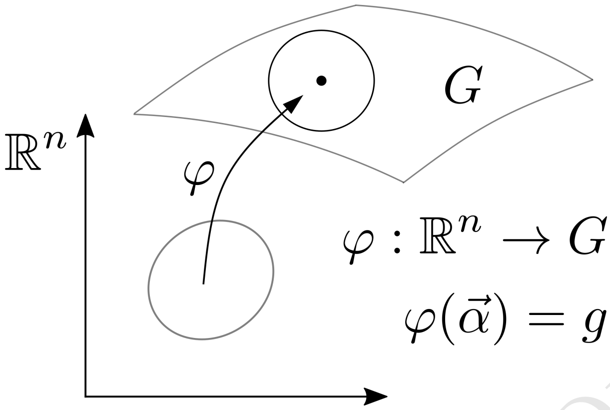


Figure 6.3

La struttura differenziabile è indotta dalla trasformazione (mapping) differenziabile di carte compatibili (ϕ, U) e (ψ, V):

$$\begin{aligned} &\psi^{-1} \circ \phi : U \to V \ , \\ &\psi^{-1}(\phi(\alpha)) = \beta \ , \end{aligned} \tag{6.183}$$

con

$$\begin{aligned} &\phi(U) \cap \psi(V) \neq 0 \ , \\ &\phi(\alpha) \in \phi(U) \cap \psi(V) \ . \end{aligned} \tag{6.184}$$

Precisamente

$$\psi^{-1} \circ \phi : U \to \phi(U) \cap \psi(V) \to \psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(V)) \ . \tag{6.185}$$

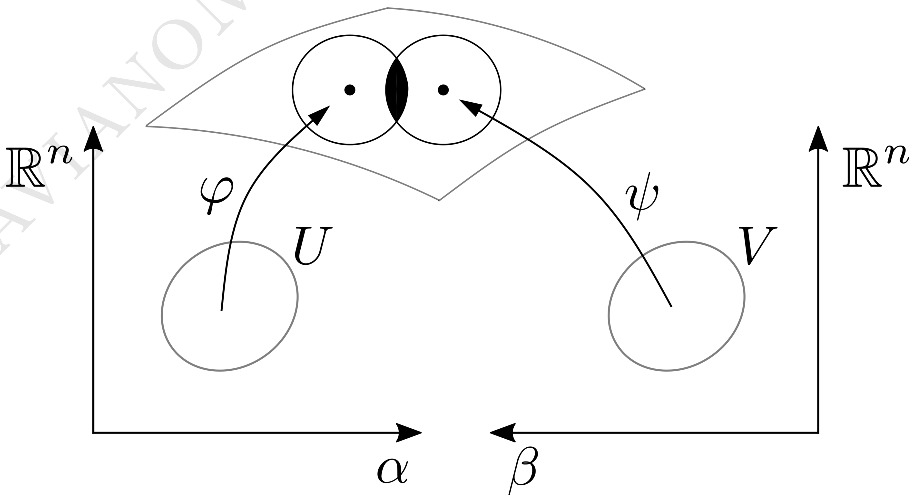


Figure 6.4

Possiamo anche definire una funzione sul gruppo $f(g)$:

$$f : G \to \mathbb{R} \text{ (or } \mathbb{C}) \ , \tag{6.186}$$

Di nuovo $f(g) = f(\phi(\alpha)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. f è detta differenziabile se $f \circ \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta differenziabile.

Vogliamo definire un'**integrazione sul gruppo**:

$$\int_G f(g)\ dg\ . \tag{6.187}$$

Quest'integrale dipende dalla parametrizzazione del gruppo. Definiamo quindi l'integrale di $f(g)$ come

$$\boxed{\int_G f(g)\ d\mu(g)\ \equiv\ \int f(g)\mu(g)\ dg}\ , \tag{6.188}$$

dove $\mu(g)$ è una funzione invariante sotto il gruppo, cioè una **misura invariante**. In altre parole

$$\int_G f(g)\ d\mu(g)\ =\ \int_G f(\widetilde{g} \circ g) d\mu(g)\ , \tag{6.189}$$

dove $\widetilde{g}$ è un qualsiasi elemento del gruppo e questa relazione deve valere $\forall f$.

Inoltre supponiamo che $\widetilde{g} \circ g = g'$ sia **invertibile**. Avremo

$$\int_G f(g)\mu(g)\ dg\ =\ \int_G f(\widetilde{g} \circ g)\mu(g)\ dg\ . \tag{6.190}$$

Ora

$$\widetilde{g} \circ g = g'\ \to\ g = \widetilde{g}^{-1} \circ g'\ , \tag{6.191}$$

e

$$dg = \left|\frac{\partial g}{\partial g'}\right| dg' = \left|\frac{\partial(\widetilde{g}^{-1} \circ g')}{\partial g'}\right| dg'\ , \tag{6.192}$$

e quindi

$$\int_G f(g')\mu(\widetilde{g}^{-1} \circ g') \left|\frac{\partial(\widetilde{g}^{-1} \circ g')}{\partial g'}\right| dg' = \int f(g)\mu(\widetilde{g}^{-1} \circ g) \left|\frac{\partial(\widetilde{g}^{-1} \circ g)}{\partial g}\right| dg\ , \tag{6.193}$$

con

$$\boxed{\mu(g) = \mu(\widetilde{g}^{-1} \circ g) \left|\frac{\partial(\widetilde{g}^{-1} \circ g)}{\partial g}\right|}\ , \tag{6.194}$$

la **misura invariante**. In particolare se $\widetilde{g} = g$:

$$\mu(g) = \mu(e) \left|\frac{\partial(\widetilde{g}^{-1} \circ g)}{\partial g}\right|_{\widetilde{g}=g}\ . \tag{6.195}$$

Evidentemente la mappa

$$g\ \to\ g' = \widetilde{g} \circ g\ , \tag{6.196}$$

corrisponde proprio ad una riparametrizzazione del gruppo e poiché l'integrale è esteso a tutto il gruppo e la misura è invariante per questa riparametrizzazione, allora l'integrale così definito **non dipende dalla parametrizzazione**.

Consideriamo ora una teoria di gauge **non abeliana**, una teoria invariante sotto un certo gruppo di trasformazioni locali. Il gruppo di simmetria è uno gruppo di Lie ai cui elementi permettiamo di dipendere dalle coordinate dello spazio-tempo x^μ. Indichiamo con $g(\alpha)$ un elemento del gruppo, dove $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sono i parametri continui del gruppo. Parametrizziamo l'identità del gruppo con $g(0) = e$. Un elemento del gruppo infinitamente vicino all'elemento identità sarà:

$$g(\alpha) = e + \frac{\partial g}{\partial \alpha^a}\Big|_{\alpha=0} d\alpha^a + O(\alpha^2) = e + \imath t^a \alpha^a \ , \tag{6.197}$$

dove t^a sono i generatori del gruppo in qualche rappresentazione. Se la rappresentazione è unitaria i t^a sono hermitiani. Nel caso di $SU(N)$ saranno matrici $N \times N$ a entrate complesse che soddisfano la condizione di unitarietà:

$$U^\dagger U = I \ \rightarrow \ UU^\dagger = I \ \rightarrow \ U_{ij}(U^\dagger)_{jk} = U_{ij}U^*_{kj} = I \ . \tag{6.198}$$

Questa condizione equivale a N condizioni reali $U_{ik}U^*_{ki}$ e $N(N-1)/2$ condizioni complesse. Quindi parametri indipendenti saranno $N^2 - N - N(N-1) = 2N^2 - N - N^2 + N = N^2$ meno una condizione reale sul $\det U = 1$ e quindi $(N^2 - 1)$ parametri indipendenti. Nella rappresentazione esponenziale $U = e^{\imath \lambda_a t^a}$ con t^a generatori del gruppo e poiché $\det U = e^{\mathrm{tr}\,\log U} = e^{\imath \lambda_a \mathrm{tr} t^a} = 1$ allora $\mathrm{tr} t^a = 0$, cioè t^a sono hermitiani a traccia nulla.

Tornando alle trasformazioni infinitesime possiamo definire la struttura del gruppo al seguente modo:

$$\begin{aligned} g(\alpha) \circ g(\beta) &= g(f(\alpha, \beta)) \ , \\ f(0,0) &= 0 \ , \\ f(\alpha, 0) &= \alpha \ , \\ f(0, \beta) &= \beta \ , \end{aligned} \tag{6.199}$$

e quindi

$$f_a(\alpha, \beta) = \alpha^a + \beta^a + f^a_{bc}\alpha^b \beta^c \ , \tag{6.200}$$

(termini quadratici in α o β violano la condizione precedente). Dunque

$$g(\alpha) = e + \imath t^a \alpha^a + \frac{\imath^2}{2}\alpha^a \alpha^b t^{ab} \ . \tag{6.201}$$

Quindi

$$\begin{aligned} g(\alpha) \circ g(\beta) &= \left(1 + \imath t^a \alpha^a + \frac{\imath^2}{2}\alpha^a \alpha^b t^{ab}\right)\left(1 + \imath t^a \beta^a + \frac{\imath^2}{2}\beta^a \beta^b t^{ab}\right) + ... = \\ &= 1 + \imath t^a \alpha^a + \frac{\imath^2}{2}\alpha^a \alpha^b t^{ab} + \imath t^a \beta^a + \imath \alpha^a \beta^b t^a t^b + \frac{\imath^2}{2}\beta^a \beta^b t^{ab} = \\ = g(f(\alpha, \beta)) &= \left(1 + \imath f_a t^a + \frac{\imath^2}{2} t^{ab} f_a f_b + ...\right) = \\ &= 1 + \imath t^a(\alpha^a + \beta^a + f^{abc}\alpha^b \beta^c) + \frac{\imath^2}{2} t^{ab}(\alpha^a + \beta^a + ...)(\alpha^b + \beta^b + ...) = \\ &= 1 + \imath t^a \alpha^a + \imath t^a \beta^a + \imath t^a f^{abc}\alpha^b \beta^c + \frac{\imath^2}{2} t^{ab}\alpha^a \alpha^b + \frac{\imath^2}{2} t^{ab}\beta^a \beta^b + \\ &+ \frac{\imath^2}{2} t^{ab}\alpha^a \beta^b + \frac{\imath^2}{2} t^{ab}\alpha^b \alpha^a \ , \end{aligned} \tag{6.202}$$

da cui

$$\begin{aligned} &\rightarrow \imath \alpha^a \beta^b t^a t^b = \imath^2 t^{ab}\alpha^a \beta^b + \imath t^a f^{abc}\alpha^b \beta^c \\ &\rightarrow \imath t^{ab}\alpha^a \beta^b = t^a t^b \alpha^a \beta^b - f^{cab}\alpha^a \beta^b t^c \\ &\rightarrow t^{ab} = -\imath t^a t^b + \imath f^{cab} t^c \ . \end{aligned} \tag{6.203}$$

Poichè t^{ab} è simmetrico in a, b avremo

$$\begin{aligned}
& t^{ba} = t^{ab} = -\imath t^b t^a + \imath f^{cba} t^c \\
\rightarrow \; & -\imath t^a t^b + \imath t^b t^a + \imath (f^{cab} - f^{cba}) t^c = 0 \\
& -\imath [t^a, t^b] = -\imath (f^{cab} - f^{cba}) t^c = C^{ab}_c t^c \\
\rightarrow \; & \boxed{[t^a, t^b] \; = \; \imath C^{ab}_c t^c} \; ,
\end{aligned} \tag{6.204}$$

dove $C^{ab}_c = -\imath (f^{cab} - f^{cba})$ sono le **costanti di struttura** del gruppo.

La trasformazione locale che ci interessa corrisponde ad un elemento del gruppo $g(\alpha(x)) = g(x)$ che induce una trasformazione unitaria sui campi:

$$\psi(x) \; \rightarrow \; \psi^g(x) = U(g(x))\psi(x) = U(x)\psi(x) \; . \tag{6.205}$$

Poichè il termine cinetico non è invariante dobbiamo ridefinirlo. Definiamo un operatore (**non locale**) che agisce sui campi nel modo seguente:

$$\psi_T(y; x) \; = \; V(y, x)\psi(x) \; , \tag{6.206}$$

dove l'operatore V trasporta $\psi(x)$ da $x \rightarrow y$, e richiediamo che sotto una trasformazione locale $\psi_T(y; x)$ trasformi come un campo in y:

$$\begin{aligned}
U(y)\psi_T(y; x) = \psi'_T(y; x) = V'(y, x)\psi'(x) = U(y)\psi_T(y; x) = U(y)V(y, x)\psi(x) = \\
= U(y)V(y, x)U^{-1}(x)\psi'(x) \; ,
\end{aligned} \tag{6.207}$$

da cui

$$\boxed{V'(y, x) = U(y)V(y, x)U^{-1}(x)} \; . \tag{6.208}$$

Consideriamo un trasporto infinitesimo da $x \rightarrow x + dx$. Avremo

$$\psi_T(x{+}dx; x) = V(x{+}dx, x)\psi(x) = [1{+}\partial_\mu V dx^\mu{+}...]\psi(x) = [1{+}\imath A_\mu(x) dx^\mu]\psi(x) \; , \tag{6.209}$$

V è un operatore nella rappresentazione che ha come base i campi $\psi(x)$, così come $A_\mu(x)$.

$$\boxed{\psi_T(x + dx; x) = \psi(x) + \imath A_\mu(x) dx^\mu \psi(x)} \; . \tag{6.210}$$

Vediamo come trasforma $A_\mu(x)$:

$$\begin{aligned}
[1 + \imath A'_\mu(x) dx^\mu] &= U(x + dx)[1 + \imath A_\mu(x) dx^\mu] U^{-1}(x) = \\
&= [U(x) + \partial_\mu U(x) dx^\mu][1 + \imath A_\mu(x) dx^\mu] U^{-1}(x) = \\
&= U(x)U^{-1}(x) + \imath U(x) A_\mu(x) U^{-1}(x) dx^\mu + (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x) dx^\mu + ... \\
&= 1 + [\imath U A_\mu U^{-1} + (\partial_\mu U) U^{-1}] dx^\mu \\
&\rightarrow \; \imath A'_\mu(x) = \imath U A_\mu U^{-1} + (\partial_\mu U) U^{-1} \\
&\rightarrow \; \boxed{A'_\mu = U(x) A_\mu U^{-1}(x) - \imath (\partial_\mu U) U^{-1}(x)} \; .
\end{aligned} \tag{6.211}$$

Sotto una trasformazione infinitesima $U(x) = 1 + \imath \lambda_a(x) t^a$ avremo

$$\begin{aligned}
A'_\mu(x) &= (1 + \imath\lambda) A_\mu (1 - \imath\lambda) - \imath \Big(\partial_\mu (1 + \imath\lambda)\Big)(1 - \imath\lambda) = \\
&= A_\mu - \imath A_\mu \lambda + \imath \lambda A_\mu - \imath \partial_\mu (\imath\lambda) = \\
&= A_\mu + \imath [\lambda, A_\mu] + \partial_\mu \lambda \; ,
\end{aligned} \tag{6.212}$$

e dunque:

$$\boxed{A'_\mu(x) = A_\mu + \imath[\lambda, A_\mu] + \partial_\mu \lambda} \; . \tag{6.213}$$

Espandendo A nella base dei generatori del gruppo:

$$\begin{aligned} A'^a_\mu(x) t^a &= A^a_\mu t^a + \imath[\lambda_b t^b, A^c_\mu t^c] + \partial_\mu \lambda^a t^a = \\ &= A^a_\mu t^a + \imath \lambda_b A^c_\mu \imath f^{bca} t^a + \partial_\mu \lambda^a t^a = \\ &= A^a_\mu t^a - \lambda_b A^c_\mu f^{abc} t^a + \partial_\mu \lambda^a t^a \ , \end{aligned} \tag{6.214}$$

e dunque:

$$\boxed{A'^a_\mu(x) = A^a_\mu(x) - f^{abc} \lambda_b(x) A^c_\mu(x) + \partial_\mu \lambda^a} \; . \tag{6.215}$$

Costruiamo il differenziale **covariante**:

$$\begin{aligned} D\psi(x) &= \psi(x + dx) - \psi_T(x + dx; x) = \\ &= \psi(x) + d\psi(x) - \psi(x) - \imath A_\mu(x) \psi(x) dx^\mu = \\ &= (\partial_\mu \psi(x) - \imath A_\mu(x) \psi(x)) dx^\mu \\ &\to \ D\psi(x) = d\psi - \imath A_\mu(x) \psi(x) \ , \end{aligned} \tag{6.216}$$

e dunque

$$\boxed{D_\mu \psi(x) \ = \ \partial_\mu \psi(x) - \imath A_\mu(x) \psi(x)} \; . \tag{6.217}$$

Vediamo come trasforma $D_\mu \psi(x)$:

$$\begin{aligned} (D_\mu \psi(x))' = (D_\mu \psi' - \imath A'_\mu \psi') &= \partial_\mu(U(x)\psi(x)) - \imath[U A_\mu U^{-1} - \imath(\partial_\mu U)U^{-1}]U\psi(x) = \\ &= (\partial_\mu U)\psi + U(\partial_\mu \psi) - \imath U A_\mu \psi - (\partial_\mu U)\psi = \\ &= U(\partial_\mu \psi - \imath A_\mu \psi) = U(x) D_\mu \psi(x) \ , \end{aligned} \tag{6.218}$$

e dunque:

$$\boxed{(D_\mu \psi(x))' = U(x)(D_\mu \psi(x))} \; . \tag{6.219}$$

Il termine cinetico costruito con la derivata covariante è **invariante**.

La libertà di ridefinire i campi in ogni punto dello spazio attraverso una trasformazione di gauge (indipendente punto per punto) senza alterare la teoria rende problematico definire un termine cinetico. Fisicamente il termine cinetico è una misura della variazione del campo nello spazio (variazione dell'intensità). Il differenziale ordinario $\psi(x + dx) - \psi(x)$ non è attendibile poiché dipende dall'orientazione dei campi che possiamo cambiare indipendentemente nei due punti.

Il differenziale $D\psi = \psi(x+dx) - \psi_T(x+dx; x)$ non ha la stessa ambiguità, poiché i due campi ruotano simultaneamente dello stesso angolo, di modo che il loro angolo relativo resti fissato. D'altra parte $\psi_T(x + dx; x)$ è un campo direttamente collegato con $\psi(x)$ attraverso le **connessioni** $A_\mu(x)$. In sostanza $\psi_T(x + dx; x)$ è una "copia" di $\psi(x)$ in $x + dx$ che ruota come $\psi(x + dx)$. Per un trasporto finito $\psi_T(y; x)$ dipende criticamente dal cammino scelto per andare da $x \to y$. Ricaviamo l'operatore di trasporto finito da $x \to y$.

Notiamo che

$$\boxed{D_\mu \psi_T \ = \ 0} \; , \tag{6.220}$$

cioè

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - \imath A_\mu(x))\psi_T \ &= \ 0 \ , \\ \partial_\mu \psi_T \ &= \ \imath A_\mu(x) \psi_T \ , \end{aligned} \tag{6.221}$$

che possiamo riscrivere come equazione integrale:

$$\psi_T(y;x) \;=\; \psi(x) + \imath \int_x^y A_\mu(x')\psi_T(x';x)dx' \;. \tag{6.222}$$

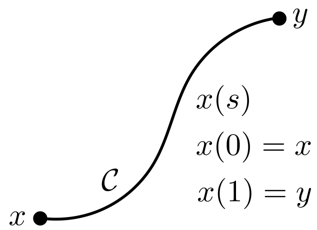


Figure 6.5

Iterando otteniamo:

$$\begin{aligned}
\psi_T(y;x) \;&= \psi(x) + \imath \int_x^y A_\mu(x') \left[\psi(x) + \imath \int_x^{x'} A_\mu(x'')\psi_T(x'';x)dx'\right] dx' = \\
&= \psi(x) + \imath \int_x^y A_\mu(x')\psi(x)dx' + \imath^2 \int_x^y dx' \int_x^{x'} dx'' A_\mu(x')A_\mu(x'')\psi_T(x'';x) = \\
&= \left[1 + \imath \int_x^y A_\mu(x')dx' + \imath^2 \int_x^y dx' \int_x^{x'} dx'' A_\mu(x')A_\mu(x'') + ...\right]\psi(x) = \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \imath^n \int_x^y dx^1 ... \int_x^{x^{n-1}} dx^n A_\mu(x^1)...A_\mu(x^n)\right]\psi(x) = \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \imath^n \int_0^1 ds_1 ... \int_0^{s_{n-1}} ds_n A_\mu(x(s_1))...A_\mu(x(s_n)) \frac{dx^1}{ds_1}...\frac{dx^n}{ds_n}\right] = \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\imath^n}{n!} \int_0^1 ds_1 ... \int_0^1 ds_n \; \mathcal{P}\left\{A_\mu(x(s_1))\frac{dx^1}{ds_1}...A_\mu(x(s_n))\frac{dx^n}{ds_n}\right\}\right] = \\
&= \exp\left[\imath\mathcal{P}\int_0^1 ds \; A_\mu(x(s)) \cdot \frac{dx^\mu}{ds}\right] \;,
\end{aligned} \tag{6.223}$$

e quindi otteniamo il risultato:

$$\boxed{V(y,x) \;=\; \exp\left[\imath\mathcal{P}\int_0^1 ds \; A_\mu(x(s)) \cdot \frac{dx^\mu}{ds}\right]} \;, \tag{6.224}$$

dove $\mathcal{P}$ è un operatore di ordinamento che ordina le connessioni in base alla loro posizione sul cammino dalla più vicina al punto iniziale alla più lontana. Questo è palesemente un operatore non locale e inoltre dipende dal cammino $\mathcal{C}$ che unisce il punto iniziale al punto finale, giacché le connessioni variano punto per punto. In realtà non ci interessa un trasporto finito del campo, in quanto perderemmo la natura locale del campo stesso.

Per effettuare un trasporto infinitesimo è sufficiente un campo locale $A_\mu(x)$ che forza ψ_T a ruotare come un campo in $(x + dx)$. Infatti accoppiandosi con $\psi(x)$ induce la rotazione in $(x+dx)$. Attraverso il campo $A_\mu(x)$ è possibile costruire un termine cinetico invariante di gauge. Dobbiamo confrontare $\psi(x + dx)$ non con $\psi(x)$ ma con $\psi(x) +$

$\imath A_\mu(x)\psi(x)dx^\mu$. Possiamo interpretare questo fatto dicendo che il campo $\psi(x)$ nel tratto dx^μ dello spazio-tempo sperimenta un'interazione con $A_\mu(x)$ che in un certo senso lo vincola ad orientarsi in una certa direzione. Quest'interazione con $A_\mu(x)$ forza questo campo ψ_T a trasformare come un campo in $(x+dx)$. Quando andiamo a confrontare questo campo mobile ψ_T con il campo $\psi(x+dx)$ che non è stato trascinato nello spazio-tempo (a differenza di ψ_T) abbiamo una misura reale della variazione del campo, che non dipende dalla gauge. In altre parole il campo $A_\mu(x)$ determina e definisce un'evoluzione del campo invariante di gauge, cioè indipendente dall'orientazione assoluta del campo nel punto x.

Consideriamo il commutatore:

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\psi(x) &= [(\partial_\mu - \imath A_\mu)(\partial_\nu - \imath A_\nu) - (\partial_\nu - \imath A_\nu)(\partial_\mu - \imath A_\mu)]\psi(x) = \\ &= [\partial_\mu\partial_\nu - \imath A_\nu\partial_\mu - \imath(\partial_\mu A_\nu) - \imath A_\mu\partial_\nu - A_\mu A_\nu - \partial_\nu\partial_\mu + \imath A_\mu\partial_\nu + \imath(\partial_\nu A_\mu) + \\ &+ \imath A_\nu\partial_\mu + A_\nu A_\mu]\psi(x) = \\ &= [-\imath(\partial_\mu A_\nu) - [A_\mu, A_\nu] + \imath(\partial_\nu A_\mu)]\,\psi(x) = \\ &= \imath\,(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \imath[A_\mu, A_\nu])\,\psi(x) = \imath G_{\mu\nu}\psi(x)\ ,\end{aligned} \tag{6.225}$$

con

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \imath[A_\mu, A_\nu]}\ . \tag{6.226}$$

Espandendo nella base dei generatori avremo:

$$\begin{aligned}G^a_{\mu\nu}t^a &= (\partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu)t^a + \imath A^b_\mu A^c_\nu[t^b, t^c] = \\ &= (\partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu)t^a + \imath A^b_\mu A^c_\nu \imath f^{bca}t^a = \\ &= (\partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu - f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)t^a\ ,\end{aligned} \tag{6.227}$$

e quindi

$$\boxed{G^a_{\mu\nu} = \partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu - f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu}\ . \tag{6.228}$$

Consideriamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\imath \not{D} - m)\psi\ . \tag{6.229}$$

Questa è invariante di gauge. La corrente associata alla simmetria di gauge è

$$J_\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi}\delta\psi = \imath\bar{\psi}\gamma^\mu \imath\alpha\psi = -\alpha_a\bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi\ . \tag{6.230}$$

D'altra parte l'equazione del moto per A_μ dà:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^a_\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi = 0\ . \tag{6.231}$$

Cioè **la corrente non fluisce**. Per far fluire la corrente dobbiamo inserire un termine cinetico per A_μ. Consideriamo:

$$([D_\mu, D_\nu]\psi(x))'\ . \tag{6.232}$$

Osserviamo che $(D_\mu\psi(x))' = D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x) = U(x)D_\mu U^{-1}(x)\psi'(x)$, allora

$$\begin{aligned}D'_\mu &= U(x)D_\mu U^{-1}(x)\ , \\ [D_\mu, D_\nu]' &= U(x)[D_\mu, D_\nu]U^{-1}(x)\ , \\ \rightarrow\ G'_{\mu\nu}(x) &= U(x)G_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)\ .\end{aligned} \tag{6.233}$$

Per una trasformazione infinitesima $U(x) = 1 + \imath\alpha_a t^a$ avremo

$$G'_{\mu\nu}(x) = (1 + \imath\alpha_a t^a)G_{\mu\nu}(1 - \imath\alpha_a t^a) = G_{\mu\nu} + \imath\alpha_a t^a G_{\mu\nu} - \imath\alpha_a G_{\mu\nu} t^a \ , \tag{6.234}$$

e quindi

$$\boxed{G'_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu} + \imath\alpha_a [t^a, G_{\mu\nu}]} \ . \tag{6.235}$$

Per componente:

$$\begin{aligned} G^a_{\mu\nu}{}' t^a &= G^a_{\mu\nu} t^a + \imath\alpha_b [t^b, G^c_{\mu\nu} t^c] = G^a_{\mu\nu} t^a + \imath\alpha_b G^c_{\mu\nu} \imath f^{bca} t^a = \\ &= G^a_{\mu\nu} t^a - \alpha_b G^c_{\mu\nu} f^{abc} t^a \ , \end{aligned} \tag{6.236}$$

e quindi:

$$\boxed{G^a_{\mu\nu}{}'(x) = G^a_{\mu\nu}(x) - f^{abc}\alpha_b G^c_{\mu\nu}(x)} \ . \tag{6.237}$$

Consideriamo un termine del tipo $\mathrm{tr}[G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)]$ e vediamo come trasforma:

$$\mathrm{tr}[G'_{\mu\nu}G'^{\mu\nu}] = \mathrm{tr}[UG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}U^{-1}] = \mathrm{tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \ . \tag{6.238}$$

Il termine $\mathrm{tr}[G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)]$ è invariante di gauge e invariante di Lorentz. Contiene le derivate di $A_\mu(x)$ ed è l'**unica combinazione invariante**. Più in generale avremo:

$$-\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = -\frac{1}{2g^2} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu\, b}\mathrm{tr}[t^a t^b] \ . \tag{6.239}$$

Se scegliamo la normalizzazione dei generatori come:

$$\mathrm{tr}[t^a t^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab} \ , \tag{6.240}$$

avremo

$$\boxed{-\frac{1}{4g^2} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu\, a}} \ . \tag{6.241}$$

Se riscaliamo i campi $A_\mu \to gA_\mu$ avremo:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - \imath g A_\mu \ , \\ \frac{1}{g} G_{\mu\nu} &= \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \imath g [A_\mu, A_\nu] \ , \end{aligned} \tag{6.242}$$

quindi possiamo riscrivere il termine cinetico come $-\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu\, a}$ con $G_{\mu\nu}$ ridefinito come

$$\boxed{\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \imath g [A_\mu, A_\nu] \\ G^a_{\mu\nu} &= \partial_\nu A^a_\mu - \partial_\mu A^a_\nu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \end{aligned}} \ . \tag{6.243}$$

A questo punto consideriamo

$$\begin{aligned} \delta(G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu\, a}) &= 2G^a_{\mu\nu}\delta G^{\mu\nu\, a} = \\ &= 2G^a_{\mu\nu}[\delta\partial_\nu A^a_\mu - \delta\partial_\mu A^a_\nu - g f^{abc}\delta(A^b_\mu A^c_\nu)] = \\ &= 2G^a_{\mu\nu}\delta\partial_\nu A^a_\mu - 2G^a_{\nu\mu}\delta\partial_\nu A^a_\mu - 2G^a_{\mu\nu} g f^{abc}\delta(A^b_\mu A^c_\nu) = \\ &= 4G^a_{\mu\nu}\delta\partial_\nu A^a_\mu - 2G^a_{\mu\nu} g f^{abc}[(\delta A^b_\mu)A^c_\nu + A^b_\mu(\delta A^c_\nu)] = \\ &= 4G^a_{\mu\nu}\delta(\partial_\nu A^a_\mu) - 2G^a_{\mu\nu} g f^{abc}(\delta A^b_\mu)A^c_\nu - 2G^a_{\mu\nu} g f^{abc} A^b_\mu(\delta A^c_\nu) = \\ &= 4G^a_{\mu\nu}\delta(\partial_\nu A^a_\mu) - 2G^a_{\mu\nu} g f^{abc}(\delta A^b_\mu)A^c_\nu - 2G^a_{\nu\mu} g f^{acb} A^c_\nu(\delta A^b_\mu) = \\ &= 4G^a_{\mu\nu}\delta(\partial_\nu A^a_\mu) - 4G^a_{\mu\nu} g f^{abc}(\delta A^b_\mu)A^c_\nu \ . \end{aligned} \tag{6.244}$$

Quindi otteniamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta(\partial_\nu A^a_\mu)}\left(-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu\, a}\right) &= -G^{\mu\nu\, a} \ , \\
\frac{\delta}{\delta A^b_\mu}\left(-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu\, a}\right) &= G^{\mu\nu\, a} g f^{abc} A^c_\nu \ ,
\end{aligned} \tag{6.245}$$

da cui otteniamo le equazioni del moto per il campo A_μ:

$$\partial_\nu G^{\mu\nu\, a} = g G^{\mu\nu\, b} f^{abc} A^c_\nu - g\bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi \ , \tag{6.246}$$

ovviamente con:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\partial_\nu G^{\mu\nu\, a}(x) = J^{\mu\, a}_T(x) \ , \\
&\partial_\mu\partial_\nu G^{\mu\nu\, a}(x) = \partial_\mu J^{\mu\, a}_T(x) = 0 \ , \\
&J^{\mu\, a}_T = g f^{abc} G^{\mu\nu\, b} A^c_\nu - g\bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi \ ,
\end{aligned}} \ , \tag{6.247}$$

dove $J^{\mu\, a}_{\mathrm{TOT}}$ è la corrente totale dovuta al campo di gauge più il campo di materia ed è la vera corrente conservata.

La quantità che ci interessa calcolare è un integrale funzionale sui campi di gauge:

$$\boxed{\int \delta A \ e^{\imath S(A)}} \ , \tag{6.248}$$

ovvero la sua continuazione analitica nell'euclideo - $x_0 = -\imath x_4$ e $A_0 = \imath A_4$:

$$\boxed{\int \delta A \ e^{-S_E(A)}} \ , \tag{6.249}$$

dove $A_\mu(x)$ trasforma sotto una trasformazione del gruppo di gauge come:

$$A^\Omega_\mu(x) = U(x) A_\mu U^{-1}(x) - \imath(\partial_\mu U)U^{-1}(x) \ , \tag{6.250}$$

mentre $S_E(A)$ è invariante

$$S_E(A^\Omega) = S_E(A) \ . \tag{6.251}$$

Quindi fissato $A_\mu(x)$ esiste un'intera orbita $A^{\Omega(x)}_\mu$ lungo la quale $S_E(A)$ (e qualsiasi osservabile fisica) non cambia.

Per le osservabili fisiche come S_E tutti i punti lungo orbite di gauge sono equivalenti: ciascun punto su ogni orbita dà lo stesso risultato fisico. Vorremmo integrare solo sulle configurazioni del campo di gauge fisicamente distinte e quindi considerare solo un punto per ogni orbita di gauge. In sostanza vorremmo integrare su una ipersuperficie che interseca una sola volta ogni orbita di gauge. Questa ipersuperficie nello spazio di funzioni è definita dal vincolo

$$\boxed{f(A) = 0} \ , \tag{6.252}$$

ed è la superficie di **gauge fixing**.

Se consideriamo un $A_\mu(x)$ qualsiasi che non soddisfa $f(A) = 0$ allora percorrendo la sua orbita di gauge troveremmo:

$$f(A^\Omega_\mu) = 0 \quad \text{per qualche} \ \ \Omega(x) \ . \tag{6.253}$$

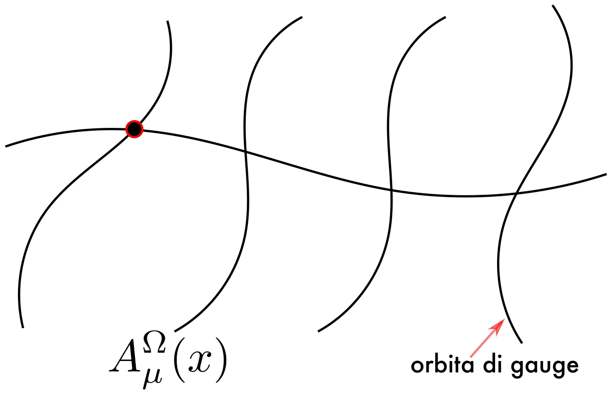


Figure 6.6

Per meglio capire cosa andiamo a fare chiariamo la procedura. Fissiamo un punto x dello spazio-tempo. Fissiamo la funzione $A_\mu(x)$. Poichè $A_\mu(x)$ trasforma come:

$$A_\mu^\Omega(x) = \Omega(x)A_\mu(x)\Omega^{-1}(x) - \imath(\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1}(x) \ , \tag{6.254}$$

facendo variare la forma funzionale di Ω otteniamo l'orbita di gauge passante per $A_\mu(x)$. Quindi variamo la forma funzionale di $A_\mu(x)$ in modo da non intersecare l'orbita di gauge costruita precedentemente. Questa nuova forma funzionale di $A_\mu(x)$ è fisicamente distinta da quella precedente in quanto non è raggiungibile da una trasformazione del gruppo di gauge. Variando A_μ nello spazio di tutte le funzioni connesse da trasformazioni del gruppo otteniamo una superficie nello spazio di funzione completo che interseca una sola volta ogni orbita di gauge. Per ognuna di queste configurazioni fisicamente distinte calcoliamo S_E e sommiamo i vari contributi. Infine, variando il punto x, sommiamo tutti i contributi relativi a tutti i punti dello spazio-tempo. Notiamo che campi di gauge indipendenti $A_\mu^a(x)$ sono in numero pari al numero di generatori del gruppo: $a = 1, ..., N^2 - 1$ nel caso di $SU(N)$. Di conseguenza avremo esattamente N^2-1 vincoli $f_a(A) = 0$ che sono necessario determinare univocamente la superficie di gauge fixing. Nello spazio di funzioni questi vincoli individuano una superficie $(N^2 - 1)$-dimensionale.

Supponiamo di avere un certo $A_\mu(x)$ tale che $f(A) = 0$. Esisterà allora $\bar{A}_\mu(x)$ tale che $f(\bar{A}) = 0$ e inoltre:

$$\bar{A}_\mu^{\bar{\Omega}}(x) = \bar{\Omega}\bar{A}_\mu\bar{\Omega}^{-1} - \imath(\partial_\mu\bar{\Omega})\bar{\Omega}^{-1} = A_\mu(x) \ , \tag{6.255}$$

cioè $\bar{\Omega}$ fa passare da $\bar{A} \to A$.

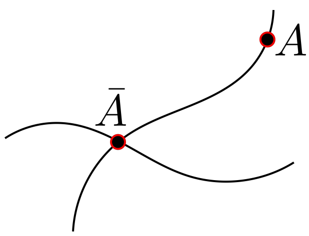


Figure 6.7

Quindi vorremmo passare da

$$\int \delta A \ \to \ \int \delta\bar{A}\delta\Omega \ , \tag{6.256}$$

e tentare di fattorizzare l'integrale infinito $\int \delta\Omega$. A questo scopo introduciamo il funzionale δ infinito-dimensionale:

$$\delta[f(A)] = \prod_{x,a} \delta[f_a(A_\mu(x))] \ . \tag{6.257}$$

Se prendiamo A arbitrariamente allora $f(A) \neq 0 \to \delta[f(A)] = 0$. Ma esisterà Ω tale che:

$$f(A^\Omega(x)) = 0 \ . \tag{6.258}$$

Ovviamente le $\Omega(x)$ sono elementi del gruppo. Consideriamo quindi l'integrale sul gruppo di gauge di $\delta[f(A)]$:

$$\begin{aligned} \int \delta\Omega \ \delta[f(A^\Omega)] \ &= \ \frac{1}{\Delta_f(A)} \ , \\ \to \ & \boxed{\Delta_f(A) \int \delta\Omega \ \delta[f(A^\Omega)] = 1} \ . \end{aligned} \tag{6.259}$$

$\Delta_f(A)$ dipende dalla superficie di gauge fixing f, ma è invariante di gauge. Cioè se prendiamo due $A_\mu(x)$ sulla stessa orbita di gauge $\Delta_f(A)$ è costante. Supponiamo di avere

$$\Delta_f(A^{\bar{\Omega}}) \int \delta\Omega \ \delta[f(A^{\bar{\Omega}})^\Omega] = 1 \ . \tag{6.260}$$

Ora

$$\delta\Omega = \prod_{x,a} \mu(g(x)) d^{N^2-1} g(x) \ , \tag{6.261}$$

è un prodotto (infinito) di misure invarianti. Per definizione di misura invariante:

$$\int_G F(\widetilde{g} \circ g) d\mu(g) = \int_G F(g) d\mu(g) \ , \tag{6.262}$$

di conseguenza

$$\Delta_f(A^{\bar{\Omega}}) \int \delta\Omega \ \delta[f(A^{\bar{\Omega}})^\Omega] = \Delta_f(A^{\bar{\Omega}}) \int \delta\Omega \ \delta[f(A^\Omega)] = \frac{\Delta_f(A^{\bar{\Omega}})}{\Delta_f(A)} = 1 \ , \tag{6.263}$$

quindi

$$\boxed{\Delta_f(A^{\bar{\Omega}}) = \Delta_f(A)} \ , \tag{6.264}$$

è indipendente da $\bar{\Omega}$.

A questo punto possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \frac{\int \delta A e^{-S(A)} O(A)}{\int \delta A e^{-S(A)}} = \frac{\int \delta A \ e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \int \delta\Omega \ \delta[f(A^\Omega)]}{\int \delta A ... O \to 1} = \\ &= \frac{\int \delta\Omega \delta A \ e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A^\Omega)]}{O \to 1} \ . \end{aligned} \tag{6.265}$$

Ora

$$A^\Omega(x) = \Omega(x) A(x) \Omega^{-1}(x) - \imath(\partial_\mu \Omega(x)) \Omega^{-1}(x) = A'(x) \ . \tag{6.266}$$

Questa trasformazione è **lineare** e non omogenea e corrisponde geometricamente ad una **rotazione** + una traslazione. Inoltre

$$
\begin{aligned}
S(A) &= S(A') \ , \\
O(A) &= O(A') \ , \\
\Delta_f(A) &= \Delta_f(A') \ ,
\end{aligned}
\tag{6.267}
$$

perchè sono gauge-invarianti, e quindi:

$$
\langle O \rangle = \frac{\int \delta\Omega \delta A' \ e^{-S(A')} O(A') \Delta_f(A') \delta[f(A')]}{O \to 1} \ , \tag{6.268}
$$

dove $\delta A' = \delta A$ poichè la misura d'integrazione funzionale è invariante di gauge (invariante sotto rototraslazioni).

A questo punto notiamo che la variabile d'integrazione funzionale è una variabile **muta**, per cui possiamo scrivere:

$$
\langle O \rangle = \frac{\int \delta\Omega \int \delta A \ e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)]}{O \to 1} \ . \tag{6.269}
$$

L'integrale in δA è indipendente da Ω, quindi $\int d\Omega$ si fattorizza e si semplifica col denominatore. Ciò che resta è un integrale funzionale sulla sola superficie di gauge-fixing:

$$
\boxed{\langle O \rangle = \frac{\int \delta A \ e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)]}{\int \delta A \ e^{-S(A)} \Delta_f(A) \delta[f(A)]}} \ . \tag{6.270}
$$

Potrebbe sembrare che $\langle O \rangle$ dipenda dalla **scelta** della superficie di gauge-fixing, ma dimostriamo che se $O(A)$ è una quantità gauge invariante, allora $\langle O \rangle$ è indipendente dalla scelta della superficie di gauge-fixing, cioè indipendente da f.

Scegliamo un'altra superficie di gauge-fixing $g(A) = 0$. Allora

$$
\Delta_g(A) \int \delta\Omega \ \delta[g(A^\Omega)] = 1 \ , \tag{6.271}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\langle O \rangle_f &= \int \delta A \ e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)] = \\
&= \int \delta A \ e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)] \Delta_g(A) \int \delta\Omega \ \delta[g(A^\Omega)] = \\
&= \int \delta\Omega \delta A \ e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)] \Delta_g(A) \delta[g(A^\Omega)] \ .
\end{aligned}
\tag{6.272}
$$

Chiamo

$$
A^\Omega = A' \ . \tag{6.273}
$$

Evidentemente

$$
A = (A')^{\Omega^{-1}} \ . \tag{6.274}
$$

Dunque:

$$
\begin{aligned}
\langle O \rangle_f &= \int \delta\Omega \delta A' \ e^{-S(A')} O(A') \Delta_f(A') \delta[f((A')^{\Omega^{-1}})] \Delta_g(A') \delta[g(A')] = \\
&= \int \delta A' \ e^{-S(A')} O(A') \Delta_g(A') \delta[g(A')] \Delta_f(A') \int \delta\Omega \ \delta[f((A')^{\Omega^{-1}})] \ .
\end{aligned}
\tag{6.275}
$$

Ora usiamo la definizione di misura invariante sul gruppo:

$$\int f(g)d\mu(g) = \int f(g^{-1})d\mu(g) \ , \tag{6.276}$$

che ci dà

$$\int \delta\Omega \ \delta[f((A')^{\Omega^{-1}})] = \int \delta\Omega \ \delta[f((A')^{\Omega})] \ . \tag{6.277}$$

Ma

$$\Delta_f(A') \int \delta\Omega \ \delta[f((A')^{\Omega})] = 1 \ , \tag{6.278}$$

e quindi

$$\boxed{\langle O\rangle_f = \int \delta A \ e^{-S(A)} O(A)\Delta_g(A)\delta[g(A)] = \langle O\rangle_g} \ . \tag{6.279}$$

Ne consegue che $\langle O\rangle$ è indipendente dalla scelta della superficie di gauge-fixing.

6.8 Ghost

Consideriamo come esempio semplice il caso di un gruppo di gauge abeliano. In questo caso

$$A_\mu^\Omega(x) = A_\mu(x) - \imath(\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1} \ , \tag{6.280}$$

essendo $\Omega = e^{\imath A(x)}$, scriviamo:

$$A_\mu^\Omega(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) = A_\mu^\Lambda(x) \ . \tag{6.281}$$

Scgliamo come superficie di gauge-fixing:

$$f(A) = \partial_\mu A^\mu(x) = 0 \ . \tag{6.282}$$

Secondo il ragionamento precedente:

$$\begin{aligned} &\Delta_f(A)\int \delta\Omega \ \delta[f(A^\Omega)] = 1 \ , \\ &\to \Delta_f(A)\int \delta\Omega \ \delta[\partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda] = 1 \ . \end{aligned} \tag{6.283}$$

Ora la misura invariante sul gruppo è proprio $\delta\Lambda$, per cui avremo:

$$\boxed{\Delta_f(A)\int \delta\Lambda \ \delta[\partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda] = 1} \ . \tag{6.284}$$

Possiamo fare il seguente cambiamento di variabili:

$$\Lambda' = \partial A + \Box\Lambda \ , \tag{6.285}$$

con lo jacobiano funzionale:

$$J = \det\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\Lambda'}\right) = \det[\Box^{-1}] = \frac{1}{|\det[\Box]|} \ , \tag{6.286}$$

allora

$$\Delta_f(A)\frac{1}{|\det[\Box]|}\int \delta\Lambda' \ \delta(\Lambda') = \frac{\Delta_f(A)}{|\det[\Box]|} = 1 \ , \tag{6.287}$$

e quindi:

$$\boxed{\Delta_f(A) = |\det[\Box]|} \ . \tag{6.288}$$

Quindi nel caso abeliano il fattore $\Delta_f(A)$ è semplicemente il determinante dell'operatore $\Box$ che tra l'altro è indipendente da A e può essere fattorizzato e semplificato con il denominatore. Nel caso **non-abeliano** le cose sono molto diverse.

6.8.1 Caso non-abeliano

Nel caso non-abeliano avremo

$$A_\mu^\Omega(x) = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \imath(\partial_\mu\Omega)\Omega^{-1} \ . \tag{6.289}$$

Ricavare la trasformazione per $A_\mu^{a\,\Omega}(x)$ è complicato per una trasformazione finita. Tuttavia per una trasformazione infinitesima $\Omega = I + \imath g_a(x)\lambda_a$:

$$\begin{aligned} A_\mu^{\Omega}(x) &= A_\mu + \imath g_a(x)[\lambda_a, A_\mu(x)] + \partial_\mu g(x) \ , \\ A_\mu^{a\,\Omega}(x) &= A_\mu^a(x) - f^{abc} g_b(x) A_\mu^c(x) + \partial_\mu g^a(x) \ , \end{aligned} \tag{6.290}$$

da cui vediamo che anche per g = cost i campi di gauge trasformano in modo non banale (sono campi che portano una carica) a diggerenza del caso abeliano. Come prima valutiamo:

$$\Delta_f(A) \int \delta\Omega \ \delta[\partial_\mu A^{\mu\,\Omega}(x)] = 1 \ . \tag{6.291}$$

Osserviamo che quest'espressione è una media della condizione di gauge-fixing sul gruppo di gauge. D'altra parte se richiediamo che l'intersezione tra orbite di gauge e superficie di gauge-fixing sia unica allora l'integrale è diverso da zero solo in un piccolissimo intorno del punto d'intersezione. Quindi possiamo limitarci a considerare trasformazioni infinitesime. Se ci fossero più intersezioni tra un'orbita di gauge e la superficie di gauge-fixing allora questo modo di procedere non darebbe risultati esatti. Quindi

$$\Delta_f(A) \int \delta\Omega \ \delta[\Box g^a(x) - f^{abc}\partial_\mu(g_b(x)A_c^\mu(x))] = 1 \ , \tag{6.292}$$

con $\delta\Omega = \mu(g)\delta g$ misura invariante sul gruppo e avendo posto $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$. Allora

$$\begin{aligned} &\Delta_{\partial A}(A) \int \mu(g)\delta g \ \delta[\Box g^a - f^{abc}\partial_\mu(g_b A_c^\mu)] = \\ &= \Delta_{\partial A}(A) \int \mu(g)\delta g \ \delta[Bg] = 1 \ . \end{aligned} \tag{6.293}$$

Ora l'unica soluzione di $Bg = 0$ è $g = 0$, giacchè g = cost non soddisfa la "condizione al bordo" $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Avremo

$$\Delta_{\partial A}(A) \int \mu(g) \ \delta[Bg] \ \delta g = \Delta_{\partial A}(A) \int \mu(g') \ \delta(g') \ \delta g' \frac{1}{|\det B|} = 1 \ , \tag{6.294}$$

quindi

$$\Delta_{\partial A}(A) \frac{\mu(0)}{|\det B|} = 1 \ . \tag{6.295}$$

Ponendo $\mu(0) = 1$ otteniamo:

$$\boxed{\Delta_{\partial A}(A) = |\det[\delta^{ab}\Box - f^{abc}\partial_\mu(A_\mu^c)]|} \ . \tag{6.296}$$

A differenza del caso abeliano questa volta $\Delta_{\partial A}(A)$ dipende da A_μ. Vogliamo far vedere che il det non si annulla mai al variare di A_μ.

Essendo

$$\det = \prod_{\text{autovalori}} \mu_n \ , \tag{6.297}$$

allora

$$\Box g^a - f^{abc}\partial_\mu(A_\mu^c g^b) = \mu_n g^a \ . \tag{6.298}$$

Se ci fosse un autovalore nullo avremmo:

$$\Box g^a - f^{abc}\partial_\mu(A_\mu^c g^b) = 0 \ , \tag{6.299}$$

e cioè

$$\partial_\mu A^\Omega_\mu = \partial_\mu A_\mu = 0 \ , \tag{6.300}$$

ovvero avremmo trovato un A^Ω_μ sull'orbita di gauge che soddisfa la condizione $\partial_\mu A^\Omega_\mu = 0$ e quindi interseca la superficie di gauge-fixing. Avremmo quindi un'intersezione multipla tra orbita di gauge e superficie di gauge-fixing. Quindi un autovalore nullo segnala la presenza di possibili intersezioni multiple.

Supponiamo che non ci siano intersezioni multiple. Allora il det non si annulla mai al variare di A_μ.

D'altra parte poichè il det compare a numeratore e denominatore, il segno è irrilevante e possiamo omettere il modulo.

Quando effettuiamo l'espansione perturbativa del det, questa porta ad interazioni non locali tra i campi di gauge. E' conveniente, quindi, effettuare un'ultima manipolazione sul determinante e riesprimerlo come un'interazione locale di campi fittizi (**ghosts**). A questo scopo scriviamo il $\det B$ come un integrale funzionale su variabili (campi) grassmaniani:

$$\begin{aligned}\det B &= \int \delta c \delta \bar{c} \ \exp\left[-\int \bar{c}(x) B(x) c(x) \ dx\right] = \\ &= \int \delta c \delta \bar{c} \ \exp\left[-\int \bar{c}_a(x)(\delta^{ab}\Box - f^{abc}\partial_\mu A^c_\mu) c_b(x) \ d^4x\right] \ ,\end{aligned} \tag{6.301}$$

che dopo un'integrazione per parti possiamo scrivere come:

$$\boxed{\det B = \int \delta c \delta \bar{c} \ \exp\left\{\int [\partial_\mu \bar{c}_a \partial^\mu c^a + \bar{c}_a f^{abc} \partial_\mu (A^\mu_c c_b)] \ d^4x\right\}} \ . \tag{6.302}$$

I campi $c^a(x)$ sono campi scalari a massa nulla anticommutanti in rappresentazione aggiunta: i **ghost**.

Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned}\langle O \rangle &= \int \delta A \ e^{-S(A)} O(A) \delta[f(A)] \Delta_f(A) \ , \\ \langle O \rangle &= \frac{\int \delta A \delta c \delta \bar{c} \ \exp\left\{-S(A) + \int d^4x \left[\partial_\mu \bar{c}_a \partial^\mu c^a + \bar{c}_a f^{abc} \partial_\mu (A^\mu_c c^b)\right]\right\} O(A) \delta[\partial_\mu A^\mu]}{O \to 1} \ .\end{aligned} \tag{6.303}$$

Consideriamo il funzionale generatore dell'elettrodinamica senza campi di materia:

$$\begin{aligned}Z[J] &= \langle 0|\mathcal{T} \exp\left(\imath \int J_\mu A_\mu\right)|0\rangle = \langle 0|\mathcal{T}\exp\left(\imath \int J_\mu A^E_\mu \ d^4x_E\right)|0\rangle = \\ &= \int \delta A \exp\left[-S(A) + \int J_\mu A^\mu\right] \delta(\partial_\mu A^\mu) \ ,\end{aligned} \tag{6.304}$$

con $S(A) = \frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d^4x_E$. Ora

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu) \ , \tag{6.305}$$

e quindi

$$\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ d^4x_E = \frac{1}{2}\int (\partial_\nu A_\mu)^2 + (\partial_\mu \partial_\nu A_\mu) A_\nu = \frac{1}{2}\int (\partial_\nu A_\mu)^2 \ , \tag{6.306}$$

poichè c'è il vincolo $\partial_\mu A^\mu = 0$. Inoltre eseguiamo una trasformazione di Fourier funzionale della δ:

$$\delta(\partial_\mu A_\mu) = \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu(x)) = \int \delta\lambda \ \exp\left[\imath \int \lambda(x)\partial_\mu A_\mu \ d^4x\right] \ . \tag{6.307}$$

Allora:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \delta A \delta\lambda \ \exp\left[-\frac{1}{2}\int (\partial_\nu A_\mu)^2 + \int J_\mu A^\mu + \imath \int \lambda \partial_\mu A^\mu\right] = \\ &= \int \delta A \delta\lambda \ \exp\left[\frac{1}{2}\int A_\mu \Box A^\mu + \int J_\mu A^\mu - \imath \int (\partial_\mu \lambda) A^\mu\right] = \\ &= \int \delta A \delta\lambda \ \exp\left[\frac{1}{2}\int A_\mu \Box A^\mu + \int (J_\mu - \imath\partial_\mu\lambda) A^\mu\right] \ . \end{aligned} \tag{6.308}$$

Come al solito variamo l'azione per cercare i punti stazionari per effettuare il cambiamento di variabile:

$$\Box A_\mu + (J_\mu - \imath \partial_\mu \lambda) = 0 \ , \tag{6.309}$$

che risolta dà

$$\begin{aligned} A_\mu &= \int d^4y \ G_{\mu\nu}(x,y)(J^\nu - \imath\partial^\nu\lambda) \ , \\ \Box G_{\mu\nu}(x,y) &= -\delta^{\mu\nu}\delta(x-y) \ . \end{aligned} \tag{6.310}$$

Chiamiamo $\widetilde{A}_\mu$ la soluzione e shiftiamo la variabile di integrazione:

$$A_\mu = A'_\mu + \widetilde{A}_\mu \ , \tag{6.311}$$

cosicchè

$$\begin{aligned} Z[J] = &\int \delta A' \delta\lambda \ \exp\left[\frac{1}{2}\int (A' + \widetilde{A})\Box(A' + \widetilde{A}) + 2(J_\mu - \imath\partial_\mu\lambda)(A'^\mu + \widetilde{A})\right] = \\ = &\int \delta A' \delta\lambda \ \exp\left[\frac{1}{2}\int A'\Box A' + \widetilde{A}\Box A' + A'\Box\widetilde{A} + \widetilde{A}\Box\widetilde{A} + 2(J_\mu - \imath\partial_\mu\lambda)A'^\mu 2(J_\mu - \imath\partial_\mu\lambda)\widetilde{A}\right] = \\ = &\int \delta A' \delta\lambda \ \exp\left[\frac{1}{2}\int A'\Box A' + (J_\mu - \imath\partial_\mu\lambda)\widetilde{A}\right] = \\ = &\int \delta\lambda \ \exp\left[\frac{1}{2}\int (J_\mu - \imath\partial_\mu\lambda)\widetilde{A}\right] \int \delta A' \ \exp\left[\frac{1}{2}\int A'\Box A'\right] \ . \end{aligned} \tag{6.312}$$

Il secondo integrale non dipende da J e λ e si semplifica con il denominatore. Quindi

$$Z[J] = \int \delta\lambda \ \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4x d^4y \ \left(J_\mu(x) - \imath\partial_\mu\lambda(x)\right) G^{\mu\nu}(x,y) \left(J_\nu(x) - \imath\partial_\mu\lambda(y)\right)\right] \ . \tag{6.313}$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} &\Box G_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}\delta(x-y) \ , \\ &\to G_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\widetilde{G}_{\mu\nu}(q) \ e^{\imath qx} \ , \\ &\to \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} - q^2\widetilde{G}_{\mu\nu}(q) \ e^{\imath qx} = -\delta_{\mu\nu}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \ e^{\imath qx} \ , \\ &\to \widetilde{G}_{\mu\nu}(q) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{q^2} \ , \\ &\to G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{\delta_{\mu\nu}}{q^2}e^{\imath q(x-y)} = \delta_{\mu\nu}G(x-y) \ . \end{aligned} \tag{6.314}$$

Il funzionale generatore diventa:

$$
\begin{aligned}
Z[J] = \int \delta\lambda \ \exp\Bigg[\frac{1}{2}\int d^4x d^4y \ & J_\mu(x)G(x-y)J^\mu(y) - \imath J_\mu(x)G(x-y)\partial^\mu\lambda(y) - \\
& - \imath\partial_\mu\lambda(x)G(x-y)J^\mu(y) - \partial_\mu\lambda(x)G(x-y)\partial^\mu\lambda(y)\Bigg] = \\
& = \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4xd^4y \ J_\mu(x)G(x-y)J^\mu(y)\right] \\
& \int \delta\lambda \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4xd^4y \ -2\imath J_\mu G(x-y)\partial^\mu\lambda(y) - \lambda(x)\left(\partial_x^\mu\partial_y^\mu G(x-y)\right)\lambda(y)\right] .
\end{aligned}
\tag{6.315}
$$

Ora

$$
\partial_x^\mu\partial_y^\mu G(x-y) = -\Box_{(x-y)}G(x-y) = \delta^4(x-y) \ , \tag{6.316}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
Z[J] &= e^{\frac{1}{2}\int JGJ}\int \delta\lambda \exp\left[\frac{1}{2}\int d^4xd^4y \ 2\imath J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\lambda(y) - \lambda(x)\delta(x-y)\lambda(y)\right] = \\
&= e^{\frac{1}{2}\int JGJ}\int \delta\lambda \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4y\lambda^2(y) + \imath\int dxdy \ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\lambda(y)\right] .
\end{aligned}
\tag{6.317}
$$

L'integrale in $\delta\lambda$ è gaussiano e lo risolviamo cercando i punti stazionari per effettuare il cambiamento di variabile:

$$
\begin{aligned}
& -\lambda(y) + \imath\int dx \ J_\mu(x)[\partial_\mu^y G(x-y)] = 0 \ , \\
& \to \boxed{\lambda(y) = \imath\int d^4x \ J_\mu(x)[\partial_\mu^y G(x-y)]} \ .
\end{aligned}
\tag{6.318}
$$

Ponendo $\lambda' = \lambda + \widetilde{\lambda}$ avremo:

$$
\int \delta\lambda' \ \exp\left[-\frac{1}{2}\int(\lambda'+\widetilde{\lambda})^2 \ dy + \imath\int dxdy \ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)](\lambda'+\widetilde{\lambda})\right] . \tag{6.319}
$$

Valutiamo l'argomento dell'esponenziale:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\int \lambda'^2(y) + \widetilde{\lambda}^2(y) + 2\lambda'(y)\widetilde{\lambda}(y) + \imath\int dxdy \ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\lambda'(y) + \\
& + \imath\int dxdy \ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\widetilde{\lambda}(y) = \\
& -\frac{1}{2}\int \lambda'^2(y) - \frac{1}{2}\int dy\widetilde{\lambda}(y)\left[\widetilde{\lambda}(y) - \imath\int dx \ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\right] + \\
& + \frac{\imath}{2}\int dxdy \ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\widetilde{\lambda}(y) - -\int dy \ \lambda'(y)\left[\widetilde{\lambda}(y) - \imath\int dx \ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\right] = \\
& = \frac{1}{2}\int \lambda'^2(y) \ dy + \frac{\imath}{2}\int dxdy \ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\widetilde{\lambda}(y) \ .
\end{aligned}
\tag{6.320}
$$

Quindi l'integrale in $\delta\lambda'$ si fattorizza e si semplifica con il denominatore e avremo:

$$Z[J] = \exp\left[\frac{1}{2}\int JGJ + \frac{\imath}{2}\int dxdy\ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\widetilde{\lambda}(y)\right] \ . \tag{6.321}$$

allora

$$\boxed{\begin{aligned} Z[J] = \exp\Bigg[&\frac{1}{2}\int dxdy\ J_\mu(x)G(x-y)J^\mu(y) - \\ &-\frac{1}{2}\int dxdydz\ J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]J_\nu(z)[\partial_y^\nu G(z-y)]\Bigg] \end{aligned}} \ . \tag{6.322}$$

Nel secondo integrale all'esponente risolviamo l'integrale in y:

$$\begin{aligned} &\int dy\ [\partial_y^\mu G(x-y)][\partial_y^\nu G(z-y)] = \int dy \frac{dq_1}{(2\pi)^4}\frac{dq_2}{(2\pi)^4}\partial_y^\mu \frac{e^{\imath q_1(x-y)}}{q_1^2}\partial_y^\nu \frac{e^{\imath q_2(z-y)}}{q_2^2} = \\ &= \int dy \frac{dq_1}{(2\pi)^4}\frac{dq_2}{(2\pi)^4}\frac{-\imath q_1^\mu}{q_1^2}\frac{-\imath q_2^\mu}{q_2^2} e^{\imath q_1 x}e^{\imath q_2 z}e^{-\imath(q_1+q_2)y} = \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{q^\mu q^\nu}{q^4}e^{\imath q(x-z)} = \ \Delta^{\mu\nu}(x-z) \ . \end{aligned} \tag{6.323}$$

E quindi

$$Z[J] = \exp\left[\frac{1}{2}\int dxdy\ J_\mu(x)G(x-y)J^\mu(y)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\int dxdy\ J_\mu(x)\Delta^{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y)\right] \ , \tag{6.324}$$

e

$$\boxed{Z[J] = \exp\left[\frac{1}{2}\int dxdy\ J_\mu(x)[G^{\mu\nu}(x-y) - \Delta^{\mu\nu}(x-y)]J_\nu(y)\right]} \ . \tag{6.325}$$

Possiamo quindi ricavare il propagatore del fotone nella gauge corrispondente a $\partial_\mu A^\mu = 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) &= \delta_{\mu\nu}G(x-y) - \Delta_{\mu\nu}(x-y) = \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\ \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2}\ e^{\imath q(x-y)} \end{aligned}} \ , \tag{6.326}$$

che rappresenta il **propagatore fotonico trasverso**.

Vogliamo ora estendere i ragionamenti precedenti al caso di condizioni del tipo

$$f(A) = C \ . \tag{6.327}$$

Ad esempio

$$\partial^\mu A_\mu^a = C^a(x) \ . \tag{6.328}$$

Avremo quindi

$$\langle O\rangle = \int \delta A\ e^{-S(A)}\Delta_{\partial A - C}(A)\ \delta(\partial_\mu A^\mu - C)\ O(A) \ , \tag{6.329}$$

con
$$\Delta_{\partial A-C}(A)\int \delta\Omega\ \delta[\partial^\mu A^\Omega_\mu - C] = 1\ . \tag{6.330}$$
Ora
$$\begin{aligned}
A^{\Omega\, a}_\mu &\approx A^a_\mu - f^{abc} g_b(x) A^c_\mu(x) + \partial_\mu g^a(x)\ ,\\
\partial^\mu A^{\Omega\, a}_\mu &= \partial^\mu A^a_\mu - f^{abc}\partial^\mu[g_b(x)A^c_\mu(x)] + \Box g^a(x)\ ,\\
&\rightarrow \partial^\mu A^{\Omega\, a}_\mu - C^a = \Box g^a(x) - f^{abc}\partial^\mu[g_b(x)A^c_\mu(x)]\ ,\\
&\rightarrow \Delta_{\partial A-C}(A) = \left|\det[\delta^{ab}\Box - f^{abc}\partial^\mu(A^c_\mu\cdot)]\right| = |\det B|\ ,
\end{aligned} \tag{6.331}$$
e quindi
$$\langle O\rangle = \int \delta A\ e^{-S(A)}(\det B)\ \delta(\partial_\mu A^\mu - C)\ O(A)\ . \tag{6.332}$$
Poichè le quantità gauge-invarianti non sono sensibili ad un cambiamento della condizione ausiliaria $C(x)$, possiamo mediare su $C(x)$ con un peso gaussiano. Quindi
$$\langle O\rangle = \int \delta C\delta A\ e^{-S(A)}(\det B)\ \delta(\partial_\mu A^\mu - C)\ O(A)\ e^{-\frac{1}{2\alpha}\int C^2(x)\ dx}\ , \tag{6.333}$$
e dunque
$$\boxed{\langle O\rangle = \int \delta C\delta A\ e^{-S(A)}(\det B)\ O(A)\ \exp\left[-\frac{1}{2\alpha}\int (\partial_\mu A^\mu)^2\ dx\right]}\ . \tag{6.334}$$

6.9 Simmetrie

Supponiamo di avere una teoria invariante sotto un gruppo di trasformazioni globali. Come esempio possiamo pensare ad un gruppo $SO(N)$ di trasformazioni ortogonali tali che:

$$\begin{aligned} &OO^T = O^T O = I \ , \\ &\det O = 1 \ . \end{aligned} \tag{6.335}$$

Per trasformazioni infinitesime possiamo porre $O \sim I + g = I + g_a \lambda_a$ e dalla condizione $O^T O = I \to g^T = -g \to \lambda_a$ sono antisimmetriche. L'algebra del gruppo è

$$[\lambda_a, \lambda_b] = f_{abc} \lambda_c \ , \tag{6.336}$$

con f_{abc} costanti di struttura. Il campo ϕ subisce la trasformazione:

$$\begin{aligned} \phi_i' &= (1 + g_a \lambda_a)_{ij} \phi_j = \phi_i + g_a (\lambda_a)_{ij} \phi_j \ , \\ \delta\phi_i &= g_a (\lambda_a)_{ij} \phi_j \ . \end{aligned} \tag{6.337}$$

Mentre $\delta S(\phi) = 0$ perchè la teoria è invariante. Se $g_a = g_a(x)$ dipende dal punto dello spazio-tempo $\delta S \neq 0$. Infatti

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \ d^4x = \int d^4x \ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} \delta(\partial_\mu \phi_i) = \\ &= \int d^4x \ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} \delta\phi_i + \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} \delta\phi_i \right) - \left(\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} \right) \delta\phi_i \ . \end{aligned} \tag{6.338}$$

Se ϕ soddisfa le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} \delta\phi_i \right) \ d^4x = \int \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} g_a(x) (\lambda^a)_{ij} \phi_j \right) \ d^4x = \\ &= \int d^4x \ (\partial_\mu g_a(x)) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j + \int d^4x \ g_a(x) \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j \right) \ . \end{aligned} \tag{6.339}$$

Quando $g_a(x) =$ cost. sappiamo che $\delta S = 0$. Quindi

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \ g_a \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j \right) = 0 \ , \\ &\to \ \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j = 0 \ . \end{aligned} \tag{6.340}$$

Per $g_a = g_a(x)$, allora

$$\delta S = \int d^4x \ (\partial_\mu g_a(x)) \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j = \int d^4x \ (\partial_\mu g_a(x)) J_\mu^a(x) \ , \tag{6.341}$$

con

$$J_\mu^a(x) = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j \ , \tag{6.342}$$

e

$$\partial_\mu J_\mu^a = 0 \ . \tag{6.343}$$

Come esempio consideriamo una teoria descritta dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi^i - \frac{\mu_0^2}{2}\phi_i\phi^i - \frac{g_0}{4!}(\phi_i\phi^i)2 \ . \tag{6.344}$$

Avremo

$$J_\mu^a = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i}(\lambda^a)_{ij}\phi_j = (\partial_\mu\phi_i)\lambda^a_{ij}\phi_j = (\partial_\mu\phi_i)\lambda^a\phi \ . \tag{6.345}$$

Poichè

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\phi_i} = \partial_0\phi_i = \Pi_i(x) \ . \tag{6.346}$$

Avremo che la carica conservata è

$$Q^a = \int d^3x \ J_0^a(\vec{x},t) = \int d^3x \ (\partial_0\phi_i)\lambda^a_{ij}\phi_j = \int d^3x \ \Pi_i(x)\lambda^a_{ij}\phi_j(x) \ . \tag{6.347}$$

La carica è indipendente dal tempo, infatti:

$$\partial_0 Q^a = \int d^3x \ \partial_0 J_0^a = \int d^3x \ \vec{\nabla}\cdot\vec{J}^a = \int d\sigma \ \vec{J}\cdot\vec{n} = 0 \ , \tag{6.348}$$

perchè sulla superficie all'infinito i campi si annullano.

Valutiamo

$$\begin{aligned}
&\left[Q^a, Q^b\right] = Q^aQ^b - Q^bQ^a = \\
&= \int d^3xd^3y \ \left(\Pi_i^x\lambda^a_{ij}\phi_j^x\Pi_k^y\lambda^b_{km}\phi_m^y - \Pi_k^y\lambda^b_{km}\phi_m^y\Pi_i^x\lambda^a_{ij}\phi_j^x\right) = \\
&= \int d^3xd^3y \ \left[\Pi^x\lambda^a\phi^x\Pi^y\lambda^b\phi^y - \Pi^y\lambda^b\Big(\phi_m(y)\Pi_i(x) - \Pi_i(x)\phi_m(y) + \Pi_i(x)\phi_m(y)\Big)\lambda^a\phi^x\right] \ .
\end{aligned} \tag{6.349}$$

Ora

$$\phi_m(y)\Pi_i(x) - \Pi_i(x)\phi_m(y) = \imath\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{im} \ , \tag{6.350}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
&\left[Q^a, Q^b\right] = \\
&= \int d^3xd^3y \ \left[\Pi_i^x\lambda^a_{ij}\phi_j^x\Pi_k^y\lambda^b_{km}\phi_m^y - \Pi_k^y\lambda^b_{km}\imath\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{im}\lambda^a_{ij}\phi_j(x) - \Pi_k^y\lambda^b_{km}\Pi_i^x\phi_m^y\lambda^a_{ij}\phi_j^x\right] = \\
&= \int d^3xd^3y \ \left\{\Pi_i^x\Big(\lambda^a_{ij}\phi_j^x\Pi_k^y\lambda^b_{km} - \lambda^b_{km}\Pi_k^y\phi_j^x\lambda^a_{ij}\Big)\phi_m^y - \Pi_k^y\lambda^b_{km}\imath\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{im}\lambda^a_{ij}\phi_j^x\right\} = \\
&= \int d^3xd^3y \ \left\{\Pi_i^x\Big(\lambda^a_{ij}\lambda^b_{km}\phi_j^x\Pi_k^y - \lambda^b_{km}\lambda^a_{ij}\Pi_k^y\phi_j^x\Big)\phi_m^y \ - \ //\right\} = \\
&= \int d^3xd^3y \ \left\{\Pi_i^x\Big[\lambda^a_{ij}\lambda^b_{km}\Big([\phi_j(x),\Pi_k(y)] + \Pi_k^y\phi_j^x\Big) - \lambda^b_{km}\lambda^a_{ij}\Pi_k^y\phi_j^x\Big]\phi_m^y \ - \ //\right\} = \\
&= \int d^3xd^3y \ \left\{\Pi_i^x\lambda^a_{ij}\lambda^b_{km}\imath\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{jk}\phi_m^y + \Pi_i^x[\lambda^a_{ij},\lambda^b_{km}]\Pi_k^y\phi_j^x\phi_m^y \ - \ //\right\} = \\
&= \imath\int d^3x \ \Pi_i\lambda^a_{ij}\lambda^b_{jm}\phi_m - \imath\int d^3x \ \Pi_k\lambda^b_{km}\lambda^a_{mj}\phi_j + \int d^3xd^3y \ \Pi_i^x[\lambda^a_{ij},\lambda^b_{km}]\Pi_k^y\phi_j^x\phi_m^y \ = \\
&= \imath\int d^3x \ \Pi[\lambda^a_{ij},\lambda^b_{jm}]\phi_m = \imath\int d^3x \ \Pi_i f^{abc}\lambda^c_{im}\phi_m = \imath f^{abc}Q_c \ .
\end{aligned} \tag{6.351}$$

Quindi

$$\boxed{[Q^a, Q^b] = \imath f^{abc} Q_c} \ , \tag{6.352}$$

e inoltre si verifica

$$[Q^a, \phi_i(x)] = -\imath\lambda^a_{im}\phi_m(x) \ . \tag{6.353}$$

Quindi le Q_a soddisfano le regole di commutazione dei generatori dell'algebra di Lie e inducono la trasformazione infinitesima del campo attraverso il commutatore. Per una trasformazione finita avremo:

$$\boxed{\phi_i'(x) \ = \ e^{\imath g_a Q_a}\phi_i(x)e^{-\imath g_a Q_a}} \ . \tag{6.354}$$

L'operatore $e^{\imath g_a Q_a}$ è l'operatore della trasformazione del gruppo che agisce sullo spazio degli stati.

6.9.1 Lemma di Schur

Se abbiamo un gruppo continuo di trasformazioni rappresentate da un insieme di operatori $U(g)$, allora dato un qualsiasi operatore A, se:

$$[A, U(g)] = 0 \quad \forall g \ \rightarrow \ A = cI \ , \tag{6.355}$$

cioè A è un multiplo dell'identità. Si intende che il gruppo di trasformazioni è un gruppo di simmetria della teoria.

Ora poichè le Q_a sono costanti del moto, sappiamo che:

$$[Q_a, H] = 0 \ . \tag{6.356}$$

Consideriamo ora la trasformazione:

$$e^{-\imath\vec{P}\cdot\vec{y}}Q_a e^{\imath\vec{P}\cdot\vec{y}} = \int d^3x \ e^{-\imath\vec{P}\cdot\vec{y}}J_a^0(\vec{x},t)e^{\imath\vec{P}\cdot\vec{y}} = \int d^3x \ J_a^0(\vec{x}+\vec{y},t) \ , \tag{6.357}$$

che è indipendente da $\vec{y}$. Di conseguenza per una trasformazione infinitesima

$$(1-\imath\vec{P}\cdot\vec{y})Q_a(1+\imath\vec{P}\cdot\vec{y}) = Q_a - \imath y_i[P^i, Q_a] = Q_a \ \rightarrow \ [Q_a, P^i] = 0 \ . \tag{6.358}$$

Quindi in definitiva:

$$[Q_a, P^\mu] = 0 \ . \tag{6.359}$$

Valutiamo

$$P^\mu Q_a|0\rangle = Q_a P^\mu|0\rangle = 0 \ \rightarrow \ Q_a|0\rangle = c|0\rangle \ , \tag{6.360}$$

(assumendo che non ci siano stati di vuoto degeneri). Ma

$$\langle 0|Q^a|0\rangle = c = \int d^3x \ \langle 0|J_0^a(x)|0\rangle = \int d^3x \ \langle 0|J_0^a(0)|0\rangle \ . \tag{6.361}$$

Ma osserviamo che sotto una trasformazione di Lorentz:

$$U(\Lambda)J_\mu(0)U^\dagger(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\nu J_\nu(0) \ . \tag{6.362}$$

Prendendo $\langle \cdot \rangle$ e sfruttando il fatto che il vuoto è Lorentz-invariante avremo:

$$\begin{aligned}\langle 0|J^\mu(0)|0\rangle &= \langle 0|U^\dagger(\Lambda)U(\Lambda)J^\mu(0)U^\dagger(\Lambda)U(\Lambda)|0\rangle = \langle 0|U(\Lambda)J^\mu(0)U^\dagger(\Lambda)|0\rangle = \\ &= \Lambda_\mu{}^\nu\langle 0|J^\nu(0)|0\rangle \ .\end{aligned} \tag{6.363}$$

Poiché $\langle 0|J^\mu(0)|0\rangle$ è un quadrivettore che trasforma secondo una rappresentazione non banale del gruppo di Lorentz, allora l'unica possibilità è che sia proporzionale al vettore nullo. Di conseguenza:

$$\langle 0|J^\mu(0)|0\rangle = 0 \ \rightarrow \ c = 0 \ \rightarrow \ Q^a|0\rangle = 0 \ , \tag{6.364}$$

la carica annichila il vuoto.

Consideriamo ora gli stati a una particella $|p, i\rangle$. Avremo:

$$P^\mu Q^a|p, i\rangle = p^\mu Q^a|p, i\rangle \ , \tag{6.365}$$

cioè $Q^a|p, i\rangle$ ha lo stesso impulso dello stato $|p, i\rangle$ e quindi deve essere una combinazione lineare di stati con impulso p:

$$Q^a|p, i\rangle = \sum_j c_{ij}|p, j\rangle \ . \tag{6.366}$$

Gli stati a 1-particella forniscono una rappresentazione del gruppo di simmetria.

Gli stati a 2-particelle $|p_1, i; p_2, j\rangle$ trasformano come il $\otimes$ di stati a 1-particella.

Consideriamo le funzioni di Weightman $\langle 0|\phi_i(x)\phi_j(y)|0\rangle$. Se il vuoto è invariante, cioè $Q^a|0\rangle$, avremo:

$$\begin{aligned}0 &= \langle 0|Q_a\phi_i(x)\phi_j(y) - \phi_i(x)\phi_j(y)Q_a|0\rangle = \\ &= \langle 0|Q_a\phi_i(x)\phi_j(y) - \phi_i(x)Q_a\phi_j(y) + \phi_i(x)Q_a\phi_j(y) - \phi_i(x)\phi_j(y)Q_a|0\rangle = \\ &= \langle 0|[Q_a, \phi_i(x)]\phi_j(y)|0\rangle + \langle 0|\phi_i[Q_a, \phi_j(y)]|0\rangle = \\ &= -\imath\lambda^a_{ik}\langle 0|\phi_k(x)\phi_j(y)|0\rangle - \imath\lambda^a_{jk}\langle 0|\phi_i(x)\phi_k(y)|0\rangle \ ,\end{aligned} \tag{6.367}$$

quindi

$$\begin{aligned}\lambda^a_{ik}\Delta_{kj}(x-y) + \lambda^a_{jk}\Delta_{ik}(x-y) = 0 \ , \\ \lambda^a_{ik}\Delta_{kj}(x-y) - \lambda^a_{kj}\Delta_{ik}(x-y) = 0 \ , \\ \lambda^a\Delta(x-y) - \Delta(x-y)\lambda^a = 0 \ , \\ \boxed{[\lambda^a, \Delta(x-y)] = 0} \ .\end{aligned} \tag{6.368}$$

Ora per il lemma di Schur:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta(x-y) = F(x-y)I \ , \\ \Delta_{ij}(x-y) = F(x-y)\delta_{ij} \ .\end{aligned}} \tag{6.369}$$

La relazione precedente è un caso particolare delle **identità di Ward**.

Consideriamo una corrente conservata $J^a_\mu(z)$, $\partial^\mu J^a_\mu = 0$ e la funzione di Schwinger $\langle 0|\mathcal{T}[J^a_\mu(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle$. Avremo

$$\begin{aligned}\partial^\mu_z\langle 0|\mathcal{T}[J^a_\mu(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle &= \delta(z^0 - x^0)\langle 0|\mathcal{T}\Big\{[J^a_0(z), \phi_i(x)]\phi_j(y)\Big\}|0\rangle + \\ &+ \delta(z^0 - y^0)\langle 0|\mathcal{T}\Big\{[J^a_0(z), \phi_j(y)]\phi_i(x)\Big\}|0\rangle \ .\end{aligned} \tag{6.370}$$

Ora

$$\begin{aligned}[Q_a, \phi_i(\vec{x}, x^0)] = -\imath\lambda^a_{ik}\phi_k(\vec{x}, x^0) = \left[\int d^3z \ J^a_0(\vec{z}, z^0), \phi_i(\vec{x}, x^0)\right] = \\ = \int d^3z \ \left[J^a_0(\vec{z}, z^0), \phi_i(\vec{x}, x^0)\right] = -\imath\lambda^a_{ik}\int d^3z \ \delta^3(\vec{z}-\vec{x})\phi_k(\vec{z}, x^0) \ ,\end{aligned} \tag{6.371}$$

allora

$$\left[J^a_0(\vec{z}, z^0), \phi(\vec{x}, x^0)\right] = -\imath\lambda^a_{ik}\delta^3(\vec{z}-\vec{x})\phi_k(\vec{z}, x^0) \ . \tag{6.372}$$

Dunque

$$\begin{aligned}\partial^\mu_z\langle 0|\mathcal{T}[J^a_\mu(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle = \delta(z^0-x^0)\langle 0|\mathcal{T}\Big\{-\imath\lambda^a_{ik}\delta^3(\vec{z}-\vec{x})\phi_k(\vec{x}, x^0)\phi_j(y)\Big\}|0\rangle + \\ + \delta(z^0-y^0)\langle 0|\mathcal{T}\Big\{-\imath\lambda^a_{jk}\delta^3(\vec{z}-\vec{y})\phi_k(\vec{y}, y^0)\phi_i(x)\Big\}|0\rangle = \\ = -\imath\lambda^a_{ik}\delta^4(z-x)\langle 0|\mathcal{T}[\phi_k(x)\phi_j(y)]|0\rangle + \\ + (-\imath)\lambda^a_{jk}\delta^4(z-y)\langle 0|\mathcal{T}[\phi_k(y)\phi_i(x)]|0\rangle \ .\end{aligned} \tag{6.373}$$

Riassumendo:

$$\boxed{\begin{aligned}\partial^\mu_z\langle 0|\mathcal{T}[J^a_\mu(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle = & -\imath\lambda^a_{ik}\delta^4(z-x)\langle 0|\mathcal{T}[\phi_k(x)\phi_j(y)]|0\rangle - \\ & -\imath\lambda^a_{jk}\delta^4(z-y)\langle 0|\mathcal{T}[\phi_k(y)\phi_i(x)]|0\rangle\end{aligned}} \ . \tag{6.374}$$

Valutiamo $\int d^4z \ \partial^\mu_z\langle 0|\mathcal{T}[J^a_\mu(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle$:

$$\begin{aligned}\int d^4z \ \partial^\mu_z\langle 0|\mathcal{T}[J^a_\mu(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle = \int d^4z \ \partial^0_z\langle 0|\mathcal{T}[J^a_0(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle + \\ + \int d^4z \ \partial^i_z\langle 0|\mathcal{T}[J^a_i(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle \ .\end{aligned} \tag{6.375}$$

Valutiamo il secondo integrale:

$$\begin{aligned}\int d^4z \ \partial^i_z\langle 0|\mathcal{T}[J^a_i(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle = \int dz^0\int d^3z \ \partial^i_z\langle 0|\mathcal{T}[J^a_i(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle = \\ = \int dz^0\int d\sigma \ n^i \ \langle 0|\mathcal{T}[J^a_i(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle \ .\end{aligned} \tag{6.376}$$

Enunciamo ora il **lemma di Riemann-Lebesgue**.

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è una funzione Lebesgue-integrabile allora

$$\lim_{z\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ e^{\imath zx} \ dx \ = \ 0 \ . \tag{6.377}$$

Ora consideriamo la funzione di Weightman $\langle 0|A(x)B(y)|0\rangle$. Inserendo la spettralizzazione dell'identità avremo:

$$\langle 0|A(x)B(y)|0\rangle = \langle 0|A(x)|0\rangle\langle 0|B(y)|0\rangle + \int d^3p \ \langle 0|A(x)|p\rangle\langle p|B(y)|0\rangle + ... \tag{6.378}$$

Ora

$$\int d^3p \ \langle 0|A(x^0, \vec{x})|p\rangle\langle p|B(y^0, \vec{y})|0\rangle = \int d^3p \ \langle 0|A(x^0, 0)|p\rangle\langle p|B(y^0, 0)|0\rangle \ e^{\imath\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \ . \tag{6.379}$$

Poiché $|p\rangle$ appartiene allo spettro continuo dell'operatore impulso $\vec{P}$ assumiamo che gli elementi di matrice dipendano da $\vec{p}$ in modo sufficientemente regolare (siano Lebesgue-integrabili) da permettere l'uso del lemma di Riemann-Lebesgue. Di conseguenza l'integrale tende a zero quando $|\vec{x}-\vec{y}| \to \infty$. Quindi (se il vuoto è unico) avremo:

$$\boxed{\lim_{|\vec{x}-\vec{y}|\to\infty} \langle 0|A(x)B(y)|0\rangle = \langle 0|A(x)|0\rangle\langle 0|B(y)|0\rangle} \ , \tag{6.380}$$

che rappresenta l'espressione matematica della **proprietà di clustering**.

In altre parole, l'elemento di matrice sul vuoto del prodotto di operatori si fattorizza nel prodotto degli elementi di matrice degli operatori quando questi sono separati da una distanza spaziale infinita. Inoltre:

$$\begin{aligned}
&\lim_{|\vec{x}-\vec{y}|\to\infty} \langle 0|\mathcal{T}[A(x)B(y)]|0\rangle = \lim_{|\vec{x}-\vec{y}|\to\infty} \langle 0|A(x)B(y)|0\rangle\theta(x^0-y^0) + \langle 0|B(y)A(x)|0\rangle\theta(y^0-x^0) = \\
&= \langle 0|A(x)|0\rangle\langle 0|B(y)|0\rangle\theta(x^0-y^0) + \langle 0|B(y)|0\rangle\langle 0|A(x)|0\rangle\theta(y^0-x^0) = \\
&= \mathcal{T}\left[\langle 0|A(x)|0\rangle\langle 0|B(y)|0\rangle\right] \ .
\end{aligned} \tag{6.381}$$

Nell'integrale

$$\int d\sigma\ n^i \langle 0|\mathcal{T}[J_i^a(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle \ , \tag{6.382}$$

la superficie d'integrazione è all'infinito spaziale, per cui per la proprietà di clustering l'elemento di matrice si fattorizza in:

$$\mathcal{T}\left[\langle 0|J_i^a(z)|0\rangle\langle 0|\phi_i(x)\phi_j(y)|0\rangle\right] \ , \tag{6.383}$$

e per l'invarianza di Lorentz:

$$\langle 0|J_i^a(z)|0\rangle \ = \ 0 \ . \tag{6.384}$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned}
&\int d^4z\ \partial_0^z \langle 0|\mathcal{T}[J_0^a(z^0,\vec{z})\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle = \\
&= \int d^3z\ \langle 0|J_0^a(\infty,\vec{z})\mathcal{T}[\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle - \int d^3z\ \langle 0|\mathcal{T}[\phi_i(x)\phi_j(y)]J_0^a(-\infty,\vec{z})|0\rangle = \\
&= \langle 0|Q^a\mathcal{T}[\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle - \langle 0|\mathcal{T}[\phi_i(x)\phi_j(y)]Q^a|0\rangle = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{6.385}$$

perché il vuoto è annichilato dalla carica. Quindi:

$$\boxed{\int d^4z\ \partial_\mu^z \langle 0|\mathcal{T}[J_a^\mu(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle = 0} \ . \tag{6.386}$$

Ma allora:

$$\lambda_{ik}^a \langle 0|\mathcal{T}[\phi_k(x)\phi_j(y)]|0\rangle = -\lambda_{jk}^a \langle 0|\mathcal{T}[\phi_k(y)\phi_i(x)]|0\rangle \ . \tag{6.387}$$

Prendendo $x^0 > y^0$ avremo

$$\begin{aligned}
&\lambda_{ik}^a \langle 0|\phi_k(x)\phi_j(y)|0\rangle = -\lambda_{jk}^a \langle 0|\phi_i(x)\phi_k(y)|0\rangle \ , \\
&\lambda_{ik}^a \Delta_{kj}(x-y) = -\lambda_{jk}^a \Delta_{ik}(x-y) \ , \\
&\lambda_{ik}^a \Delta_{kj}(x-y) - \lambda_{kj}^a \Delta_{ik}(x-y) = 0 \ , \\
&\lambda_{ik}^a \Delta_{kj}(x-y) - \Delta_{ik}(x-y)\lambda_{kj}^a = 0 \ , \\
&[\lambda^a,\ \Delta(x-y)] = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{6.388}$$

cioè la relazione ottenuta precedentemente.

E' possibile ricavare l'identità di Ward direttamente dall'integrale funzionale. Consideriamo come sempre la teoria descritta dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)^2 + \frac{1}{2}\mu_0^2 \phi_i \phi_i + \frac{g_0}{4!}(\phi_i \phi_i)^2 \ . \tag{6.389}$$

Regolarizziamo la teoria in modo tale che la simmetria $SO(N)$ sia conservata anche dopo la regolarizzazione.

Consideriamo il funzionale generatore:

$$Z[\eta] = \int \delta\phi \ \exp\left[-S(\phi) + \int \eta_k(x)\phi_k(x)\right] \ d^4x \ . \tag{6.390}$$

Facciamo un cambiamento di variabili:

$$\phi_i(x) = \phi_i'(x) + g^a(x)\lambda^a_{ij}\phi_j'(x) \ , \tag{6.391}$$

(punto per punto è una trasformazione ortogonale sui campi). Avremo:

$$Z[J] = \int \delta\phi' \ \exp\left[-S(\phi' + g^a\lambda^a\phi') + \int \eta_k(x)\Big(\phi_k'(x) + g^a(x)\lambda^a_{kl}\phi_l'(x)\Big) \ d^4x\right] \ . \tag{6.392}$$

Il determinante jacobiano della trasformazione vale

$$\frac{\delta\phi}{\delta\phi'} = \det(1 + g^a\lambda^a) = 1 + g^a \mathrm{tr}\lambda^a + O(g^2) = 1 + O(g^2) \ , \tag{6.393}$$

poiché $\mathrm{tr}\lambda^a = 0$. Quindi

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \delta\phi' \exp\left\{-S(\phi') - \int \partial_\mu g^a(x) J^\mu_a(x) + \int \eta_k(x)\Big[\phi_k'(x) + g^a(x)\lambda^a_{kl}\phi_l'(x)\Big] d^4x\right\} = \\ &= \int \delta\phi \ e^{-S(\phi)+\int \eta_k(x)\phi_k(x)} \left[1 - \int \partial_\mu g^a(x) J^\mu_a(x) + \int \eta_k(x) g^a(x)\lambda^a_{kl}\phi_l(x) + O(g^2)\right] = \\ &= Z[J] - \int \delta\phi \int \partial_\mu g^a(x) J^\mu_a(x) \ e^{-S(\phi)+\int\eta\phi} + \int \delta\phi \int \eta_k(x) g^a(x)\lambda^a_{kl}\phi_l(x) \ e^{-S(\phi)+\int\eta\phi} + O(g^2) \ , \end{aligned} \tag{6.394}$$

quindi

$$\int \delta\phi \int \partial_\mu g^a(x) J^\mu_a(x) \ e^{-S(\phi)+\int\eta\phi} = \int \delta\phi \int \eta_k(x) g^a(x)\lambda^a_{kl}\phi_l(x) \ e^{-S(\phi)+\int\eta\phi} \ , \tag{6.395}$$

e allora otteniamo

$$\boxed{\int \partial_\mu g^a(x) \langle J^\mu_a(x)\rangle_\eta \ d^4x = \int g^a(x)\eta_k(x)\lambda^a_{kl}\langle\phi_l(x)\rangle_\eta \ d^4x} \ , \tag{6.396}$$

che contiene **tutte le identità di Ward**.

Da

$$-\int g^a(x)\partial_\mu \langle J^\mu_a(x)\rangle_\eta \ d^4x = \int g^a(x)\eta_k(x)\lambda^a_{kl}\langle\phi_l(x)\rangle_\eta \ d^4x \ , \tag{6.397}$$

ed essendo $g^a(x)$ arbitrarie, per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni avremo:

$$\boxed{\partial_\mu \langle J_a^\mu(x)\rangle_\eta + \eta_k(x)\lambda_{kl}^a \langle \phi_l(x)\rangle_\eta \;= 0} \; . \tag{6.398}$$

A questo punto prendiamo la derivata funzionale

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\eta_i(y)} \left[\partial_\mu^x \langle J_a^\mu(x)\rangle_\eta + \eta_k(x)\lambda_{kl}^a \langle \phi_l(x)\rangle_\eta\right] \;= 0 \; , \\
&\frac{\delta}{\delta\eta_i(y)} \left[\partial_\mu^x \int \delta\phi \; J_a^\mu(x) \; e^{-S(\phi)+\int\eta\phi} + \eta_k(x)\lambda_{kl}^a \int \delta\phi \; \phi_l(x) \; e^{-S(\phi)+\int\eta\phi}\right] = \\
&= \partial_\mu^x \int \delta\phi \; J_a^\mu(x)\phi_i(y) \; e^{-S(\phi)+\int\eta\phi} + \delta_{ik}\delta^4(x-y)\lambda_{kl}^a \int \delta\phi \; \phi_l(x) \; e^{-S(\phi)+\int\eta\phi} + \\
&+ \eta_k(x)\lambda_{kl}^a \int \delta\phi \; \phi_l(x)\phi_i(y) \; e^{-S(\phi)+\int\eta\phi} = 0 \; .
\end{aligned} \tag{6.399}$$

Calcoliamo a $\eta = 0$ e otteniamo la 1^a **identità di Ward**:

$$\boxed{\partial_\mu \langle J_a^\mu(x)\phi_i(y)\rangle + \delta^4(x-y)\lambda_{il}^a \langle \phi_l(x)\rangle \;= 0} \; . \tag{6.400}$$

Prendendo le derivate funzionali successive

$$\frac{\delta}{\delta\eta_m(z)}\frac{\delta}{\delta\eta_i(y)}...\Big|_{\eta=0} \; , \tag{6.401}$$

otteniamo tutte le possibili identità di Ward. Consideriamo, quindi, la seconda identità di Ward:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu^a \langle J_a^\mu(z)\phi_i(x)\phi_j(y)\rangle + \delta^4(z-x)\lambda_{il}^a \langle \phi_l(x)\phi_j(y)\rangle + \\
+ \delta^4(z-y)\lambda_{jl}^a \langle \phi_i(x)\phi_l(y)\rangle = 0 \; ,
\end{aligned} \tag{6.402}$$

e affrontiamo il problema della **rinormalizzazione**.

Per rendere finita la funzione a 2-punti dobbiamo riscalare i campi ponendo $\phi = Z^{-1/2}\phi_0$ cosicché la funzione di Green $\Delta_R = \langle\phi\phi\rangle = Z^{-1}\Delta_B$ è finita quando il cut-off viene rimosso se aggiustiamo opportunamente m_0 e g_0. Di conseguenza anche il termine

$$\partial_\mu \langle J_a^\mu(z)\frac{\phi_i(x)}{\sqrt{Z}}\frac{\phi_j(x)}{\sqrt{Z}}\rangle \; , \tag{6.403}$$

è finito. A questo punto si può dimostrare che anche il termine

$$\langle J_a^\mu(z)\frac{\phi_i(x)}{\sqrt{Z}}\frac{\phi_j(x)}{\sqrt{Z}}\rangle \; , \tag{6.404}$$

è finito.

Vediamo cosa succede quando il vuoto **non** è invariante sotto una trasformazione del gruppo di simmetria. Ritorniamo allo spazio di Minkowski ordinario.

Supponiamo che la teoria abbia un gruppo continuo di simmetria con le correnti conservate $\partial_\mu J_a^\mu(x) = 0$, ma che

$$Q_a|0\rangle \neq 0 \; . \tag{6.405}$$

Possiamo subito vedere che lo stato $Q_a|0\rangle$ ha norma infinita. Infatti

$$\begin{aligned}\langle 0|Q_aQ_a|0\rangle &= \int d^3xd^3y\ \langle 0|J^0_a(\vec{x},x^0)J^0_a(\vec{y},y^0)|0\rangle = \\ &= \int d^3xd^3y\ \langle 0|e^{-\imath\vec{P}\cdot\vec{y}}J^0_a(\vec{x}-\vec{y},x^0)e^{\imath\vec{P}\cdot\vec{y}}e^{-\imath\vec{P}\cdot\vec{y}}J^0_a(0,y^0)e^{\imath\vec{P}\cdot\vec{y}}|0\rangle = \\ &= \int d^3xd^3y\ \langle 0|J^0_a(\vec{x}-\vec{y},x^0)J^0_a(0,y^0)|0\rangle\ \propto\ \text{Volume} = \infty\ ,\end{aligned} \tag{6.406}$$

e di conseguenza l'operatore di carica Q_a è mal definito nel nostro spazio di Hilbert. Introduciamo il concetto di **parametro d'ordine**. Consideriamo un campo locale $O_i(x)$ che può essere un campo fondamentale (ad esempio $\phi_i(x)$) o un qualsiasi prodotto di campi locali.

Il campo $O_i(x)$ trasforma come una rappresentazione irriducibile non banale del gruppo di simmetria, cioè

$$[Q_a, O_i(x)] = \imath R_{aik}O_k(x)\ . \tag{6.407}$$

Se la simmetria è rotta allora esiste qualche combinazione di campi locali O tale che:

$$\langle 0|[Q_a, O_i(x)]|0\rangle = \imath R_{aik}\langle 0|O_k(x)|0\rangle \neq 0\ , \tag{6.408}$$

altrimenti tutte le funzioni di correlazione sarebbero invarianti sotto la simmetria.

Consideriamo l'elemento di matrice sul vuoto $\langle 0|J^\mu_a(x)O_i(0)|0\rangle$ e inseriamo un insieme completo di stati intermedi:

$$\begin{aligned}\langle 0|J^\mu_a(x)O_i(0)|0\rangle &= \sum_n \langle 0|J^\mu_a(x)|\widetilde{n}\rangle\langle\widetilde{n}|O_i(0)|0\rangle = \\ &= \sum_n \langle 0|e^{\imath Px}J^\mu_a(0)e^{-\imath Px}|\widetilde{n}\rangle\langle\widetilde{n}|O_i(0)|0\rangle = \\ &= \sum_n \langle 0|J^\mu_a(0)|\widetilde{n}\rangle\langle\widetilde{n}|O_i(0)|0\rangle\ e^{-\imath p_n x} = \\ &= \int \sum_n \langle 0|J^\mu_a(0)|\widetilde{n}\rangle\langle\widetilde{n}|O_i(0)|0\rangle\ e^{-\imath p_n x}\delta^4(p_n-q)d^4q = \\ &= \int d^4q\ e^{-\imath qx}\sum_n \langle 0|J^\mu_a(0)|\widetilde{n}\rangle\langle\widetilde{n}|O_i(0)|0\rangle\ \delta^4(p_n-q)d^4q = \\ &= \int d^4q\ e^{-\imath qx}\ \widetilde{\rho}^\mu_{a,i}(q)\ .\end{aligned} \tag{6.409}$$

Poiché $q \in$ allo spettro degli stati fisici allora $q^2 \geq 0$, $q^0 \geq 0$.

Vediamo cosa implica l'invarianza di Lorentz su $\widetilde{\rho}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}^\mu_{a,i}(\Lambda q) &= \sum_n \langle 0|J^\mu_a(0)|\widetilde{n}\rangle\langle\widetilde{n}|O_i(0)|0\rangle\delta^4(p_n-\Lambda q) = \\ &= \sum_n \langle 0|J^\mu_a(0)|\Lambda\widetilde{n}\rangle\langle\Lambda\widetilde{n}|O_i(0)|0\rangle\delta^4(\Lambda p_n-\Lambda q) = \\ &= \sum_n \langle 0|U^\dagger(\Lambda)J^\mu_a(0)U(\Lambda)|\widetilde{n}\rangle\langle\widetilde{n}|U^\dagger(\Lambda)O_i(0)U(\Lambda)|0\rangle\delta^4(\Lambda p_n-\Lambda q) = \\ &= \sum_n \Lambda^\mu{}_\nu\langle 0|J^\nu_a(0)|\widetilde{n}\rangle\langle\widetilde{n}|O_i(0)|0\rangle\delta^4(p_n-q) = \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu\widetilde{\rho}^\nu_{a,i}(q)\ .\end{aligned} \tag{6.410}$$

Quindi

$$\widetilde{\rho}^{\mu}(q) \;\propto\; q^{\mu} \;, \tag{6.411}$$

e precisamente

$$\boxed{\widetilde{\rho}^{\mu}_{a,i}(q) = \rho_{a,i}(q^2) q^{\mu} \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3}} \;. \tag{6.412}$$

La $\theta(q^0)$ è necessaria ad assicurare che $\widetilde{q} = 0$ per $q^0 < 0$. Inoltre $\rho_{a,i}(q^2) = 0$ per $q^2 < 0$. Il fattore $(2\pi)^3$ è solo per convenienza.

Quindi abbiamo:

$$\langle 0|J^{\mu}_a(x) O_i(0)|0\rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\; e^{-\imath qx} \rho_{a,i}(q^2) q^{\mu} \theta(q^0) \;. \tag{6.413}$$

Usando la conservazione della corrente $\partial_{\mu} J^{\mu}_a(x) = 0$ otteniamo

$$\partial_{\mu}\langle 0|J^{\mu}_a(x) O_i(0)|0\rangle = 0 = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\; e^{-\imath qx} - \imath q^2 \rho_{a,i}(q^2) \theta(q^0) \;, \tag{6.414}$$

e quindi

$$\boxed{q^2 \rho_{a,i}(q^2) = 0} \;. \tag{6.415}$$

A questo punto saremmo portati a concludere che $\rho_{a,i}(q^2) = 0$ per tutti i q^2. Tuttavia $\rho_{a,i}(q^2)$ è una distribuzione e nel campo delle distribuzioni avremo altre soluzioni del tipo:

$$\boxed{\rho_{a,i}(q^2) = C_{a,i} \delta(q^2)} \;. \tag{6.416}$$

Se qualcuno dei $C_{a,i} \neq 0$ allora deve esistere uno stato con $q^2 = 0$ e quindi la teoria deve avere particelle a massa nulla (perché altrimenti lo spettro delle energie del centro di massa q^2 non si estenderebbe fino a zero).

Ricordiamo come è definito il prodotto scalare di due vettori nello spazio di Hilbert: (ϕ,ψ) è lineare in ψ e antilineare in ϕ, cioè:

$$\begin{aligned}
&(\phi, c\psi) = c(\phi,\psi) \ , \\
&(c\phi, \psi) = c^*(\phi,\psi) \ , \\
&(\phi,\psi) = (\psi,\phi)^* \ , \\
&(\phi, c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1(\phi,\psi_1) + c_2(\phi,\psi_2) \ , \\
&(c_1\phi_1 + c_2\phi_2, \psi) = c_1^*(\phi_1,\psi) + c_2^*(\phi_2,\psi) \ , \\
&(\psi,\psi) \geq 0 \ ,
\end{aligned} \tag{6.417}$$

con $(\psi,\psi) = 0$ se e solo se $\psi = 0$.

Un operatore lineare è definito da

$$A(c\psi + d\phi) = cA\psi + dA\phi \ . \tag{6.418}$$

Per un operatore lineare l'aggiunto hermitiano è definito da

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi,\psi) = (\psi, A\phi)^* \ . \tag{6.419}$$

Un operatore lineare e unitario è definito da

$$\begin{aligned}
(U\phi, U\psi) &= (\phi,\psi) \ , \\
U(\xi\phi + \eta\psi) &= \xi U\phi + \eta U\psi \ .
\end{aligned} \tag{6.420}$$

Un operatore antilineare e antiunitario è definito da

$$\begin{aligned}
(U\phi, U\psi) &= (\phi,\psi)^* \ , \\
U(\xi\phi + \eta\psi) &= \xi^* U\phi + \eta^* U\psi \ .
\end{aligned} \tag{6.421}$$

Se definiamo l'aggiunto hermitiano di un operatore antilineare come

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi,\psi) \ , \tag{6.422}$$

avremo

$$\begin{aligned}
(c\phi, A^\dagger\psi) = c^*(\phi, A^\dagger\psi) = (Ac\phi,\psi) = (c^*A\phi,\psi) = \\
= c(A\phi,\psi) = c(\phi, A^\dagger\psi) \ ,
\end{aligned} \tag{6.423}$$

cioè il lato sinistro è antilineare in ϕ, mentre il lato destro è lineare in ϕ, il che non è consistente. Definiamo quindi l'aggiunto hermitiano di un operatore antilineare come

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi,\psi)^* = (\psi, A\phi) \ , \tag{6.424}$$

cosicché

$$\begin{aligned}
(c\phi, A^\dagger\psi) = c^*(\phi, A^\dagger\psi) = (Ac\phi,\psi)^* = (c^*A\phi,\psi)^* = \\
= c^*(A\phi,\psi)^* = c^*(\phi, A^\dagger\psi) \ .
\end{aligned} \tag{6.425}$$

Ricapitolando avremo

$$\begin{aligned}
&\text{Op. lin. unitario } (U\phi, U\psi) = (\phi, U^\dagger U\psi) = (\phi,\psi) \ , \\
&\text{Op. ant. antiunitario } (U\phi, U\psi) = (\phi, U^\dagger U\psi)^* = (\phi,\psi)^* \ ,
\end{aligned} \tag{6.426}$$

cosicché sia per un operatore lineare unitario che per un operatore antilineare e antiunitario avremo:

$$U^\dagger U = I \ . \tag{6.427}$$

Consideriamo l'operatore $\Theta = \mathrm{CPT}$. Θ è antilineare e antiunitario. Sappiamo che qualsiasi teoria quantistica relativistica di campo locale deve essere invariante sotto trasformazioni CPT. Per un campo scalare $O(x)$ e un campo 4-vettoriale J^μ la trasformazione CPT si esprime come:

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta O(x)\Theta^\dagger &= O(-x) \ , \\ \Theta J^\mu(x)\Theta^\dagger &= -J^\mu(-x) \ , \end{aligned}} \ . \tag{6.428}$$

Valutiamo

$$\begin{aligned} \langle 0|J^\mu_a(x)O_i(0)|0\rangle &= (\psi_\Omega, J^\mu_a(x)O_i(0)\psi_\Omega) = (\psi_\Omega, \Theta^\dagger\Theta J^\mu_a(x)O_i(0)\psi_\Omega) = \\ &= (\Theta\psi_\Omega, \Theta J^\mu_a(x)O_i(0)\psi_\Omega)^* = (\Theta\psi_\Omega, \Theta J^\mu_a(x)\Theta^\dagger\Theta O_i(0)\psi_\Omega)^* = \\ &= (\Theta\psi_\Omega, \Theta J^\mu_a(x)\Theta^\dagger\Theta O_i(0)\Theta^\dagger\Theta\psi_\Omega)^* = \\ &= (\psi_\Omega, -J^\mu_a(-x)O_i(0)\psi_\Omega)^* = -(\psi_\Omega, J^\mu_a(-x)O_i(0)\psi_\Omega)^* = \\ &= -(J^\mu_a(-x)O_i(0)\psi_\Omega, \psi_\Omega) = -(O_i(0)\psi_\Omega, J^\mu_a(-x)\psi_\Omega) = \\ &= -(\psi_\Omega, O_i(0)J^\mu_a(-x)\psi_\Omega) = -\langle 0|O_i(0)J^\mu_a(-x)|0\rangle \ . \end{aligned} \tag{6.429}$$

Abbiamo trovato

$$\boxed{\langle 0|J^\mu_a(x)O_i(0)|0\rangle = -\langle 0|O_i(0)J^\mu_a(-x)|0\rangle} \ . \tag{6.430}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \langle 0|O_i(0)J^\mu_a(x)|0\rangle = -\langle 0|J^\mu_a(-x)O_i(0)|0\rangle &= -C_{a,i}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\ e^{\imath qx}\delta(q^2)q^\mu\theta(q^0) = \\ = \langle 0|J^\mu_a(x)O_i(0)|0\rangle^* &= C^*_{a,i}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\ e^{\imath qx}\delta(q^2)q^\mu\theta(q^0) \ , \end{aligned} \tag{6.431}$$

e quindi:

$$\boxed{C^*_{a,i} = -C_{a,i}} \ , \tag{6.432}$$

cioè $C_{a,i}$ è immaginario puro come conseguenza del teorema **CPT**.

Consideriamo il valore di aspettazione sul vuoto del commutatore:

$$\langle 0|[J^\mu_a(x), O_i(0)]|0\rangle = C_{a,i}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\ \delta(q^2)q^\mu\theta(q^0)\left(e^{-\imath qx} + e^{\imath qx}\right) \ . \tag{6.433}$$

Poniamo $\mu = 0$ e integriamo in d^3x:

$$
\begin{aligned}
&\int d^3x\ \langle 0|[J_a^0(\vec{x},x^0), O_i(0)]|0\rangle = \langle 0|[Q_a, O_i(0)]|0\rangle = \int d^3x\ \langle 0|[J_a^0(\vec{x},0), O_i(0)]|0\rangle = \\
&\int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\ \delta(q^2) q^0 \theta(q^0) \left(e^{-\imath\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{\imath\vec{q}\cdot\vec{x}}\right) = \\
&\int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\ \delta(q_0^2 - |\vec{q}|^2) q^0 \theta(q^0) \left(e^{-\imath\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{\imath\vec{q}\cdot\vec{x}}\right) = \\
&\int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\ \delta[(q_0 - |\vec{q}|)(q_0 + |\vec{q}|)] q^0 \theta(q^0) \left(e^{-\imath\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{\imath\vec{q}\cdot\vec{x}}\right) = \\
&\int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3}\ \left[\frac{\delta(q_0 - |\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} + \frac{\delta(q_0 + |\vec{q}|)}{2|\vec{q}|}\right] q^0 \theta(q^0) \left(e^{-\imath\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{\imath\vec{q}\cdot\vec{x}}\right) = \\
&\int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \frac{\delta(q_0 - |\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} q^0 \theta(q^0) \left(e^{-\imath\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{\imath\vec{q}\cdot\vec{x}}\right) = \\
&= \int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2|\vec{q}|} |\vec{q}| \left(e^{-\imath\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{\imath\vec{q}\cdot\vec{x}}\right) = \\
&= \int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left(e^{-\imath\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{\imath\vec{q}\cdot\vec{x}}\right) = \\
&= \int d^3x C_{a,i}\ \delta^3(x) = \\
&= C_{a,i}\ .
\end{aligned} \tag{6.434}
$$

Troviamo quindi:

$$
\boxed{C_{a,i} = \langle 0|[Q_a, O_i(0)]|0\rangle = \imath R^a_{ik} \langle 0|O_k(0)|0\rangle}\ . \tag{6.435}
$$

Quindi se la simmetria è spontaneamente rotta avremo che per qualche a:

$$
\boxed{C_{a,i}\ \neq\ 0}\ , \tag{6.436}
$$

e quindi

$$
\boxed{\rho_{a,i}(q^2)\ =\ \imath\delta(q^2) R^a_{ik} \langle O_k\rangle}\ . \tag{6.437}
$$

Così finché la simmetria è rotta $\rho_i^a(q^2)$ non può annullarsi, ma piuttosto consiste interamente di un termine proporzionale a $\delta(q^2)$. Tale termine può ovviamente nascere solo in una teoria che ha particella a massa nulla, perché altrimenti lo spettro delle energie (al quadrato) del centro di massa ρ_n^2 non si estenderebbe fino a zero.

Ora lo stato $O_i(0)|0\langle$ è invariante per rotazioni

$$
U(R) O_i(0)|0\rangle = U(R) O_i(0) U^\dagger(R) U(R)|0\rangle = O_i(0)|0\rangle\ . \tag{6.438}
$$

Inoltre sotto una rotazione lo stato $|n, i\langle$ trasforma come

$$
U(R)|n, i\rangle = \sum_j d_{ij} |n, i\rangle\ . \tag{6.439}
$$

Ma

$$
\begin{aligned}
\langle n|O_k(0)|0\rangle &= \langle n|U^\dagger U O_k(0) U^\dagger U|0\rangle = \langle n|U^\dagger O_k(0)|0\rangle = \\
&= \sum_j d_{ij} \langle n|O_k(0)|0\rangle = \sum_j \delta_{ij} \langle n|O_k(0)|0\rangle\ ,
\end{aligned} \tag{6.440}
$$

allora $d_{ij} = \delta_{ij}$. Ma questo è assurdo se lo stato $|n\rangle$ trasforma come una rappresntazione non banale del gruppo delle rotazioni.

Di conseguenza $\langle n|O_k(0)|0\rangle$ deve annullarsi per qualsiasi stato $|n\rangle$ che abbia elicità diversa da zero. Inoltre $\langle 0|J_0^a|n\rangle$ si annulla per ogni stato $|n\rangle$ che ha parità intrinseca o numeri quantici interni (non rotti) differenti da J_0^a. In definitiva una **simmetria rotta** con $R_{ik}^a\langle O_k(0)\rangle \neq 0$ richiede l'esistenza di particella a massa nulla di spin zero e stessa parità e numeri quantici interni di J^0. Questi sono i **bosoni di Goldstone**.

E' utile vedere come il coefficiente della funzione δ in $\rho_{a,i}(q^2)$ è legato alle proprietà del bosone di Goldstone. Consideriamo:

$$\langle 0|J_a^\mu(x)|\widetilde{\mathrm{BG}}\rangle = F_a^\mu(p)e^{-\imath px} \ , \tag{6.441}$$

e

$$\begin{aligned}\langle 0|J_a^\mu(0)|\widetilde{\Lambda\mathrm{BG}}\rangle = F_a^\mu(\Lambda p) &= \langle 0|U^\dagger(\Lambda)J_a^\mu(0)U(\Lambda)|\widetilde{\Lambda\mathrm{BG}}\rangle = \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu\langle 0|J_a^\nu(0)|\widetilde{\mathrm{BG}}\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu F_a^\nu(p) \ ,\end{aligned} \tag{6.442}$$

quindi

$$F_a^\mu(p) = p^\mu f_a(p^2) = p^\mu f_a \ , \tag{6.443}$$

con f_a costante. Quindi

$$\langle 0|J_a^\mu(x)|\widetilde{\mathrm{BG}}\rangle = f_a p^\mu e^{-\imath px} \ , \tag{6.444}$$

mentre

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\mathrm{BG}}|O_i(0)|0\rangle &= G(p) \ , \\ \langle\widetilde{\Lambda\mathrm{BG}}|O_i(0)|0\rangle &= G(\Lambda p) = \langle\widetilde{\mathrm{BG}}|U^\dagger(\Lambda)O_i(0)U(\Lambda)|0\rangle = \langle\widetilde{\mathrm{BG}}|O_i(0)|0\rangle = \\ &= G(p) \ ,\end{aligned} \tag{6.445}$$

quindi $G(p) = G(p^2) = G = \mathrm{cost.}$

Inoltre per la conservazione della corrente

$$\partial_\mu^x\langle 0|J_a^\mu(x)|\widetilde{\mathrm{BG}}\rangle = -\imath f_a p^2 e^{-\imath px} = 0 \ . \tag{6.446}$$

Poiché $p^2 = 0$ avremo $f_a \neq 0$. Quindi:

$$\boxed{C_{a,i} \ \propto \ f_a G} \ , \tag{6.447}$$

f_a è una misura dell'intensità della rottura della simmetria.

Ritorniamo all'euclideo (l'invarianza di Lorentz è un'invarianza $SO(4)$) e consideriamo l'identità di Ward:

$$\boxed{\partial_\mu^x\langle J_a^\mu(x)O_i(0)\rangle + \delta^4(x)R_{a,ik}\langle O_k(0)\rangle = 0} \ , \tag{6.448}$$

con

$$R_{a,ik}\langle O_k(0)\rangle \neq 0 \ . \tag{6.449}$$

Il valor medio $\langle J_a^\mu(x)O_i(0)\rangle$ sarà della forma

$$\langle J_a^\mu(x)O_i(0)\rangle = \partial_x^\mu F_{a,i}(x^2) = x^\mu G_{a,i}(x^2) \ , \tag{6.450}$$

e quindi

$$\partial_\mu\partial^\mu F_{a,i}(x^2) = -\delta^4(x)R_{a,ik}\langle O_k(0)\rangle \ , \tag{6.451}$$

cioè

$$\boxed{\Delta_4 F_{a,i}(x^2) = -\delta^4(x) R_{a,ik}\langle O_k(0)\rangle} \ , \tag{6.452}$$

dove Δ_4 è il laplaciano in 4 dimensioni. La soluzione può essere scritta come

$$F_{a,i}(x^2) = R_{a,ik}\langle O_k(0)\rangle \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\ \frac{e^{\imath qx}}{q^2} \ , \tag{6.453}$$

e quindi

$$\boxed{\langle J^\mu_a(x) O_i(0)\rangle = \imath R_{a,ik}\langle O_k(0)\rangle \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\ \frac{q^\mu}{q^2} e^{\imath qx}} \ . \tag{6.454}$$

(Se integriamo $\partial^x_\mu \langle J^\mu_a(x) O_i(0)\rangle$ nel volume finito V otteniamo $\int_V d^4x\ \partial^x_\mu \langle J^\mu_a(x) O_i(0)\rangle = 0$. Questo non è più vero nel volume infinito).

Supponiamo di avere una teoria con rottura spontanea di simmetria e bosoni di Goldstone corrispondenti. Se H_0 è l'hamiltoniano del sistema avremo

$$[H_0, Q_a] = 0 \ , \tag{6.455}$$

e indicheremo i bosoni di Goldstone con $|\widetilde{\mathrm{BG}}, p\rangle$.

Inseriamo un termine di **rottura esplicita** della simmetria nell'hamiltoniano:

$$H = H_0 + \epsilon_i \int O_i(x)\ d^3x \ . \tag{6.456}$$

Avremo che

$$H_0 |\widetilde{\mathrm{BG}}, p\rangle = |\vec{p}|\, |\widetilde{\mathrm{BG}}, p\rangle \ , \tag{6.457}$$

e normalizziamo gli stati con una δ:

$$\langle p|p'\rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') \ . \tag{6.458}$$

Se consideriamo un volume finito V invece dello spazio infinito avremo

$$\vec{p}_n = \frac{2\pi}{L}\vec{n} \ , \tag{6.459}$$

cosicché

$$\begin{aligned} \langle p|p'\rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,') &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\ e^{\imath \vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,')} = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V d^3x\ e^{\imath \vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}\,')} = \\ &= \lim_{V\to\infty} \frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\vec{p}\vec{p}\,'} = \lim_{V\to\infty} \frac{V}{(2\pi)^3}\langle p|p'\rangle_V \ . \end{aligned} \tag{6.460}$$

Potremo scrivere $|p\rangle = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}}|p\rangle_V$ per $V \to \infty$. Lavoriamo nel volume finito e quindi con gli stati $|p\rangle_V$. Calcoliamo la variazione dell'energia dello stato $|p\rangle_V$ per effetto del termine di rottura in teoria delle perturbazioni al 1^o-ordine:

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= {}_V\langle p|\epsilon_i \int_V d^3x\ O_i(x)|p\rangle_V = \epsilon_i \int_V d^3x\ {}_V\langle p|\ O_i(x)|p\rangle_V = \\ &= \epsilon_i \int_V d^3x\ {}_V\langle p|\ O_i(0)|p\rangle_V = \epsilon_i V\ {}_V\langle p|\ O_i(0)|p\rangle_V \ , \end{aligned} \tag{6.461}$$

per l'invarianza per traslazioni (vale se fissiamo condizioni periodiche al bordo). Avremo

$$\Delta E_p = |\vec{p}|\sqrt{1+\frac{m^2}{|\vec{p}|^2}} - |\vec{p}| \ \sim \ |\vec{p}|\left(1+\frac{m^2}{2|\vec{p}|^2}\right) - |\vec{p}| = \frac{m^2}{2|\vec{p}|} \ . \tag{6.462}$$

Quindi

$$\frac{m^2}{2|\vec{p}|} = V\epsilon_i \, {}_V\langle p| \ O_i(0)|p\rangle_V = \frac{V}{(2\pi)^3}\epsilon_i \, {}_V\langle p| \ O_i(0)|p\rangle_V (2\pi)^3 \longrightarrow_{V\to\infty} (2\pi)^3\epsilon_i\langle p|O_i(0)|p\rangle \ . \tag{6.463}$$

Allora

$$m^2 = (2\pi)^3 2|\vec{p}|\epsilon_i\langle p|O_i(0)|p\rangle = (2\pi)^3\epsilon_i\langle\widetilde{p}|O_i(0)|\widetilde{p}\rangle \ . \tag{6.464}$$

Ora

$$\langle\widetilde{p}|O_i(0)|\widetilde{p}\rangle = \langle\widetilde{p}|U^\dagger(\Lambda)O_i(0)U(\Lambda)|\widetilde{p}\rangle = \langle\widetilde{\Lambda p}|O_i(0)|\widetilde{\Lambda p}\rangle \ , \tag{6.465}$$

e quindi $\langle\widetilde{p}|O_i(0)|\widetilde{p}\rangle$ non dipende da p, ossia:

$$\langle\widetilde{p}|O_i(0)|\widetilde{p}\rangle = C_i = \text{cost} \ . \tag{6.466}$$

Ma allora

$$m^2 = (2\pi)^3\epsilon_i C^i \ , \tag{6.467}$$

e quindi

$$\boxed{m \sim O(\sqrt{\epsilon})} \ , \tag{6.468}$$

cioè m^2 va a zero linearmente con ϵ.

Consideriamo l'azione euclidea:

$$S_E = \int d^4x_E\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi_i^2 + g_0(\phi_i\phi_i)^2 + \epsilon_i O_i\right] \ . \tag{6.469}$$

O_i trasforma come una rappresentazione non banale del gruppo ed è un termine che rompe esplicitamente la simmetria. Ad esempio potremmo prendere $O_i \propto \phi_i$.

Poniamo

$$S_E = S_0 + \epsilon_i\int d^4x O_i(x) \ , \tag{6.470}$$

e consideriamo il funzionale generatore

$$Z[\mu] = \int\delta\phi \ \exp\left[-S_0 - \epsilon_i\int d^4x O_i(x) + \int d^4x\mu_i\phi^i\right] \ , \tag{6.471}$$

ed effettuiamo il cambiamento di variabili con g^a infinitesimo:

$$\phi_i(x) = \phi_i'(x) + g^a(x)\lambda^a_{ij}\phi_j'(x) \ , \tag{6.472}$$

con

$$J = \left|\frac{\delta\phi}{\delta\phi'}\right| = \det(1+g^a\lambda_a) = 1 + g_a\text{tr}\lambda^a + O(g^2) = 1 + O(g^2) \ . \tag{6.473}$$

Avremo:

$$\begin{aligned}
Z[\mu] = \int \delta\phi' \exp\Big[- S_0 - \int \partial_\mu g^a(x) J^\mu_a(x)\ d^4x - \epsilon_i \int d^4x\ O_i(x) + \\
+ \epsilon_i \int g^a(x) R^a_{ik} O_k(x) + \int d^4x \mu_i \phi^i + \int d^4x\ g^a(x) \lambda^a_{ij} \phi_j(x) \mu_i \Big] = \\
\sim \int \delta\phi' \exp\left[-S_0 - \epsilon_i \int d^4x\ O_i(x) + \int d^4x \mu_i \phi^i \right] \times \\
\times \left[1 - \int \partial_\mu g^a(x) J^\mu_a(x) + \epsilon_i \int g^a(x) R^a_{ik} O_k(x) + \int g^a(x) \lambda^a_{ij} \phi_j \mu_i \right] = \\
= Z[\mu] + \int \delta\phi\ e^{-S_E + \int \mu_i \phi_i} \left(- \int \partial_\mu g^a J^\mu_a + \epsilon_i \int g^a R^a_{ik} O_k + \int g^a \mu_i \lambda^a_{ij} \phi_j \right) ,
\end{aligned} \tag{6.474}$$

dove R^a è il generatore della trasformazione nella rappresentazione di O. Quindi avremo che

$$\int \delta\phi\ e^{-S_E + \int \mu_i \phi_i} \left\{ \int g_a \left[\partial_\mu J^\mu_a(x) + \epsilon_i R^a_{ik} O_k(x) + \mu_i(x) \lambda^a_{ij} \phi_j(x) \right] d^4x \right\} = 0\ , \tag{6.475}$$

ossia

$$\int g_a(x) \left[\partial_\mu \langle J^\mu_a(x) \rangle_\mu + \epsilon_i R^a_{ik} \langle O_k(x) \rangle_\mu + + \mu_i(x) \lambda^a_{ij} \langle \phi_j(x) \rangle_\mu \right] = 0\ . \tag{6.476}$$

Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, essendo le $g_a(x)$ infinitesime ma arbitrarie, avremo

$$\partial_\mu \langle J^\mu_a(x) \rangle_\mu + \epsilon_i R^a_{ik} \langle O_k(x) \rangle_\mu + + \mu_i(x) \lambda^a_{ij} \langle \phi_j(x) \rangle_\mu = 0\ . \tag{6.477}$$

Prendendo la derivata funzionale $\frac{\delta}{\delta \mu_j(y)}$ e calcolando in $\mu = 0$ otteniamo l'identità di Ward modificata.

$$\boxed{\partial_\mu \langle J^\mu_a(x) \phi_j(y) \rangle + \epsilon_i R^a_{ik} \langle O_k(x) \phi_j(y) \rangle + \delta^4(x-y) \lambda^a_{jk} \langle \phi_k(x) \rangle = 0}\ . \tag{6.478}$$

Ovviamente $J^\mu_a(x)$ non è conservata a causa del termine di rottura esplicita.

Consideriamo il valor medio di un'osservabile O_i:

$$\langle O_i \rangle = \int \delta\phi\ e^{-S} O_i\ . \tag{6.479}$$

Supponiamo che la teoria abbia un gruppo di simmetria continuo ed effettuiamo un cambiamento di variabili $\phi = \phi' + g_a \lambda^a_{ik} \phi'_k$ infinitesimo. Ora: $\delta S = 0$, mentre $\delta O_i = g_a R^a_{ik} O_k$, e

$$\langle O_i \rangle = \int \delta\phi\ e^{-S} (O_i + g_a R^a_{ik} O_k) = \langle O_i \rangle + g_a R^a_{ik} \langle O_k \rangle\ . \tag{6.480}$$

Allora

$$R^a_{ik} \langle O_k \rangle = 0\ . \tag{6.481}$$

In questo modo il parametro d'ordine è sempre identicamente nullo e non potremmo mai capire se c'è rottura spontanea o meno. Quindi introduciamo un termine di rottura esplicito che dipende da un parametro piccolo ϵ, calcoliamo il parametro d'ordine e quindi mandiamo $\epsilon \to 0$. Se otteniamo un valore non nullo per il parametro d'ordine allora questo ci segnalerà la presenza di una simmetria spontaneamente rotta. Quindi sostituiamo $S \to S + \int \epsilon_k \phi_k$ calcoliamo

$$\langle O_i \rangle = \int \delta\phi \ \exp\left[-S - \int \epsilon_k \phi^k(x) \ d^4x\right] O_i \ . \tag{6.482}$$

Come sempre facciamo la trasformazione

$$\phi = \phi' + g_a \lambda^a_{ij} \phi'_j \ . \tag{6.483}$$

Avremo

$$\begin{aligned}
\langle O_i \rangle &= \int \delta\phi \ \exp\left[-S - \int \epsilon_i \phi^i + \epsilon_i g_a \lambda^a_{ij} \phi_j\right] (O_i + g_a R^a_{ij} O_j) \sim \\
&\sim \int \delta\phi \ \exp\left[-S - \int \epsilon_i \phi^i\right] \left(1 - \int \epsilon_i g_a \lambda^a_{ij} \phi_j\right) (O_i + g_a R^a_{ij} O_j) \sim \\
&\sim \int \delta\phi \ \exp\left[-S - \int \epsilon_i \phi^i\right] \left[O_i + g_a R^a_{ij} O_j - \epsilon_i g_a \lambda^a_{lm} \int \phi_m(x) O_i\right] = \\
&= \langle O_i \rangle + g_a R^a_{ij} \langle O_j \rangle - \epsilon_l g_a \lambda^a_{lm} \int \langle \phi_m(x) O_i \rangle \ d^4x \ , \\
&\to \ g_a R^a_{ij} \langle O_j \rangle = \epsilon_l g_a \lambda^a_{lm} \int \langle \phi_m(x) O_i \rangle \ d^4x \ ,
\end{aligned} \tag{6.484}$$

e quindi

$$\boxed{R^a_{ij} \langle O_j \rangle = \epsilon_l \lambda^a_{lm} \int \langle \phi_m(x) O_i \rangle \ d^4x} \ . \tag{6.485}$$

Valutiamo $\langle \phi_m(x) O_i \rangle$. Prendiamo $x^0 > 0$ e inseriamo un insieme completo di stati:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \phi_m(x) O_i(0) | 0 \rangle &= \sum_n \langle 0 | \phi_m(x) | \widetilde{n} \rangle \langle \widetilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | \phi_m(0) | \widetilde{n} \rangle \langle \widetilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle e^{-\imath p_n x} = \\
&= \int d^4q \ \sum_n \langle 0 | \phi_m(0) | \widetilde{n} \rangle \langle \widetilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle e^{-\imath p_n x} \delta^4(p_n - q) = \\
&= \int d^4q \ e^{-\imath qx} \ \widetilde{\rho}_{mi}(q) \ .
\end{aligned} \tag{6.486}$$

Per l'invarianza di Lorentz: $\widetilde{\rho}_{mi}(q) = \rho_{mi}(q^2) \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3}$. Quindi

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \phi_m(x) O_i(0) | 0 \rangle &= \int d^4q \ e^{-\imath qx} \ \rho_{mi}(q^2) \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3} = \int d^4q d\mu^2 \ e^{-\imath qx} \ \rho_{mi}(q^2) \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3} \delta(\mu^2 - q^2) = \\
&= \int \frac{d\mu^2}{(2\pi)^3} \rho_{mi}(\mu^2) \int d^4q \theta(q^0) \delta(\mu^2 - q^2) e^{-\imath qx} = \\
&= \int \frac{d\mu^2}{(2\pi)^3} \rho_{mi}(\mu^2) \int \frac{d^3q}{2\epsilon_q} e^{-\imath qx} = \int d\mu^2 \ \rho_{mi}(\mu^2) \Delta_+(x; \mu^2) \ ,
\end{aligned} \tag{6.487}$$

con

$$\Delta_+(x; \mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{2\epsilon_q} e^{-\imath qx} \ . \tag{6.488}$$

Prendendo il $\mathcal{T}$-prodotto otteniamo

$$\langle \phi_m(x) O_i(0) \rangle = \int d\mu^2 \ \rho_{mi}(\mu^2) \Delta_F(x;\mu^2) = \int d\mu^2 \ \rho_{mi}(\mu^2) \int d^4 q \frac{e^{-\imath q x}}{q^2+\mu^2} \ , \tag{6.489}$$

cosicché

$$\begin{aligned} \int d^4x \ \langle \phi_m(x) O_i(0) \rangle &= \int d^4x d\mu^2 d^4 q \rho_{mi}(\mu^2) \frac{e^{-\imath q x}}{q^2+\mu^2} = \int d\mu^2 d^4 q \ \delta^4(q) \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{q^2+\mu^2} = \\ &= \int_0^\infty d\mu^2 \ \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} \ , \end{aligned} \tag{6.490}$$

e quindi:

$$\boxed{\int d^4x \ \langle \phi_m(x) O_i(0) \rangle \ = \ \int_0^\infty d\mu^2 \ \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{\mu^2}} \ . \tag{6.491}$$

Se c'è rottura spontanea, invece, avremo i bosoni di Goldstone con massa:

$$m^2 = (2\pi)^3 \epsilon_i \langle \widetilde{\mathrm{BG}} | \phi_i(0) | \widetilde{\mathrm{BG}} \rangle \ . \tag{6.492}$$

Isoliamo questi stati nella funzione spettrale. Quindi avremo:

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}_{mi}^{\mathrm{BG}}(q) &= \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \langle 0 | \phi_m(0) | \widetilde{\mathrm{BG}}, p \rangle \langle \widetilde{\mathrm{BG}}, p | O_i(0) | 0 \rangle \ \delta^4(p-q) = \\ &= \frac{\sqrt{Z_{\phi_m} Z_{O_i}}}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \delta(q^2 - m^2) = \rho_m^{\mathrm{BG}} i(q^2) \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3} \ , \end{aligned} \tag{6.493}$$

e allora

$$\rho_m^{\mathrm{BG}} i(q^2) \ = \ \sqrt{Z_{\phi_m} Z_{O_i}} \ \delta(q^2 - m^2) \ . \tag{6.494}$$

Quindi

$$\int_0^\infty d\mu^2 \ \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} = \int_0^\infty d\mu^2 \ \frac{\rho_m^{\mathrm{BG}} i(\mu^2)}{\mu^2} + \int_0^\infty d\mu^2 \ \frac{\sigma_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} \ , \tag{6.495}$$

per cui

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\mu^2 \ \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} &= \int_0^\infty \sqrt{Z_\phi Z_O} \ \frac{\delta(\mu^2 - m^2)}{\mu^2} \ d\mu^2 + \int_M^\infty \frac{\sigma_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} \ d\mu^2 = \\ &= \frac{\sqrt{Z_\phi Z_O}}{m^2} + \int_M^\infty \frac{\sigma_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} \ d\mu^2 \longrightarrow_{\epsilon \to 0} \ \frac{\sqrt{Z_\phi Z_O}}{m^2} \ . \end{aligned} \tag{6.496}$$

Quindi quando $\epsilon \to 0$ avremo

$$R^a_{ij} \langle O_j \rangle \ = \ \frac{\epsilon_l \lambda^a_{lm} \sqrt{Z_{\phi_m} Z_{O_i}}}{(2\pi)^3 \epsilon_i \langle \widetilde{\mathrm{BG}} | \phi_i | \widetilde{\mathrm{BG}} \rangle} = \frac{\epsilon_l \lambda^a_{lm} \widetilde{Z}_{mi}}{\epsilon_i c^i} = \frac{\epsilon_l \bar{Z}^a_{li}}{\epsilon_k c^k} \ . \tag{6.497}$$

Ovviamente il limite $\epsilon \to 0$ va preso lungo la direzione fissata dal termine di rottura. Quindi il limite esiste ed è diverso da zero:

$$\boxed{R^a_{ij} \langle O_j \rangle \ \neq \ 0} \ . \tag{6.498}$$

Chapter 7

Meccanismo di Higgs

Consideriamo la lagrangiana (minkowskiana):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - m^2 \bar{\phi}\phi - g(\bar{\phi}\phi)^2 \ , \tag{7.1}$$

e l'hamiltoniano

$$H = \dot{\bar{\phi}}\dot{\phi} + \nabla\bar{\phi} \cdot \nabla\phi + m^2\bar{\phi}\phi + g(\bar{\phi}\phi)^2 \ , \tag{7.2}$$

con $g > 0$ (energia limitata inferiormente).

La teoria ha una simmetria

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{\imath\alpha} \phi \ , \\ \bar{\phi} &\rightarrow e^{-\imath\alpha} \bar{\phi} \ . \end{aligned} \tag{7.3}$$

Se $m^2 > 0$, H è definita positiva e il minimo si ha per $\phi = 0$. Se $m^2 < 0$ avremo $V(\bar{\phi}\phi) = -|m^2|\bar{\phi}\phi + g(\bar{\phi}\phi)^2$. I punti stazionari sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= -|m|^2\bar{\phi} + 2g\bar{\phi}\phi\bar{\phi} = (-|m|^2 + 2g\bar{\phi}\phi)\bar{\phi} = 0 \ , \\ \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} &= -|m|^2\phi + 2g\bar{\phi}\phi\phi = (-|m|^2 + 2g\bar{\phi}\phi)\phi = 0 \ , \end{aligned} \tag{7.4}$$

con

$$\begin{aligned} &\phi = \bar{\phi} = 0 \quad \text{instabile} \ , \\ &\bar{\phi}\phi = \frac{|m^2|}{2g} \quad \text{stabile} \ . \end{aligned} \tag{7.5}$$

Poniamo $\phi(x) = \rho(x)e^{\imath\theta(x)}$. Avremo

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &= e^{\imath\theta}(\partial_\mu \rho + \imath\rho\partial_\mu\theta) \ , \\ \partial_\mu \bar{\phi} &= e^{-\imath\theta}(\partial_\mu \rho - \imath\rho\partial_\mu\theta) \ , \end{aligned} \tag{7.6}$$

e quindi

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \rho^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + |m|^2\rho^2 - g\rho^4 \ . \tag{7.7}$$

Sotto la trasformazione di fase globale $\phi \rightarrow e^{\imath\alpha}\phi$ avremo:

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \theta + \alpha \ , \\ \rho &\rightarrow \rho \ . \end{aligned} \tag{7.8}$$

Aggiungiamo l'interazione con un campo elettromagnetico, cioè richiediamo una simmetria locale piuttosto che globale. Quindi:

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi \ \rightarrow \ D_\mu\phi \ &= \ (\partial_\mu - \imath e A_\mu)\phi = (\partial_\mu - \imath e A_\mu)\rho e^{\imath\theta} = \\ &= e^{\imath\theta}(\partial_\mu\rho + \imath\rho\partial_\mu\theta - \imath e\rho A_\mu) \ ,\end{aligned} \tag{7.9}$$

$$\partial_\mu\bar{\phi} \ \rightarrow \ \bar{D_\mu\phi} \ = \ (\partial_\mu + \imath e A_\mu)\bar{\phi} \ . \tag{7.10}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\partial_\mu\rho \ &\rightarrow \ \partial_\mu\rho \ , \\ \partial_\mu\theta \ &\rightarrow \ \partial_\mu\theta - eA_\mu \ ,\end{aligned} \tag{7.11}$$

e allora avremo

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \rho^2(\partial_\mu\theta - eA_\mu)(\partial^\mu\theta - eA^\mu) + |m|^2\rho^2 - g\rho^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ . \tag{7.12}$$

$\mathcal{L}$ è invariante sotto la trasformazione:

$$\begin{aligned}&A_\mu \ \rightarrow \ A_\mu + \partial_\mu\Lambda \ , \\ &\theta \ \rightarrow \ \theta + e\Lambda \ , \\ &\rho \ \rightarrow \ \rho \ .\end{aligned} \tag{7.13}$$

Chiamo $-eB_\mu = \partial_\mu\theta - eA_\mu$, e quindi:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu \ . \tag{7.14}$$

Ponendo

$$\rho(x) \ = \ \frac{|m|}{\sqrt{2g}} + \eta(x) \ , \tag{7.15}$$

per perturbare intorno al minimo, il termine $\rho^2 B_\mu B^\mu$ contiene un termine di massa per B_μ che viene dalla parte costante $\frac{|m|}{\sqrt{2g}}$ in $\rho(x)$.

Consideriamo l'integrale funzionale

$$\langle O\rangle = \int\prod_x \rho(x)\delta\rho(x)\delta\theta(x)\delta A_\mu(x) \ e^{\imath\int d^4x \ \mathcal{L}} \ O(\rho, \partial_\mu\theta - eA_\mu, F_{\mu\nu}) \ , \tag{7.16}$$

dove ρ e $F_{\mu\nu}$ sono gauge invarianti.

Il metodo di Faddeev-Popov si applica allo stesso modo. Fissiamo il funzionale di gauge-fixing $f(A) = 0$ e

$$\Delta_f(A)\int\delta\Lambda \ \delta[f(A^\Lambda)] \ = \ \Delta_f(A)\int\delta\Lambda \ \delta[f(A + \partial\Lambda)] = 1 \ . \tag{7.17}$$

Avremo

$$\langle O\rangle = \int\prod_x \rho(x)\delta\rho(x)\delta\theta(x)\delta A_\mu(x) \ e^{\imath\int d^4x \ \mathcal{L}} \ O(\rho, \partial_\mu\theta - eA_\mu, F_{\mu\nu})\Delta_f(A)\delta[f(A)] \ . \tag{7.18}$$

Ovviamente $\langle O\rangle$ è gauge-invariante e non dipende dal gauge-fixing. Ora poiché $B_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta$, allora $A_\mu = B_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta$.

Quindi:

$$\begin{aligned}
&O = O(\rho, B_\mu, \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu) = O(\rho, B, \partial B)\ , \\
&\delta A = \delta B \quad \text{misura invariante}\ , \\
&\mathcal{L} = \mathcal{L}(\rho, B, \partial B)\ , \\
&\Delta(A) = \Delta\left(B + \frac{1}{e}\partial\theta\right) = \Delta(B) \quad \text{det di F.P. gauge inv.}\ , \\
&\delta[f(A)] = \delta\left[f\left(B_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right)\right]\ ,
\end{aligned} \tag{7.19}$$

per cui avremo:

$$\langle O\rangle = \int \prod_x \rho\delta\rho\delta\theta\delta B\ e^{\imath\int\mathcal{L}(\rho,B,\partial B)d^4x}\ O(\rho, B, \partial B)\Delta(B)\ \delta\left[f\left(B + \frac{1}{e}\partial\theta\right)\right]\ . \tag{7.20}$$

Ma

$$\Delta(B)\int \delta\theta\ \delta\left[f\left(B + \frac{1}{e}\partial\theta\right)\right] = \Delta(B)\int \delta\theta\ \delta[f(B^\theta)] = \ , \tag{7.21}$$

per definizione. Di conseguenza avremo

$$\boxed{\langle O\rangle \ = \ \int \prod_x \rho\delta\rho\delta B\ e^{\imath S(B,\rho)}\ O(\rho, B)}\ , \tag{7.22}$$

cioè il termine di gauge-fixing scompare del tutto.