

TEORIA DEI CAMPI

Flaviano Morone

Ultimo aggiornamento: Luglio 2022



Indice

| | |
|--|-----------|
| Prefazione | 5 |
| 1 Trasformazioni di Lorentz | 7 |
| 2 Funzione a 2-punti e normalizzazione covariante degli stati | 11 |
| 2.1 Funzione di Green a 2-punti e decomposizione spettrale | 11 |
| 2.2 Trasformazione di Fourier di una distribuzione e prodotti di operatori . . | 17 |
| 3 Matrice S e formule di riduzione | 19 |
| 3.1 Stati IN e stati OUT | 19 |
| 3.2 Formula di riduzione | 24 |
| 3.2.1 Invarianza di Lorentz delle funzioni di Wightman | 27 |
| 3.2.2 Invarianza di Lorentz delle funzioni di Green | 28 |
| 4 Funzionale generatore | 31 |
| 4.1 Derivata funzionale | 31 |
| 4.2 Rotazione di Wick | 33 |
| 4.3 Funzionale generatore euclideo | 35 |
| 4.4 Funzionale generatore del campo libero | 36 |
| 5 Interazioni e teoria delle perturbazioni | 41 |
| 5.1 Funzionale generatore all'ordine $O(\lambda)$ | 42 |
| 5.1.1 Funzioni di Green al primo ordine | 43 |
| 5.1.2 Funzionale generatore delle funzioni di Green connesse | 45 |
| 5.2 Diagrammi irriducibili a 1 particella (1PI) | 46 |
| 5.3 Grado di divergenza superficiale | 47 |
| 6 Rinormalizzazione | 49 |
| 6.1 Teoria ϕ^4 rinormalizzata | 50 |
| 6.1.1 Rinormalizzazione a 1 loop | 51 |
| 6.1.2 Rinormalizzazione a 2 loop | 52 |
| 6.2 Gruppo di Rinormalizzazione | 54 |
| 6.2.1 Equazioni del gruppo di rinormalizzazione | 56 |
| 6.2.2 Soluzione dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione | 57 |
| 6.2.3 Libertà asintotica nell'infrarosso | 63 |
| 7 Funzionale generatore fermionico | 65 |
| 7.1 Integrali gaussiani grassmaniani | 65 |
| 7.2 Lagrangiana di pioni e nucleoni interagenti | 66 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 8 | Teorie di gauge | 73 |
| 8.1 | Integrazione sul gruppo | 73 |
| 8.2 | Teoria di gauge non abeliana | 75 |
| 8.3 | Gauge fixing | 82 |
| 8.4 | Ghosts | 86 |
| 8.4.1 | Caso abeliano | 86 |
| 8.4.2 | Caso non-abeliano | 87 |
| 8.5 | Propagatore fotonico | 89 |
| 9 | Simmetrie | 95 |
| 9.1 | Conservazione della carica | 95 |
| 9.2 | Identità di Ward | 99 |
| 9.2.1 | Primo metodo | 99 |
| 9.2.2 | Secondo metodo | 100 |
| 9.3 | Terzo metodo | 102 |
| 9.4 | Parametro d'ordine | 104 |
| 10 | Rottura di simmetria | 107 |
| 10.1 | Promemoria sul prodotto scalare nello spazio di Hilbert | 107 |
| 10.2 | CPT intermezzo | 108 |
| 10.3 | Bosoni di Goldstone | 109 |
| 10.4 | Rottura esplicita | 111 |
| 10.5 | Rottura spontanea | 114 |
| 10.6 | Meccanismo di Higgs | 116 |

Prefazione

Nel presente fascicolo ho raccolto le note del corso di *Teoria dei Campi* (Corso di Laurea Specialistica in Fisica Teorica) tenuto dal Professor Massimo Testa presso il dipartimento di Fisica dell'Università degli Studi di Roma La Sapienza nell'anno accademico 2009/10. Il materiale contenuto in queste note è una trascrizione liberamente adattata e illustrata degli appunti da me raccolti durante il corso. Consiglio di prestare attenzione alla data di aggiornamento del fascicolo, in quanto alcune parti possono venire integrate e eventuali imprecisioni corrette nel corso del tempo¹.

Flaviano Morone
Center for Quantum Phenomena
New York University, 8 luglio 2022
(I stesura: luglio 2021)

¹Per domande tecniche, segnalazione di errori, e commenti sul libro inviate una email a: fm2452@nyu.edu

Capitolo 1

Trasformazioni di Lorentz

Consideriamo una trasformazione di Lorentz omogenea

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} , \quad (1.1)$$

che va letta usando le due regole seguenti:

1. quando un indice è ripetuto due volte all'interno di un'espressione occorre sommare rispetto ad esso (convenzione di Einstein sugli indici ripetuti), cioè

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \equiv \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} ; \quad (1.2)$$

2. gli indici bassi (covarianti) e quelli alti (contravarianti) si manipolano usando il tensore metrico dello spazio di Minkowski $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (1.3)$$

che serve per abbassare un indice alto

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} , \quad (1.4)$$

o alzare un indice basso

$$x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu} . \quad (1.5)$$

Per definizione, una trasformazione di Lorentz lascia invariato l'intervallo $x'^{\mu} x'_{\mu}$. Quindi, dall'invarianza dell'intervallo deduciamo che

$$x'^{\mu} x'_{\mu} = g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} = g_{\rho\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} , \quad (1.6)$$

da cui ricaviamo che

$$\boxed{g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}} , \quad (1.7)$$

Moltiplicando per $g^{\sigma\tau} \Lambda^{\alpha}_{\tau}$ ambo i membri dell'Eq. (1.7) otteniamo

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} g^{\sigma\tau} \Lambda^{\alpha}_{\tau} = g_{\rho\sigma} g^{\sigma\tau} \Lambda^{\alpha}_{\tau} = \Lambda^{\alpha}_{\rho} , \quad (1.8)$$

dove abbiamo usato il fatto che $g_{\rho\sigma}g^{\sigma\tau} = \delta^\tau_\rho$. Moltiplicando per $[(g\Lambda)^{-1}]^{\rho\gamma}$ ambo i membri dell'Eq. (1.8) otteniamo

$$(g\Lambda)_{\nu\rho}[(g\Lambda)^{-1}]^{\rho\gamma}\Lambda^\nu_\sigma g^{\sigma\tau}\Lambda^\alpha_\tau = \Lambda^\alpha_\rho[(g\Lambda)^{-1}]^{\rho\gamma}, \quad (1.9)$$

da cui, svolgendo i passaggi seguenti,

$$\begin{aligned} \Lambda^\gamma_\sigma g^{\sigma\tau}\Lambda^\alpha_\tau &= \Lambda^\alpha_\rho[\Lambda^{-1}g^{-1}]^{\rho\gamma} \\ \Lambda^\gamma_\sigma g^{\sigma\tau}\Lambda^\alpha_\tau &= \Lambda^\alpha_\rho(\Lambda^{-1})^\rho_\mu g^{\mu\gamma} = g^{\alpha\gamma} \\ \Lambda^\gamma_\sigma g^{\sigma\tau}(\Lambda^T)_\tau^\alpha &= g^{\alpha\gamma}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

ricaviamo che

$$\boxed{\Lambda g \Lambda^T = g}, \quad (1.11)$$

dove Λ^T indica la matrice trasposta della matrice Λ . L'equazione (1.11) è una conseguenza diretta dell'invarianza dell'intervallo. Alternativamente, l'Eq (1.11) puo' essere considerata come la definizione stessa di trasformazione di Lorentz, cioè una trasformazione lineare dello spazio di Minkowski che preserva l'intervallo. In quanto tale, una trasformazione di Lorentz puo' essere espressa tramite una matrice ortogonale. Per dimostrare ciò moltiplichiamo ambo i membri dell'Eq. (1.10) per $(\Lambda^{-1})^\mu_\gamma$

$$\begin{aligned} g^{\sigma\tau}\Lambda^\alpha_\tau\Lambda^\gamma_\sigma(\Lambda^{-1})^\mu_\gamma &= g^{\alpha\gamma}(\Lambda^{-1})^\mu_\gamma \\ \rightarrow g^{\mu\tau}\Lambda^\alpha_\tau &= g^{\alpha\gamma}(\Lambda^{-1})^\mu_\gamma. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Moltiplicando ambo i membri della precedente equazione per $g_{\nu\mu}$ otteniamo

$$\begin{aligned} g_{\nu\mu}g^{\mu\tau}\Lambda^\alpha_\tau &= g_{\nu\mu}g^{\alpha\gamma}(\Lambda^{-1})^\mu_\gamma \\ \rightarrow \Lambda^\alpha_\nu &= (\Lambda^{-1})^\alpha_\nu, \end{aligned} \quad (1.13)$$

da cui concludiamo che

$$\boxed{\Lambda^T = \Lambda^{-1}}. \quad (1.14)$$

In meccanica quantistica, ogni trasformazione di simmetria sugli stati fisici è rappresentata da un operatore lineare e unitario o antilineare e antiunitario. Poiché le trasformazioni di Lorentz sono un gruppo di simmetria continuo connesso all'identità con continuità (possiamo sempre rendere triviale una trasformazione di Lorentz variando con continuità i parametri della trasformazione), le **trasformazioni di Lorentz saranno rappresentate da operatori lineari unitari**. Le trasformazioni indotte sugli stati fisici dello spazio di Hilbert

$$\psi \rightarrow U(\Lambda, a)\psi, \quad (1.15)$$

soddisfano la regola di composizione

$$U(\Lambda_2, a_2)U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \quad (1.16)$$

Le trasformazioni con $a = 0$ formano un sottogruppo: il **gruppo di Lorentz omogeneo**:

$$U(\Lambda_2, 0)U(\Lambda_1, 0) = U(\Lambda_2\Lambda_1, 0). \quad (1.17)$$

Utilizzando il fatto che $\Lambda\Lambda^T = \Lambda\Lambda^{-1} = I$ e prendendo il determinante di ambo i membri otteniamo

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \rightarrow \det \Lambda = \pm 1. \quad (1.18)$$

Le trasformazioni con $\det \Lambda = 1$ formano un sottogruppo del gruppo omogeneo e anche del gruppo inomogeneo. Consideriamo ancora l'equazione

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} , \quad (1.19)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \Lambda g \Lambda^T &= g \\ \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\rho} (\Lambda^T)^\alpha{}_\rho &= g^{\mu\alpha} \\ \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\rho} \Lambda^\alpha{}_\rho &= g^{\mu\alpha} . \end{aligned} \quad (1.20)$$

Prendendo la componente 00 otteniamo

$$\begin{aligned} 1 &= g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0 \\ 1 &= g_{\nu\rho}\Lambda^0{}_\nu\Lambda^0{}_\rho = (\Lambda^0{}_0)^2 - \Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i \\ &\rightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0 = 1 + \Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i , \end{aligned} \quad (1.21)$$

e quindi

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 , \quad (1.22)$$

oppure

$$\Lambda^0{}_0 \leq 1 . \quad (1.23)$$

Le trasformazioni con $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ formano un sottogruppo. Per dimostrare quest'affermazione prendiamo due trasformazioni di Lorentz Λ e $\bar{\Lambda}$ e consideriamo l'elemento di matrice $(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0$:

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 = \bar{\Lambda}^0{}_\mu\Lambda^\mu{}_0 = \bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_1\Lambda^1{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_2\Lambda^2{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_3\Lambda^3{}_0 . \quad (1.24)$$

Sappiamo che il trivettore $(\Lambda^1{}_0, \Lambda^2{}_0, \Lambda^3{}_0)$ ha lunghezza $\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}$ (questo fatto si dimostra facilmente a partire dall'Eq. (1.11)); analogamente il trivettore $(\bar{\Lambda}^0{}_1, \bar{\Lambda}^0{}_2, \bar{\Lambda}^0{}_3)$ ha lunghezza $\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1}$. Di conseguenza il prodotto scalare dei due trivettori è limitato da

$$|\bar{\Lambda}^0{}_1\Lambda^1{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_2\Lambda^2{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_3\Lambda^3{}_0| \leq \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1} . \quad (1.25)$$

Ma allora possiamo minorare la quantità $(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0$ come

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 \geq \bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1} \geq 1 , \quad (1.26)$$

C.V.D.

Il sottogruppo di trasformazioni di Lorentz con $\det \Lambda = \pm 1$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ è il **gruppo di Lorentz proprio ortocrono**. Il gruppo di Lorentz proprio ortocrono è una **simmetria esatta** della natura e, come abbiamo detto, è rappresentato da operatori $U(\Lambda, a)$ lineari e unitari nello spazio di Hilbert degli stati fisici. Le rappresentazioni non triviali sono necessariamente infinito-dimensionali, perché il gruppo di Lorentz completo (o inomogeneo o di Poincaré) è un gruppo continuo non compatto, giacché i parametri che determinano gli elementi del gruppo variano su un insieme illimitato.

Capitolo 2

Funzione a 2-punti e normalizzazione covariante degli stati

2.1 Funzione di Green a 2-punti e decomposizione spettrale

Scriviamo la **relazione di completezza** nello spazio di Fock:

$$1 = \sum_n |n\rangle\langle n| , \quad (2.1)$$

dove

$$|n\rangle\langle n| = c_0|0\rangle\langle 0| + c_1 \int d^3p |p\rangle\langle p| + c_2 \int d^3p_1 d^3p_2 |p_1, p_2\rangle\langle p_1, p_2| + \dots \quad (2.2)$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'Eq. (2.1) per $\langle 0|$ otteniamo

$$\langle 0| \sum_n |n\rangle\langle n| = c_0\langle 0| = \langle 0| \rightarrow c_0 = 1 . \quad (2.3)$$

Moltiplicando scalarmente per $\langle p'|$ troviamo

$$\langle p'| \sum_n |n\rangle\langle n| = c_1 \int d^3p \langle p'|p\rangle\langle p| = c_1\langle p'| \rightarrow c_1 = 1 . \quad (2.4)$$

E ancora, moltiplicando scalarmente per $\langle p'_1, p'_2|$ otteniamo

$$\langle p'_1, p'_2| \sum_n |n\rangle\langle n| = c_2 \int d^3p_1 d^3p_2 \langle p'_1, p'_2|p_1, p_2\rangle\langle p_1, p_2| . \quad (2.5)$$

Ora, il prodotto scalare $\langle p'_1, p'_2|p_1, p_2\rangle$ vale

$$\begin{aligned} \langle p'_1, p'_2|p_1, p_2\rangle &= (\langle p'_1| \otimes \langle p'_2|)(|p_1\rangle \otimes |p_2\rangle) = \langle p'_1|p_1\rangle\langle p'_2|p_2\rangle + \langle p'_1|p_2\rangle\langle p'_2|p_1\rangle = \\ &= \delta(p_1 - p'_1)\delta(p_2 - p'_2) + \delta(p'_1 - p_2)\delta(p'_2 - p_1) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Inserendo il risultato dell'Eq. (2.6) nell'integrale al lato destro dell'Eq. (2.5) troviamo

$$\begin{aligned} c_2 \int d^3p_1 d^3p_2 \delta(p_1 - p'_1)\delta(p_2 - p'_2)\langle p_1, p_2| + c_2 \int d^3p_1 d^3p_2 \delta(p'_1 - p_2)\delta(p'_2 - p_1)\langle p_1, p_2| = \\ = c_2\langle p'_1, p'_2| + c_2\langle p'_2, p'_1| , \end{aligned} \quad (2.7)$$

da cui ricaviamo il valore di c_2 :

$$c_2 = \frac{1}{2} . \quad (2.8)$$

Generalizzando il procedimento a valori arbitrari di n è possibile dimostrare che $c_n = 1/n!$, per cui resta dimostrata la seguente identità:

$$\begin{aligned} \sum_n |n\rangle\langle n| &= |0\rangle\langle 0| + \int d^3p |p\rangle\langle p| + \frac{1}{2!} \int d^3p_1 d^3p_2 |p_1, p_2\rangle\langle p_1, p_2| + \dots \\ &+ \frac{1}{N!} \int d^3p_1 \dots d^3p_N |p_1, \dots, p_N\rangle\langle p_1, \dots, p_N| + \dots . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Consideriamo ora un operatore locale hermitiano $O(x)$ e calcoliamo il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto $O(x)O(y)$, i.e. la **funzione a 2-punti di Wightmann** $\langle 0|O(x)O(y)|0\rangle$. Inserendo la relazione di completezza data dall'Eq. (2.1) nella funzione di Wightman possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle 0|O(x)O(y)|0\rangle &= \sum_n \langle 0|O(x)|n\rangle\langle n|O(y)|0\rangle = \sum_n \langle 0|O(0)|n\rangle\langle n|O(0)|0\rangle e^{-i(x-y)P_n} = \\ &= \sum_n |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 e^{-i(x-y)P_n} = \\ &= \int d^4q \sum_n |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 e^{-i(x-y)P_n} \delta^4(q - P_n) = \\ &= \int d^4q e^{-iq(x-y)} \sum_n |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int d^4q e^{-iq(x-y)} \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int d^4q e^{-iq(x-y)} \tilde{\rho}(q) , \end{aligned} \quad (2.10)$$

da cui ricaviamo la seguente identità

$$\boxed{\langle 0|O(x)O(y)|0\rangle = |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int d^4q e^{-iq(x-y)} \tilde{\rho}(q)} , \quad (2.11)$$

dove la funzione $\tilde{\rho}(q)$ è data da

$$\tilde{\rho}(q) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) . \quad (2.12)$$

Il supporto di $\tilde{\rho}(q)$ è contenuto all'interno degli stati fisici, per i quali deve valere la condizione $p^2 \geq 0$. Se ci limitiamo ad una teoria senza particelle a massa nulla allora deve valere la condizione più stringente $p^2 > 0$. Inoltre la componente temporale del quadrimpulso è positiva per gli stati fisici, i.e. $p^0 > 0$. La funzione spettrale $\tilde{\rho}(q)$ è chiaramente reale e positiva (tutt'al più non negativa). Riassumendo, le proprietà di $\tilde{\rho}(q)$ sono

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(q) &\geq 0 , \\ \tilde{\rho}(q) &= 0 , \quad q^2 = 0 \quad \text{e} \quad q^2 < 0 , \\ \tilde{\rho}(q) &= 0 , \quad q_0 < 0 , \end{aligned} \quad (2.13)$$

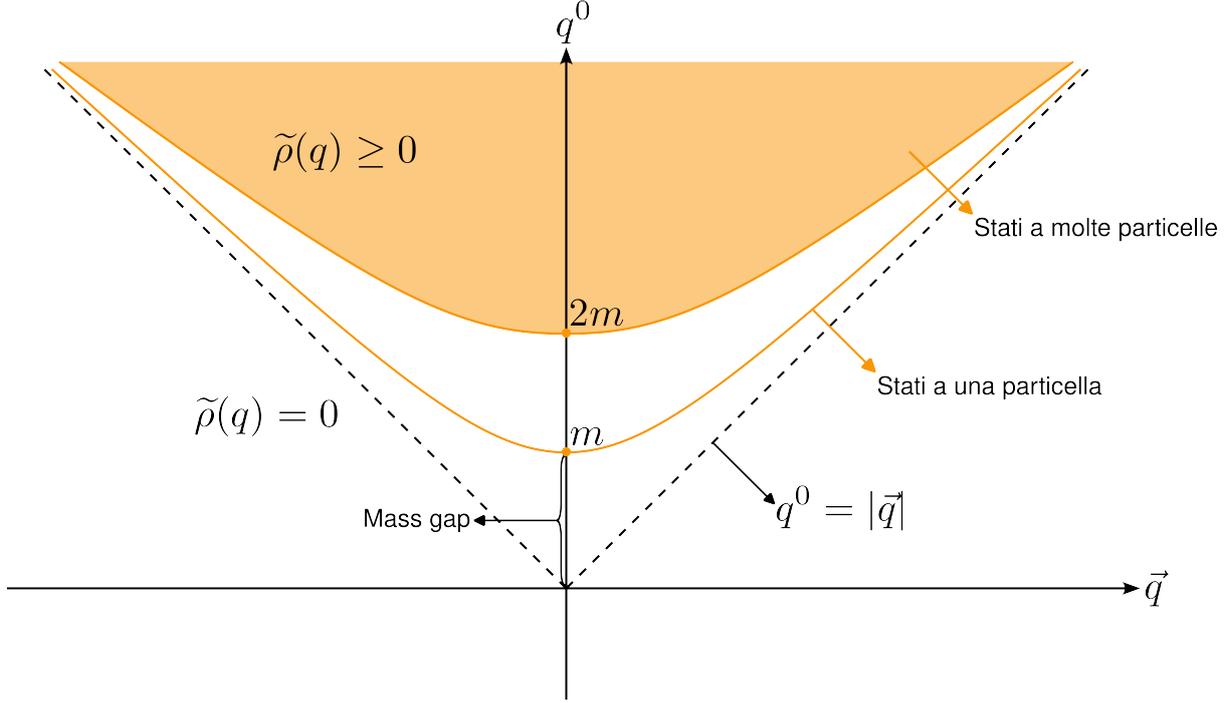


Figura 2.1: **Supporto della funzione spettrale** $\tilde{\rho}(q)$. In generale, la funzione $\tilde{\rho}(q)$ è reale e positiva nella regione $q^2 \geq 0$ e $q^0 \geq 0$, mentre si annulla all'esterno di quest'ultima. Nel caso di una teoria senza particelle a massa nulla, la funzione spettrale presenta un gap come quello mostrato nella figura. In altre parole, lo spettro di massa della teoria comincia da un certo valore finito m corrispondente alla massa della particella più leggera.

come illustrato in Figura 2.1.

Dimostriamo che $\tilde{\rho}(q)$ è funzione solo di q^2 . A tale scopo calcoliamo $\tilde{\rho}(\Lambda q)$

$$\tilde{\rho}(\Lambda q) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|n\rangle|^2 \delta^4(\Lambda q - P_n) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|\Lambda n\rangle|^2 \delta^4(\Lambda q - \Lambda P_n) , \quad (2.14)$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che la relazione di completezza è uguale per gli stati trasformati di Lorentz, i.e.

$$1 = \sum_n |n\rangle\langle n| = \sum_n |\Lambda n\rangle\langle \Lambda n| . \quad (2.15)$$

Procedendo troviamo:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\Lambda q) &= \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|\Lambda n\rangle|^2 \delta^4(\Lambda q - \Lambda P_n) = \\ &= \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|\Lambda n\rangle|^2 \frac{1}{|\det \Lambda|} \delta^4(q - P_n) = \\ &= \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)U(\Lambda)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) = \\ &= \sum_{n \neq 0} |\langle 0|U^\dagger(\Lambda)O(0)U(\Lambda)|n\rangle|^2 \delta^4(q - P_n) , \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove abbiamo usato il fatto che $|\det \Lambda| = 1$ e che il vuoto è invariante di Lorentz, cioè $U(\Lambda)|0\rangle = |0\rangle$. Poiché

$$U^\dagger(\Lambda)O(\Lambda x)U(\Lambda) = O(x) \rightarrow U^\dagger(\Lambda)O(0)U(\Lambda) = O(0) , \quad (2.17)$$

ricaviamo che

$$\boxed{\tilde{\rho}(\Lambda q) = \sum_{n \neq 0} |\langle 0|O(0)|n \rangle|^2 \delta^4(q - P_n) = \tilde{\rho}(q)} , \quad (2.18)$$

il che vuol dire che $\tilde{\rho}(q)$ è una funzione solo di q^2 . Possiamo dunque scrivere $\tilde{\rho}(q)$ come

$$\tilde{\rho}(q) = \rho(q^2)\theta(q^0) . \quad (2.19)$$

Se $q^2 > 0$ allora $\theta(q^0)$ è Lorentz invariante. Se $q^2 < 0$, invece, $\theta(q^0)$ non è Lorentz invariante. Però sappiamo che $\tilde{\rho}(q) = 0$ nella regione non fisica $q^2 < 0$. Di conseguenza, giungiamo al risultato importante che $\tilde{\rho}(q)$ è **invariante di Lorentz**. Per comodità ridefiniamo la $\tilde{\rho}(q)$ riscalandola per un fattore $(2\pi)^3$, i.e.

$$\tilde{\rho}(q) = \frac{\rho(q^2)}{(2\pi)^3} \theta(q^0) . \quad (2.20)$$

Usando l'Eq (2.20) possiamo scrivere la funzione a due punti in Eq. (2.11) come segue

$$\begin{aligned} \langle 0|O(x)O(y)|0 \rangle &= |\langle 0|O(0)|0 \rangle|^2 + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-iq(x-y)} \theta(q^0) \rho(q^2) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0 \rangle|^2 + \int_0^\infty d\mu^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-iq(x-y)} \theta(q^0) \rho(q^2) \delta(q^2 - \mu^2) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0 \rangle|^2 + \int_0^\infty d\mu^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-iq(x-y)} \theta(q^0) \rho(\mu^2) \delta(q^2 - \mu^2) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0 \rangle|^2 + \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) i\Delta^+(x-y; \mu^2) , \end{aligned} \quad (2.21)$$

dove

$$\boxed{i\Delta^+(x-y; \mu^2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-iq(x-y)} \theta(q^0) \delta(q^2 - \mu^2)} \quad (2.22)$$

è il **propagatore di una singola particella libera di massa μ** . Una cosa importante da notare è che per $x = y$, a causa della positività della funzione $\rho(q^2)$, la funzione a due punti in Eq. (2.21) è divergente.

Consideriamo ora il valore di aspettazione sul vuoto del commutatore

$$\langle 0|[O(x), O(y)]|0 \rangle = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) [i\Delta^+(x-y; \mu^2) - i\Delta^+(y-x; \mu^2)] , \quad (2.23)$$

dove $[i\Delta^+(x-y; \mu^2) - i\Delta^+(y-x; \mu^2)]$ è proprio il commutatore dei campi liberi di particelle di massa μ che si annulla per $x = y$ di tipo spazio (cioè quando $(x-y)^\mu(x-y)_\mu < 0$). Consideriamo poi il valore di aspettazione sul vuoto dell'anticommutatore

$$\langle 0|\{O(x), O(y)\}|0 \rangle = \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) [i\Delta^+(x-y; \mu^2) + i\Delta^+(y-x; \mu^2)] . \quad (2.24)$$

Poiché $i\Delta^+(x-y; \mu^2)$ è pari in $x-y$, quando $x-y$ è di tipo spazio la quantità $[i\Delta^+(x-y; \mu^2) + i\Delta^+(y-x; \mu^2)] \neq 0$. Ora, se $O(x)$ e $O(y)$ fossero campi quantizzati per anticommutatori troveremmo che

$$\{O(x), O(y)\}_{x^0=y^0} = 0 , \quad (2.25)$$

da cui seguirebbe che

$$\langle 0|\{O(x), O(y)\}|0\rangle_{x^0=y^0} = 0 . \quad (2.26)$$

Ma questo è assurdo, poiché abbiamo appena dimostrato, nella discussione che segue l'Eq. (2.24), che $\langle 0|\{O(x), O(y)\}|0\rangle_{x \sim y} \neq 0$. Di conseguenza, possiamo concludere che $O(x)$ è **un campo bosonico**. Quest'ultimo risultato è un caso particolare del **teorema spin-statistica**.

Supponiamo che esista uno stato ad una particella di massa m , che indichiamo con $|\tilde{p}\rangle$, tale che $\langle 0|O(0)|\tilde{p}\rangle \neq 0$. In linea di principio $\langle 0|O(0)|\tilde{p}\rangle$ è una funzione di p , cioè $\langle 0|O(0)|\tilde{p}\rangle = F(p)$. Usando il fatto che $U^\dagger(\Lambda)O(0)U(\Lambda) = O(0)$ troviamo, però, che

$$\langle 0|U^\dagger(\Lambda)O(0)U(\Lambda)|\tilde{p}\rangle = \langle 0|O(0)U(\Lambda)|\tilde{p}\rangle = \langle 0|O(0)|\Lambda\tilde{p}\rangle = \langle 0|O(0)|\tilde{p}\rangle = F(p) . \quad (2.27)$$

Facendo tutte le trasformazioni di Lorentz possibili otterremo tutti gli stati possibili della particella di massa m ; quindi giungiamo alla conclusione per cui

$$F(p) = \langle 0|O(0)|\tilde{p}\rangle = \langle 0|O(0)|\Lambda\tilde{p}\rangle = \text{cost} . \quad (2.28)$$

In altre parole, $F(p) = F(\Lambda p)$ è una funzione di p^μ invariante di Lorentz; di conseguenza, può essere funzione solo di $p^2 = m^2$, cioè è una costante. L'invarianza di Lorentz implica, dunque, la seguente normalizzazione

$$\langle 0|O(0)|\tilde{p}\rangle = \frac{\sqrt{Z_0}}{(2\pi)^{3/2}} . \quad (2.29)$$

(Se avessimo normalizzato a una δ avremmo trovato $\frac{\sqrt{Z_0}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_p}}$, dove $\omega_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$).

Il contributo dello stato a una particella sarà quindi dato da

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1(q) &= \int \frac{d^3p}{2\omega_p} |\langle 0|O(0)|\tilde{p}\rangle|^2 \delta^4(q-p) = \frac{Z_0}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \delta^4(q-p) = \\ &= \frac{Z_0}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \delta(p-q) = \frac{Z_0}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \delta(q^2 - m^2) , \end{aligned} \quad (2.30)$$

da cui deduciamo che la forma della funzione $\rho_1(q^2)$ è

$$\boxed{\rho_1(q^2) = Z_0 \delta(q^2 - m^2)} . \quad (2.31)$$

Isolando il contributo degli stati a una particella nella funzione a 2-punti possiamo riscrivere l'Eq.(2.21) come

$$\begin{aligned} \langle 0|O(x)O(y)|0\rangle &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + \int_0^\infty d\mu^2 \rho(\mu^2) \imath \Delta^+(x-y; \mu^2) = \\ &= |\langle 0|O(0)|0\rangle|^2 + Z_0 \imath \Delta^+(x-y; m^2) + \int_{4m^2}^\infty d\mu^2 \sigma(\mu^2) \imath \Delta^+(x-y; \mu^2) , \end{aligned} \quad (2.32)$$

dove $\sigma(\mu^2)$ è definita dalla relazione

$$\rho(\mu^2) = Z_0 \delta(\mu^2 - m^2) + \sigma(\mu^2) . \quad (2.33)$$

Definiamo ora il prodotto T-ordinato dei campi $O(x)$ e $O(y)$ come

$$\mathcal{T}[O(x)O(y)] = \theta(x^0 - y^0) O(x)O(y) + \theta(y^0 - x^0) O(y)O(x) . \quad (2.34)$$

Prendendo il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto T-ordinato in Eq. (2.34) otteniamo la **funzione di Green a 2-punti**:

$$\langle 0|\mathcal{T}[O(x)O(y)]|0\rangle = Z_0 i\Delta_F(x-y; m^2) + \int_{4m^2}^{\infty} d\mu^2 \sigma(\mu^2) i\Delta_F(x-y; \mu^2) , \quad (2.35)$$

dove $i\Delta_F(x-y; m^2)$ è il **propagatore di Feynman**, la cui definizione è la seguente:

$$i\Delta_F(x-y; m^2) \equiv \theta(x^0 - y^0) i\Delta^+(x-y; m^2) + \theta(y^0 - x^0) i\Delta^+(y-x; m^2) , \quad (2.36)$$

che può essere scritto sotto forma di integrale di Fourier come

$$i\Delta_F(x-y; m^2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} d^4q . \quad (2.37)$$

L'integrando nell'Eq. (2.37) ha due poli: uno in $q_-^0 = -\omega_q + i\epsilon$, e un altro in $q_+^0 = \omega_q - i\epsilon$, dove $\omega_q = \sqrt{|\vec{q}|^2 + m^2}$, come mostrato in Figura 2.2. Quando $\epsilon \rightarrow 0$ il polo q_-^0 tende verso il bordo superiore dell'asse reale e l'integrale lungo l'asse $\text{Re}(q^0)$ nell'Eq. (2.37) deve essere preso aggirando il polo dal basso; il polo q_+^0 , invece, tende verso il bordo inferiore dell'asse reale e l'integrale deve essere preso aggirando il polo dal basso, come illustrato in Figura 2.2.

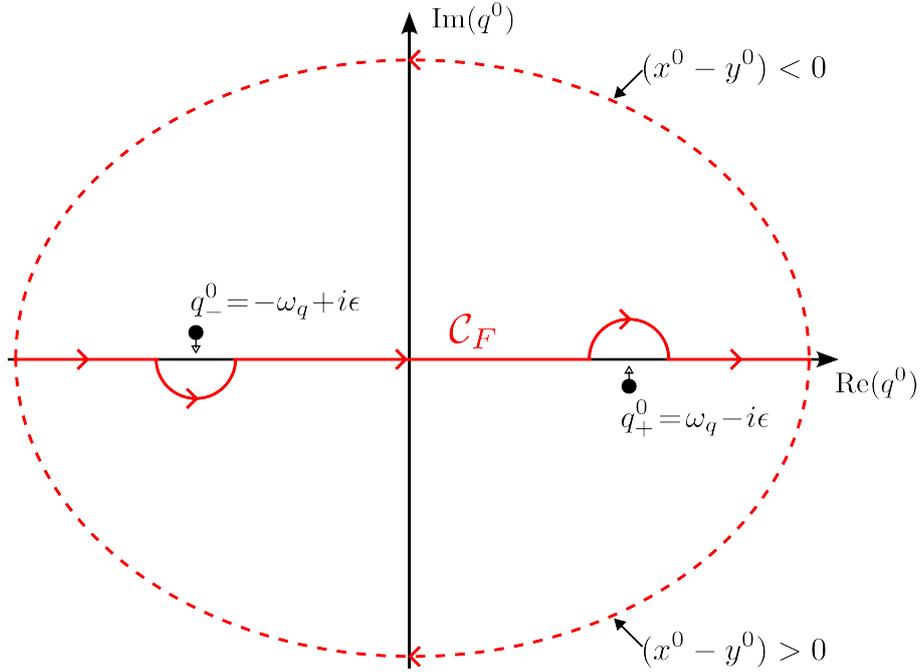


Figura 2.2: **Cammino d'integrazione per il calcolo del propagatore di Feynman.** Il cammino C_F nel piano complesso della variabile q^0 aggira il polo in $-\omega_q$ dal basso e il polo in ω_q dall'alto; il cammino poi prosegue su una semicirconferenza nel semipiano inferiore se $x^0 - y^0 > 0$, oppure nel semipiano superiore se $x^0 - y^0 < 0$, cioè laddove il fattore $e^{(x^0 - y^0)\text{Im}(q^0)}$ converge.

La trasformata di Fourier della funzione di Green a 2-punti è data da

$$\langle 0|\mathcal{T}[O(x)O(y)]|0\rangle_{FT} = \frac{iZ_0}{q^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} d\mu^2 \sigma(\mu^2) \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} , \quad (2.38)$$

In particolare, la funzione

$$\frac{iZ_0}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.39)$$

dà lo spettro di massa della teoria.

2.2 Trasformazione di Fourier di una distribuzione e prodotti di operatori

Nella trattazione della funzione a due punti nella sezione precedente, e precisamente nella discussione dell'Eq. (2.21), abbiamo osservato che il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto di operatori di campo, in generale, non è ben definito. Infatti, è sicuramente singolare allorquando due campi sono valutati nello stesso punto dello spazio-tempo. Per costruire operatori di campo ben definiti che possono essere moltiplicati gli uni con gli altri dobbiamo considerare i campi come **distribuzioni a valori operatoriali** che devono essere integrate con funzioni di prova al quadrato integrabili per ottenere operatori ben definiti. Ad esempio l'operatore

$$a_f^\dagger \equiv \int d^3p f(\vec{p}) a_p^\dagger \quad (2.40)$$

è ben definito e, applicato allo stato vuoto, crea il pacchetto d'onda

$$a_f^\dagger |0\rangle = \int d^3p f(\vec{p}) |p\rangle . \quad (2.41)$$

Fintantoché $f(\vec{p})$ è al quadrato integrabile, la norma di questo stato sarà finita, i.e.

$$\langle 0 | a_f a_f^\dagger | 0 \rangle = \int d^3p d^3p' f^*(p) f(p') \delta(p - p') = \int d^3p |f(p)|^2 < \infty . \quad (2.42)$$

Analogamente, un campo locale $\phi(x)$ va interpretato come una distribuzione a valori operatoriali, cioè

$$\phi_f = \int d^3x f(\vec{x}) \phi(x^0, \vec{x}) = \phi_f(x^0) , \quad (2.43)$$

che può essere interpretata come una media pesata di $\phi(x)$ sullo spazio 3-d. La relazione di commutazione a tempi uguali

$$[\dot{\phi}(x^0, \vec{x}), \phi(x^0, \vec{y})] = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) , \quad (2.44)$$

va, quindi, reinterpretata come

$$[\dot{\phi}_f(x^0), \phi_g(x^0)] = -i \int f(\vec{x}) g(\vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) d^3x d^3y = -i \int f(\vec{x}) g(\vec{x}) d^3x , \quad (2.45)$$

dove l'integrale a lato destro esiste ed è finito.

Definiamo ora la trasformata di Fourier di una distribuzione $D(x)$ tramite la seguente equazione

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{D}(k) f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} D(x) \tilde{f}(x)} , \quad (2.46)$$

dove $\tilde{f}(x)$ è l'antitrasformata di Fourier di $f(k)$. In generale, la trasformata di Fourier di una funzione a supporto compatto non è a supporto compatto. Tuttavia, la trasformata di Fourier di una funzione a decrescita rapida è anch'essa a decrescita rapida. Scegliamo, quindi, come spazio delle funzioni di prova lo **spazio delle funzioni temperate**, ovvero le funzioni che decrescono più velocemente di ogni potenza inversa.

Capitolo 3

Matrice \mathcal{S} e formule di riduzione

L'esperimento tipico in fisica delle particelle è quello in cui molte particelle, partendo da una distanza macroscopicamente grande, interagiscono in una regione microscopicamente piccola; dopo di che i prodotti dell'interazione si allontanano di nuovo verso distanze macroscopicamente grandi. Gli stati fisici, prima e dopo la collisione, consistono di particelle che sono così lontane da essere praticamente non interagenti; essi sono tali, quindi, da poter essere descritti matematicamente come prodotto diretto di stati a una particella. In questo tipo di esperimenti quello che viene misurato è la distribuzione di probabilità, o sezione d'urto, per transizioni tra stati iniziali e finali di particelle distanti ed effettivamente non interagenti.

3.1 Stati IN e stati OUT

Uno stato che consiste di molte particelle non-interagenti può essere considerato come uno stato che, sotto le trasformazioni del gruppo di Lorentz inhomogeneo, trasforma come un prodotto diretto di stati a 1-particella. Per etichettare gli stati a 1-particella usiamo i loro quadrimpulsi p^μ , la proiezione dei loro spin lungo l'asse z , e un indice discreto n per il tipo di particella, che include una specificazione della sua massa, spin totale, e carica.

La regola di trasformazione generale si può scrivere in forma compatta come

$$U(\Lambda, a)\psi_\alpha = e^{-ia_\mu(\Lambda P_{\text{tot}})^\mu} \psi_{\Lambda\alpha} , \quad (3.1)$$

dove α è un indice collettivo per indicare tutti i numeri quantici delle particelle. Lo stato ψ_α è un autostato dell'energia con autovalore E_α

$$H\psi_\alpha = E_\alpha\psi_\alpha , \quad (3.2)$$

dove E_α è uguale alla somma delle energie a 1-particella

$$E_\alpha = p_1^0 + p_2^0 + \dots . \quad (3.3)$$

La normalizzazione covariante dello stato ψ_α si ricava calcolando il prodotto scalare $\langle\psi_{\alpha'}|\psi_\alpha\rangle$, i.e.

$$\langle\psi_{\alpha'}|\psi_\alpha\rangle = (2\pi)^3 2E_\alpha \delta^3(\alpha - \alpha') . \quad (3.4)$$

Evidentemente la regola di trasformazione data dall'Eq. (3.1) si applica anche nei processi di scattering ai tempi $t \rightarrow \pm\infty$. Come abbiamo detto nell'introduzione a questo capitolo, in un esperimento di scattering tipico cominciamo al tempo $t \rightarrow -\infty$ con

particelle così lontane le une dalle altre da essere non ancora interagenti e finiamo al tempo $t \rightarrow +\infty$ con particelle altrettanto lontane da aver cessato di interagire. Abbiamo quindi non uno, ma due insiemi di stati che trasformano ciascuno come una collezione di particelle libere. Definiamo **stati in** ψ_α^{in} e **stati out** ψ_α^{out} gli stati asintotici che contengono le particelle descritte dall'indice α se le misure sono effettuate rispettivamente a $t \rightarrow -\infty$ o a $t \rightarrow +\infty$. Dobbiamo precisare che, poiché utilizziamo la rappresentazione di Heisenberg, i vettori di stato non cambiano nel tempo, cosicché $\psi_\alpha^{\text{in/out}}$ non sono i limiti per $t \rightarrow \pm\infty$ di un vettore di stato dipendente dal tempo $\psi(t)$.

Gli stati in e out formano, separatamente, una base completa nello spazio di Hilbert fisico. Questo implica che ogni stato fisico dello spazio di Hilbert può essere costruito come una sovrapposizione di stati in o di stati out. Inoltre, se esistono stati legati stabili, questi devono essere inclusi nell'insieme completo di stati asintotici. Lo stato di vuoto coincide nelle due basi, i.e.

$$|0, \text{in}\rangle \equiv |0, \text{out}\rangle . \quad (3.5)$$

Anche gli stati a 1-particella coincidono:

$$|p, \text{in}\rangle \equiv |p, \text{out}\rangle , \quad (3.6)$$

perché prendiamo come stati asintotici solo particelle stabili.

In accordo ai postulati della meccanica quantistica l'ampiezza

$$\langle \beta, \text{out} | \alpha, \text{in} \rangle \quad (3.7)$$

determina la probabilità che uno **stato in** $|\alpha, \text{in}\rangle$ a $t = -\infty$ sarà misurato come uno **stato out** $|\beta, \text{out}\rangle$ al tempo $t = +\infty$. La basi in e out si costruiscono applicando successivamente gli operatori di creazione $(a^\dagger)^{\text{in}}$ e $(a^\dagger)^{\text{out}}$ allo stato vuoto. Le regole di commutazione tra operatori di creazione e annichilazione di stati in sono semplici, i.e.

$$[a_p^{\text{in}}, (a_{p'}^\dagger)^{\text{in}}] = \delta(\vec{p} - \vec{p}') . \quad (3.8)$$

Altrettanto semplici sono le regole di commutazione tra operatori di creazione e annichilazione di stati out, i.e.

$$[a_p^{\text{out}}, (a_{p'}^\dagger)^{\text{out}}] = \delta(\vec{p} - \vec{p}') . \quad (3.9)$$

Al contrario, la regola di commutazione tra gli operatori di annichilazione (o di creazione) di uno stato in e di uno stato out

$$[a_p^{\text{in}}, a_{p'}^{\text{out}}] = ? , \quad (3.10)$$

è in generale complicata.

Possiamo associare agli stati asintotici i campi $\phi^{\text{in/out}}(x)$ asintoticamente liberi a $t \rightarrow \pm\infty$. Questi campi soddisfano l'equazione di Klein-Gordon

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\hat{\phi}_{\text{in}}(x) &= 0 , \\ (\square + m^2)\hat{\phi}_{\text{out}}(x) &= 0 , \end{aligned} \quad (3.11)$$

dove m è la massa fisica, e possono essere espansi nella base delle onde piane nel modo seguente

$$\begin{aligned} \phi_{\text{in}}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}2\omega_p} \left[\tilde{a}_p^{\text{in}} e^{-ipx} + \tilde{a}_p^{\dagger\text{in}} e^{ipx} \right] , \\ \phi_{\text{out}}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}2\omega_p} \left[\tilde{a}_p^{\text{out}} e^{-ipx} + \tilde{a}_p^{\dagger\text{out}} e^{ipx} \right] . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Per poter valutare quantità fisicamente rilevanti dobbiamo, in qualche modo, collegare l'operatore di campo interagente $\phi(x)$ ai campi asintotici $\phi^{\text{in/out}}(x)$. Il campo interagente $\phi(x)$ è anche detto **campo interpolante**. Dunque, vogliamo dare un significato al limite

$$\lim_{x^0 \rightarrow \pm\infty} \phi(x) \rightarrow \phi^{\text{out/in}}(x) . \quad (3.13)$$

Innanzitutto un campo interagente soddisfa un'equazione di campo non lineare del tipo:

$$(\square + m^2)\phi(x) = j(x) , \quad (3.14)$$

dove la **sorgente** $j(x)$ è un operatore locale che dipende da $\phi(x)$. Inoltre, $j(x)$ contiene un termine che tiene conto dell'uso della massa fisica m invece che della massa nuda m_0 . Tale termine è della forma

$$j_{\delta m}(x) = (m^2 - m_0^2)\phi^2(x) = -\delta m^2\phi^2(x) . \quad (3.15)$$

L'equazione differenziale nell'Eq. (3.14) può essere formalmente risolta usando le funzioni di Green, i.e.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_{\text{in}}(x) + \int d^4x' \Delta_R(x - x') j(x') , \\ \phi(x) &= \phi_{\text{out}}(x) + \int d^4x' \Delta_A(x - x') j(x') , \end{aligned} \quad (3.16)$$

dove $\Delta_R(x)$ a $\Delta_A(x)$, dette rispettivamente **funzioni di Green ritardata e avanzata**, soddisfano le seguenti condizioni

$$\begin{aligned} \Delta_R(x - x') &= 0 \quad \text{se } x^0 < x'^0 , \\ \Delta_A(x - x') &= 0 \quad \text{se } x^0 > x'^0 . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se la sorgente agisse solo per un intervallo di tempo finito T , cioè

$$j(x) = 0 \quad \text{per } |t| > T/2 , \quad (3.18)$$

allora potremmo dedurre immediatamente che

$$\begin{aligned} \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \phi(x) &= \phi_{\text{in}}(x) , \\ \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \phi(x) &= \phi_{\text{out}}(x) . \end{aligned} \quad (3.19)$$

I limiti del campo interpolante dati dall'Eq. (3.19) seguono semplicemente dalle caratteristiche di causalità dei propagatori avanzato e ritardato. Questa condizione, e di conseguenza i limiti nell'Eq (3.19), non può essere soddisfatta in generale a causa dell'autointerazione (che in teoria delle perturbazioni è descritta in termini di emissione e riassorbimento di quanti virtuali del campo) che non può essere spenta, cosicché il contributo del secondo termine in (3.16) non si annullerà mai completamente. Potremmo indebolire la condizione di limite e postulare una proporzionalità con gli operatori di campo asintotici della forma

$$\begin{aligned} \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \phi(x) &= \sqrt{Z} \phi_{\text{in}}(x) , \\ \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \phi(x) &= \sqrt{Z} \phi_{\text{out}}(x) , \end{aligned} \quad (3.20)$$

dove Z ha il significato di **costante di rinormalizzazione**. In assenza di interazione avremmo banalmente $Z = 1$. Nel caso generale \sqrt{Z} ha un semplice significato intuitivo: essa descrive l'ampiezza di probabilità che l'operatore $\phi(x)$ crei uno stato di singola particella quando agisce sullo stato vuoto. Infatti:

$$\langle n|\phi(x)|0\rangle = \sqrt{Z}\langle n|\phi_{\text{in}}(x)|0\rangle = \delta_{n1}\sqrt{Z}\langle 1|\phi_{\text{in}}(x)|0\rangle . \quad (3.21)$$

Comunque, a causa dell'interazione, l'operatore $\phi(x)$ può anche creare stati a molte particelle complicati e quindi il valore della costante Z deve essere un valore compreso fra 0 e 1, i.e.

$$0 \leq Z < 1 . \quad (3.22)$$

Ancora non abbiamo una descrizione soddisfacente del comportamento asintotico dell'operatore di campo. Infatti la condizione $Z \neq 1$ contraddice immediatamente le relazioni di commutazione a tempi uguali. Il problema sorge perché gli operatori $\phi_{\text{in}}(x)$ soddisfano le relazioni di commutazione a tempi uguali, per cui possiamo scrivere

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} [\phi(x^0, \vec{x}), \dot{\phi}(x^0, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = Z[\phi_{\text{in}}(x^0, \vec{x}), \dot{\phi}_{\text{in}}(x^0, \vec{y})] = Zi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) , \quad (3.23)$$

da cui $Z = 1$. Per risolvere il dilemma dobbiamo definire meglio cosa intendiamo per convergenza di una successione di operatori. Se abbiamo una successione di operatori O_i , diciamo che O_i **converge in norma** (convergenza forte) all'operatore O per $i \rightarrow \infty$ se $O_i\psi$ tende a $O\psi$ per ogni vettore ψ nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , cioè

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|O_i\psi - O\psi\| = 0 , \quad \forall \psi \in \mathcal{H} , \quad (3.24)$$

dove, nel nostro caso, la norma $\|\cdot\|$ è quella indotta dal prodotto scalare. Questa condizione, però, risulta troppo restrittiva. Definiamo quindi una **convergenza operatoriale debole** nel senso che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\langle \chi|O_i|\psi\rangle - \langle \chi|O|\psi\rangle) = 0 \quad \forall \chi, \psi \in \mathcal{H} . \quad (3.25)$$

In questo modo solo gli elementi di matrice degli operatori O_i nella successione devono tendere all'elemento di matrice dell'operatore O . Questa condizione risulta essere sufficiente per i nostri scopi poiché le osservabili fisiche sono descritte proprio da elementi di matrice (al quadrato). Matematicamente questa condizione è comunque più debole della convergenza in norma se consideriamo uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale. Infatti consideriamo la seguente quantità

$$\begin{aligned} \|(O_i - O)|\psi\rangle\|^2 &= \langle \psi|(O_i^\dagger - O^\dagger)(O_i - O)|\psi\rangle = \sum_{\chi} \langle \psi|O_i^\dagger - O^\dagger|\chi\rangle \langle \chi|O_i - O|\psi\rangle = \\ &= \sum_{\chi} |\langle \psi|O_i - O|\chi\rangle|^2 . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ora, se la successione O_i converge in norma all'operatore O la somma tende a 0 e quindi ciascun termine tende a zero perché la serie è a termini positivi. L'inverso non è vero in generale. Poiché la somma è infinita, l'annullarsi dei singoli termini non implica che la somma stessa si annulli se la convergenza non è uniforme.

La condizione asintotica per l'operatore di campo deve essere, quindi, formulata nel senso di una **convergenza operatoriale debole**:

$$\begin{aligned} \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \langle b | \phi(x) | a \rangle &= \sqrt{Z} \langle b | \phi_{\text{in}}(x) | a \rangle \quad \forall |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H} , \\ \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} \langle b | \phi(x) | a \rangle &= \sqrt{Z} \langle b | \phi_{\text{out}}(x) | a \rangle \quad \forall |a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H} . \end{aligned} \quad (3.27)$$

In questo modo non incontriamo la contraddizione data dall'Eq. (3.23) quando prendiamo il commutatore degli operatori di campo. Infatti, se usiamo il criterio di convergenza debole espresso dall'Eq. (3.27), i limiti $A_i \rightarrow A$ e $B_i \rightarrow B$ non implicano che il prodotto di operatori $A_i B_i$ tenda ad AB e dunque il ragionamento precedente non è applicabile.

Rigorosamente anche i limiti nell'Eq. (3.27) non sono matematicamente corretti, perché gli elementi di matrice sono funzioni oscillanti del tempo che non possiedono un limite ben definito. Ricordiamo che nel caso dell'equazione di Klein-Gordon $(\square + m^2)\phi(x) = 0$ possiamo definire il **prodotto scalare di due funzioni d'onda di Klein-Gordon** $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ (che non è strettamente un prodotto scalare poiché non è definito positivo) come:

$$\boxed{(\phi_1(x), \phi_2(x)) \equiv i \int d^3x \phi_1^*(x^0, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_2^*(x^0, \vec{x})} , \quad (3.28)$$

dove

$$\phi_1^*(x^0, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_2^*(x^0, \vec{x}) = \phi_1^*(x^0, \vec{x}) \partial_0 \phi_2^*(x^0, \vec{x}) - [\partial_0 \phi_1^*(x^0, \vec{x})] \phi_2^*(x^0, \vec{x}) . \quad (3.29)$$

Un sistema di onde piane normalizzate

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} , \\ f_p^*(x) &= \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} , \end{aligned} \quad (3.30)$$

forma un insieme ortonormale rispetto al prodotto scalare definito dall'Eq.(3.28), i.e.

$$\begin{aligned} (f_{p_1}, f_{p_2}) &= \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) , \\ (f_{p_1}^*, f_{p_2}) &= 0 , \\ (f_{p_1}^*, f_{p_2}^*) &= -\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Quindi, proiettando i campi asintotici su f_p o f_p^* otteniamo

$$\begin{aligned} (f_p, \phi_{\text{in}}) &= a_p^{\text{in}} , \\ -(f_p^*, \phi_{\text{in}}) &= a_p^{\dagger \text{in}} . \end{aligned} \quad (3.32)$$

(Nota: usando le equazioni del moto e un'integrazione per parti si può dimostrare che gli operatori di creazione e distruzione $a_p^{\dagger \text{in}}$ e a_p^{in} sono indipendenti dal tempo). Se formiamo un pacchetto d'onda sovrapponendo solo onde a frequenza positiva avremo

$$\begin{aligned} (f_p, \phi_{\text{in}}) &= a_f^{\text{in}} , \\ -(f_p^*, \phi_{\text{in}}) &= a_f^{\dagger \text{in}} , \end{aligned} \quad (3.33)$$

dove

$$a_f^{\text{in}}|0\rangle = -i \int d^3x f(x^0, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x^0, \vec{x})|0\rangle . \quad (3.34)$$

Ovviamente anche $f(x^0, \vec{x})$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon, i.e. $(\square + m^2)f(x) = 0$. In generale, se prendiamo una sovrapposizione di soluzioni sia ad energia positiva che negativa avremo

$$(f, \phi^{\text{in}}) = \phi_f^{\text{in}} . \quad (3.35)$$

Dimostriamo ora che i campi asintotici proiettati su pacchetti d'onda soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono indipendenti dal tempo. Infatti, calcolando $\partial_0 \phi_f^{\text{in}}$ troviamo

$$\begin{aligned} \partial_0 \phi_f^{\text{in}} &= i \partial_0 \int d^3x f^*(x^0, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{\text{in}}(x^0, \vec{x}) = i \int d^3x [f^* \partial_0^2 \phi_{\text{in}} - (\partial_0^2 f^*) \phi_{\text{in}}] = \\ &= i \int d^3x [f^* (\partial_0^2 \phi_{\text{in}}) - (\nabla^2 - m^2) f^* \phi_{\text{in}}] = \\ &= i \int d^3x [f^* (\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2) \phi_{\text{in}}] = \\ &= i \int d^3x f^* (\square + m^2) \phi_{\text{in}} = 0 , \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove il penultimo passaggio si ottiene integrando 2 volte per parti. Il campo interpolante proiettato sul pacchetto d'onda

$$(f, \phi) = \phi_f , \quad (3.37)$$

è in generale dipendente dal tempo. Nonostante ciò, gli elementi di matrice tendono asintoticamente ad un valore costante. In definitiva, una volta proiettati i campi interpolante e asintotico sul pacchetto d'onda, il limite

$$\boxed{\lim_{x^0 \rightarrow \pm\infty} \langle b | \phi_f(x^0) | a \rangle = \sqrt{Z} \langle b | \phi_f^{\text{out/in}} | a \rangle} , \quad (3.38)$$

è ben definito.

3.2 Formula di riduzione

È facile vedere che la costante Z che appare nel limite asintotico nell'Eq. (3.38) è proprio uguale alla costante Z_0 che abbiamo trovato nella rappresentazione spettrale della funzione a 2 punti nell'Eq. (2.35). Per dimostrare questa affermazione consideriamo l'elemento di matrice di $\phi_f(x^0)$ tra il vuoto e lo stato ad 1-particella:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi_f(x^0) | \tilde{p} \rangle &= i \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle 0 | \phi(x) | \tilde{p} \rangle = \\ &= i \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle 0 | e^{iPx} \phi(0) e^{-iPx} | \tilde{p} \rangle = \\ &= i \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ipx} \langle 0 | \phi(0) | \tilde{p} \rangle = \\ &= \frac{i\sqrt{Z_0}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ipx} . \end{aligned} \quad (3.39)$$

D'altra parte

$$\langle 0 | \phi_f^{\text{in,out}} | \tilde{p} \rangle = i \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle 0 | \phi^{\text{in,out}}(x) | \tilde{p} \rangle = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ipx} . \quad (3.40)$$

Il prodotto scalare

$$\int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ipx} , \quad (3.41)$$

è il prodotto scalare di 2 soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon e quindi è indipendente dal tempo. Avremo allora

$$\lim_{x^0 \rightarrow \pm\infty} \langle 0 | \phi_f(x^0) | \tilde{p} \rangle = \frac{i\sqrt{Z_0}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x f^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-ipx} = \sqrt{Z_0} \langle 0 | \phi_f^{\text{out,in}} | \tilde{p} \rangle = \sqrt{Z} \langle 0 | \phi_f^{\text{out,in}} | \tilde{p} \rangle , \quad (3.42)$$

e quindi

$$Z_0 = Z . \quad (3.43)$$

Consideriamo l'ampiezza

$$\langle q_1, q_2, \text{out} | p_1, p_2, \text{in} \rangle , \quad (3.44)$$

con $p_1, p_2 \neq q_1, q_2$. Usando gli operatori di creazione possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2, \text{out} | p_1, p_2, \text{in} \rangle &= \langle q_1, q_2, \text{out} | a_{p_1}^{\dagger\text{in}} | p_2, \text{in} \rangle = \\ &\langle q_1, q_2, \text{out} | a_{p_1}^{\dagger\text{out}} | p_2, \text{in} \rangle + \langle q_1, q_2, \text{out} | a_{p_1}^{\dagger\text{in}} - a_{p_1}^{\dagger\text{out}} | p_2, \text{in} \rangle . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Calcolando l'ampiezza $\langle q_1, q_2, \text{out} | a_{p_1}^{\dagger\text{out}} | p_2, \text{in} \rangle$ otteniamo

$$\langle q_1, q_2, \text{out} | a_{p_1}^{\dagger\text{out}} | p_2, \text{in} \rangle = \langle q_1, \text{out} | p_2, \text{in} \rangle \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) + \langle q_2, \text{out} | p_2, \text{in} \rangle \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) = 0 , \quad (3.46)$$

perché $p_1 \neq q_1, q_2$. Assumere che tutti gli impulsi delle particelle corrispondenti a stati in e out siano differenti equivale a tralasciare quei processi in cui qualcuna delle particelle "passa indisturbata" senza partecipare alla diffusione. Possiamo chiaramente includere anche questi termini facilmente poiché essi sono semplicemente gli elementi della matrice \mathcal{S} con un numero ridotto di particelle.

Sappiamo che

$$\begin{aligned} a_p^{\text{in}} &= i \int d^3x f_p^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi^{\text{in}}(x) , \\ a_p^{\dagger\text{in}} &= -i \int d^3x f_p(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi^{\text{in}}(x) , \end{aligned} \quad (3.47)$$

dove $\phi^{\text{in}}(x)$ è reale. Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle q_1, q_2, \text{out} | p_1, p_2, \text{in} \rangle &= i \int d^3x f_{p_1}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi^{\text{out}}(x) - \phi^{\text{in}}(x) | p_2, \text{in} \rangle = \\ &= i \left(\lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) \frac{1}{\sqrt{Z}} \int d^3x f_{p_1}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle = \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \left[f_{p_1}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle \right] . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Possiamo prendere come campo interpolante $\phi(x)$ un campo qualsiasi, avendo cura di cambiare opportunamente la costante Z . Procedendo ulteriormente nel calcolo dell'ampiezza $\langle q_1, q_2, \text{out} | p_1, p_2, \text{in} \rangle$ troviamo

$$\begin{aligned}
 & \langle q_1, q_2, \text{out} | p_1, p_2, \text{in} \rangle = \\
 & = \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x [f_{p_1}(x) \partial_0^2 \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle - (\partial_0^2 f_{p_1}(x)) \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle] = \\
 & = \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x [f_{p_1}(x) \partial_0^2 \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle + (m^2 - \Delta) f_{p_1}(x) \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle] = \\
 & = \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x f_{p_1}(x) (\square + m^2) \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle = \\
 & = \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x f_{p_1}(x) \hat{K}_x \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle ,
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

dove $\hat{K}_x = \square_x + m^2$ (con m la massa fisica) e abbiamo integrato $(m^2 - \Delta)$ per parti su d^3x .

Calcoliamo ora $\langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle$:

$$\begin{aligned}
 \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle & = \langle q_2, \text{out} | a_{q_1}^{\text{out}} \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle = \\
 & = \langle q_2, \text{out} | \phi(x) a_{q_1}^{\text{in}} | p_2, \text{in} \rangle + \langle q_2, \text{out} | a_{q_1}^{\text{out}} \phi(x) - \phi(x) a_{q_1}^{\text{in}} | p_2, \text{in} \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Il termine $\langle q_2, \text{out} | \phi(x) a_{q_1}^{\text{in}} | p_2, \text{in} \rangle$ è uguale a zero:

$$\begin{aligned}
 \langle q_2, \text{out} | \phi(x) a_{q_1}^{\text{in}} | p_2, \text{in} \rangle & = \langle q_2, \text{out} | \phi(x) a_{q_1}^{\text{in}} a_{p_2}^{\dagger \text{in}} | 0, \text{in} \rangle = \\
 & = \langle q_2, \text{out} | \phi(x) [a_{q_1}^{\text{in}}, a_{p_2}^{\dagger \text{in}}] + a_{p_2}^{\dagger \text{in}} a_{q_1}^{\text{in}} | 0, \text{in} \rangle = \\
 & = \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \langle q_2, \text{out} | \phi(x) | 0, \text{in} \rangle = 0 ,
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

perché $q_1 \neq p_2$. Quindi avremo

$$\begin{aligned}
 \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle & = \langle q_2, \text{out} | a_{q_1}^{\text{out}} \phi(x) - \phi(x) a_{q_1}^{\text{in}} | p_2, \text{in} \rangle = \\
 & = i \int d^3y f_{q_1}^*(y) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_2, \text{out} | \phi^{\text{out}}(y) \phi(x) - \phi(x) \phi^{\text{in}}(y) | p_2, \text{in} \rangle = \\
 & = \frac{i}{\sqrt{Z}} \left[\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \int d^3y f_{q_1}^*(y) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_2, \text{out} | \phi(y) \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle - \right. \\
 & \left. - \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \int d^3y f_{q_1}^*(y) \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle q_2, \text{out} | \phi(x) \phi(y) | p_2, \text{in} \rangle \right] = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{Z}} \left[\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \langle q_2, \text{out} | \phi_{f_{q_1}}(y^0) \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle - \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \langle q_2, \text{out} | \phi(x) \phi_{f_{q_1}}(y^0) | p_2, \text{in} \rangle \right] = \\
 & = \frac{1}{\sqrt{Z}} \left[\lim_{y_0 \rightarrow +\infty} \langle q_2, \text{out} | \mathcal{T} [\phi_{f_{q_1}}(y^0) \phi(x)] | p_2, \text{in} \rangle - \lim_{y_0 \rightarrow -\infty} \langle q_2, \text{out} | \mathcal{T} [\phi(x) \phi_{f_{q_1}}(y^0)] | p_2, \text{in} \rangle \right] ,
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \partial_{y_0} \left(f_{q_1}^*(y) \overleftrightarrow{\partial}_{y_0} \langle q_2, \text{out} | \mathcal{T} [\phi(x)\phi(y)] | p_2, \text{in} \rangle \right) = \\
 &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \left[f_{q_1}^*(y) \partial_{y_0}^2 \langle q_2, \text{out} | \mathcal{T} [\phi(x)\phi(y)] | p_2, \text{in} \rangle - (\partial_{y_0}^2 f_{q_1}^*(y)) \langle q_2, \text{out} | \mathcal{T} [\phi(x)\phi(y)] | p_2, \text{in} \rangle \right] \\
 &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y f_{q_1}^*(y) \hat{K}_y \langle q_2, \text{out} | \mathcal{T} [\phi(x)\phi(y)] | p_2, \text{in} \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Riassumendo, abbiamo trovato che

$$\begin{aligned}
 \langle q_1, q_2, \text{out} | p_1, p_2, \text{in} \rangle &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x f_{p_1}(x) \hat{K}_x \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle , \\
 \langle q_1, q_2, \text{out} | \phi(x) | p_2, \text{in} \rangle &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y f_{q_1}^*(y) \hat{K}_y \langle q_2, \text{out} | \mathcal{T} [\phi(x)\phi(y)] | p_2, \text{in} \rangle , \\
 \rightarrow \langle q_1, q_2, \text{out} | p_1, p_2, \text{in} \rangle &= \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^2 \int d^4x f_{p_1}(x) \hat{K}_x \int d^4y f_{q_1}^*(y) \hat{K}_y \langle q_2, \text{out} | \mathcal{T} [\phi(x)\phi(y)] | p_2, \text{in} \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Continuando a ridurre otteniamo la formula finale

$$\begin{aligned}
 \langle q_1, q_2, \text{out} | p_1, p_2, \text{in} \rangle &= \\
 \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^4 \int d^4x d^4y d^4z d^4w f_{p_1}(x) f_{p_2}(y) f_{q_1}^*(z) f_{q_2}^*(w) \hat{K}_x \hat{K}_y \hat{K}_z \hat{K}_w \langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(w)] | 0 \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

3.2.1 Invarianza di Lorentz delle funzioni di Wightman

Consideriamo la **funzione di Wightman a 2-punti**

$$\langle 0 | A(x) B(0) | 0 \rangle = \Delta_{AB}(x) , \tag{3.56}$$

con A e B operatori locali scalari. Usando le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
 A(\Lambda x) &= U(\Lambda) A(x) U^\dagger(\Lambda) , \\
 B(0) &= U(\Lambda) B(0) U^\dagger(\Lambda) , \\
 U^\dagger(\Lambda) B(0) &= B(0) U^\dagger(\Lambda) ,
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

otteniamo

$$\langle 0 | A(\Lambda x) B(0) | 0 \rangle = \Delta_{AB}(\Lambda x) = \langle 0 | U(\Lambda) A(x) U^\dagger(\Lambda) B(0) | 0 \rangle = \langle 0 | A(x) B(0) | 0 \rangle = \Delta_{AB}(x) , \tag{3.58}$$

da cui deduciamo che **le funzioni di Wightman sono invarianti di Lorentz**. In particolare, consideriamo una trasformazione di Lorentz infinitesima

$$\Lambda x = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu , \tag{3.59}$$

dove $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ è il tensore antisimmetrico, e calcoliamo $\Delta_{AB}(\Lambda x)$:

$$\Delta_{AB}(\Lambda x) = \Delta_{AB}(x^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu) = \Delta_{AB}(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Delta_{AB}(x) \epsilon^{\mu\nu} x_\nu = \Delta_{AB}(x) . \tag{3.60}$$

Di conseguenza, il termine con la derivata deve annullarsi, i.e.

$$[\partial_\mu \Delta_{AB}(x)] \epsilon^{\mu\nu} x_\nu = 0 , \quad (3.61)$$

e poiché $\epsilon^{\mu\nu}$ è antisimmetrico possiamo scrivere

$$(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) \Delta_{AB}(x) \epsilon^{\mu\nu} = 0 . \quad (3.62)$$

Inoltre, siccome $\epsilon^{\mu\nu}$ è arbitrario e i 6 parametri della trasformazione sono indipendenti otteniamo

$$\boxed{(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) \Delta_{AB}(x) = 0} , \quad (3.63)$$

che è la condizione che assicura l'invarianza di Lorentz di $\Delta_{AB}(x)$.

3.2.2 Invarianza di Lorentz delle funzioni di Green

Consideriamo la **funzione di Green a 2-punti** di due operatori scalari A e B

$$\langle 0 | \mathcal{T} [A(x)B(0)] | 0 \rangle \equiv \theta(x^0) \Delta_{AB}(x) + \theta(-x^0) \Delta_{BA}(x) . \quad (3.64)$$

La condizione di invarianza relativistica della funzione di Wightman, cioè l'Eq. (3.63), non può essere estesa *sic et simpliciter* alla funzione di Green definita dall'Eq. (3.64). Il problema sorge quando applichiamo $(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$ alla funzione di Green nell'Eq. (3.64) con $\mu = 0$ oppure $\nu = 0$. Ad esempio, applicando $(x_0 \partial_i - x_i \partial_0)$ otteniamo

$$\begin{aligned} (x_0 \partial_i - x_i \partial_0) \langle 0 | \mathcal{T} [A(x)B(0)] | 0 \rangle &= (x_0 \partial_i - x_i \partial_0) [\theta(x^0) \Delta_{AB}(x) + \theta(-x^0) \Delta_{BA}(x)] = \\ &= x_0 \partial_i [\theta(x^0) \Delta_{AB}(x) + \theta(-x^0) \Delta_{BA}(x)] - \\ &- x_i \partial_0 [\theta(x^0) \Delta_{AB}(x) + \theta(-x^0) \Delta_{BA}(x)] = \\ &= x_0 \theta(x^0) \partial_i \Delta_{AB}(x) + x_0 \theta(-x^0) \partial_i \Delta_{BA}(x) - \\ &- x_i \delta(x^0) \Delta_{AB}(x) - x_i \theta(x^0) \partial_0 \Delta_{AB}(x) + \\ &+ x_i \delta(-x^0) \Delta_{BA}(x) - x_i \theta(-x^0) \partial_0 \Delta_{BA}(x) , \end{aligned} \quad (3.65)$$

da cui usando la relazione

$$x_0 \partial_i \Delta_{AB}(x) = x_i \partial_0 \Delta_{AB}(x) , \quad (3.66)$$

ricaviamo che

$$\begin{aligned} (x_0 \partial_i - x_i \partial_0) \langle 0 | \mathcal{T} [A(x)B(0)] | 0 \rangle &= -x_i \delta(x^0) [\Delta_{AB}(x) - \Delta_{BA}(x)] = \\ &= -x_i \delta(x^0) \langle 0 | [A(x), B(0)] | 0 \rangle = . \quad (3.67) \\ &= -x_i \delta(x^0) \langle 0 | [A(0, \vec{x}), B(0, \vec{0})] | 0 \rangle \end{aligned}$$

Il commutatore a tempi uguali nell'ultimo passaggio è identicamente nullo

$$[A(0, \vec{x}), B(0, \vec{0})] = 0 , \quad (3.68)$$

perché la separazione è di tipo spazio. Di conseguenza, quando $\vec{x} \rightarrow 0$, il commutatore non può che comportarsi come una delta di Dirac o una derivata di ordine arbitrario della delta. Ad esempio, possiamo porre

$$\langle 0 | [A(0, \vec{x}), B(0, \vec{0})] | 0 \rangle = c_0 \delta(\vec{x}) + c_1 \Delta \delta(\vec{x}) . \quad (3.69)$$

(Non ci può essere un termine $\partial_i \delta(\vec{x})$ perchè non sarebbe una quantità scalare). Notando che

$$-x_i \delta(x^0) c_0 \delta(\vec{x}) = 0 , \quad (3.70)$$

otteniamo

$$(x_0 \partial_i - x_i \partial_0) \langle 0 | \mathcal{T} [A(x) B(0)] | 0 \rangle = -x_i \delta(x^0) c_1 \Delta \delta(\vec{x}) . \quad (3.71)$$

Per calcolare la quantità a secondo membro dell'Eq. (3.71) consideriamo la seguente identità

$$x^i \delta(\vec{x}) = 0 , \quad (3.72)$$

e prendiamone la derivata rispetto a x_j , ottenendo così

$$\partial_j [x_i \delta(\vec{x})] = \delta_{ij} \delta(\vec{x}) + x_i \partial_j \delta(\vec{x}) = 0 . \quad (3.73)$$

Derivando ancora rispetto a x_j otteniamo

$$\partial_j \partial_j [x_i \delta(\vec{x})] = 2 \partial_i \delta(\vec{x}) + x_i \partial_j \partial_j \delta(\vec{x}) = 0 , \quad (3.74)$$

da cui ricaviamo il risultato utile seguente

$$-x_i \Delta \delta(\vec{x}) = 2 \partial_i \delta(\vec{x}) . \quad (3.75)$$

Inserendo il risultato precedente nell'Eq. (3.71) otteniamo

$$\boxed{(x_0 \partial_i - x_i \partial_0) \langle 0 | \mathcal{T} [A(x) B(0)] | 0 \rangle = 2 c_1 \delta(x^0) \partial_i \delta(\vec{x})} , \quad (3.76)$$

che è, in generale, diverso da zero. La morale della storia è che la funzione di Green (ovvero il T-prodotto) così come definito nell'Eq. (3.64) non soddisfa la condizione di invarianza relativistica. Matematicamente, questo deriva dal fatto che il prodotto di due distribuzioni singolari può non essere ben definito.

Ridefiniamo quindi il T-prodotto in modo tale che la condizione di invarianza relativistica sia soddisfatta. A tal scopo, aggiungiamo alla definizione nell'Eq. (3.64) un controtermine nella forma di una distribuzione che è singolare laddove \mathcal{T} è singolare, i.e.

$$\langle 0 | \mathcal{T}^* [A(x) B(0)] | 0 \rangle = \langle 0 | \mathcal{T} [A(x) B(0)] | 0 \rangle + \alpha \partial_0 \delta(x^0) \delta(\vec{x}) . \quad (3.77)$$

Applicando $(x_0 \partial_i - x_i \partial_0)$ ad ambo i membri dell'Eq. (3.77) e usando il fatto che

$$x_0 \partial_0 \delta(x^0) = -\delta(x^0) , \quad (3.78)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} (x_0 \partial_i - x_i \partial_0) \langle 0 | \mathcal{T}^* [A(x) B(0)] | 0 \rangle &= 2 c_1 \delta(x^0) \partial^i \delta(\vec{x}) + \alpha x_0 \partial_0 \delta(x^0) \partial^i \delta(\vec{x}) = \\ &= 2 c_1 \delta(x^0) \partial^i \delta(\vec{x}) - \alpha \delta(x^0) \partial^i \delta(\vec{x}) = \\ &= (2 c_1 - \alpha) \delta(x^0) \partial^i \delta(\vec{x}) . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Scegliendo $\alpha = 2 c_1$ otteniamo un T-prodotto, e quindi una funzione di Green, che soddisfa la condizione di invarianza relativistica, i.e.

$$\boxed{(x_0 \partial_i - x_i \partial_0) \langle 0 | \mathcal{T}^* [A(x) B(0)] | 0 \rangle = 0} . \quad (3.80)$$

Occorre ancora verificare che usando \mathcal{T}^* la fisica non cambia. Questo si può verificare, ad esempio, ricalcolando la rappresentazione spettrale analoga all'Eq. (2.38), che ora diventa

$$\langle 0 | \mathcal{T}^* [A(x)B(0)] | 0 \rangle_{\text{FT}} = \frac{iZ}{q^2 - m^2 + i\epsilon} + \int \cdots + [\alpha \delta'(x^0) \delta(\vec{x})]_{\text{FT}} , \quad (3.81)$$

nella quale il polo resta in $q^2 = m^2$ e quindi lo spettro di massa della teoria non viene alterato. Anche nelle formule di riduzione \mathcal{T}^* non cambia il risultato fisico poiché differisce da \mathcal{T} per un termine che ha supporto nel solo punto $t = 0$, mentre le formule di riduzione sono sensibili solo ai tempi $t \rightarrow \pm\infty$.

Capitolo 4

Funzionale generatore

La definizione del funzionale generatore delle funzioni di Green è la seguente

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle J(x_1) \dots J(x_n) . \quad (4.1)$$

Per estrarre le funzioni di Green dal funzionale generatore $Z[J]$ dobbiamo introdurre dapprima il concetto di derivata funzionale.

4.1 Derivata funzionale

Dato un funzionale $F[Q]$ definiamo la derivata funzionale di F come il limite

$$\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(x)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[Q(x') + \epsilon \delta(x - x')] - F[Q(x')]}{\epsilon} . \quad (4.2)$$

Facciamo alcuni esempi per elucidare il concetto.

1. Consideriamo un funzionale $F[Q]$ della forma

$$F[Q] = \int dx' Q(x') f(x') , \quad (4.3)$$

e calcoliamo $F[Q + \epsilon \delta]$

$$F[Q + \epsilon \delta] = \int dx' [Q(x') + \epsilon \delta(x - x')] f(x') = F[Q] + \epsilon f(x) . \quad (4.4)$$

Usando la definizione in Eq. (4.2) deduciamo che la derivata funzionale di $F[Q]$ è semplicemente

$$\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(x)} = f(x) . \quad (4.5)$$

2. Consideriamo ora un funzionale $F[Q]$ della forma

$$F[Q] = \int dx' Q(x') \delta(x' - x) = Q(x) . \quad (4.6)$$

Calcolando $F[Q + \epsilon\delta]$ troviamo

$$F[Q + \epsilon\delta] = \int dx' [Q(x')\delta(x' - x) + \epsilon\delta(y - x')\delta(x' - x)] = F[Q] + \epsilon\delta(y - x) , \quad (4.7)$$

per cui la derivata funzionale vale

$$\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(y)} = \frac{\delta Q(x)}{\delta Q(y)} = \delta(x - y) . \quad (4.8)$$

3. Consideriamo poi un funzionale della forma

$$F[Q] = e^{\int Q(x)f(x)dx} . \quad (4.9)$$

La quantità $F[Q + \epsilon\delta]$ vale

$$F[Q + \epsilon\delta] = e^{\int Q(x)f(x) + \epsilon\delta(x-y)f(x)dx} = F[Q]e^{\epsilon f(y)} . \quad (4.10)$$

Calcolando il limite come prescritto dall'Eq. (4.2) otteniamo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[Q + \epsilon\delta] - F[Q]}{\epsilon} = F[Q] \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\epsilon f(y)} - 1}{\epsilon} = F[Q]f(y) , \quad (4.11)$$

per cui la derivata funzionale è data da

$$\frac{\delta F[Q]}{\delta Q(y)} = f(y)e^{\int Q(x)f(x)dx} . \quad (4.12)$$

4. Come ultimo esempio consideriamo il funzionale

$$F[J] = e^{\int dx dy J(x)A(x,y)J(y)} , \quad (4.13)$$

e calcoliamo $F[J + \epsilon\delta]$:

$$\begin{aligned} F[J + \epsilon\delta] &= \exp \left\{ \int dx dy [J(x) + \epsilon\delta(x - z)]A(x, y)[J(y) + \epsilon\delta(y - z)] \right\} = \\ &= F[J] \exp \left[\epsilon \int dx dy \delta(x - z)A(x, y)J(y) + \epsilon \int dx dy J(x)A(x, y)\delta(y - z) + O(\epsilon^2) \right] . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Procedendo come nell'esempio precedente possiamo calcolare facilmente la derivata funzionale, che in questo caso vale

$$\frac{\delta F[J]}{\delta J(z)} = F[J] \left\{ \int dx J(x)[A(x, z) + A(z, x)] \right\} . \quad (4.15)$$

Se la funzione $A(x, y)$ è simmetrica in x e y , i.e. $A(x, y) = A(y, x)$, allora la derivata funzionale diventa

$$\frac{\delta F[J]}{\delta J(z)} = 2 \left[\int dx A(z, x)J(x) \right] e^{\int dx dy J(x)A(x,y)J(y)} . \quad (4.16)$$

Usando la definizione di derivata funzionale data dall'Eq. (4.2), la funzione di Green a n punti si calcola prendendo, appunto, la derivata funzionale del funzionale generatore definito nell'Eq. (4.1), i.e.

$$\boxed{\langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle = (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_n) \dots \delta J(x_1)} \Big|_{J=0}} . \quad (4.17)$$

È opportuno notare che il funzionale generatore $Z[J]$ è definito solo per le funzioni di Green che sono simmetriche in x_1, \dots, x_n , ma non per le funzioni di Wightman.

4.2 Rotazione di Wick

Consideriamo il propagatore di Feynman della teoria libera dato dall'Eq. (2.37), che riscriviamo di seguito per semplicità di esposizione

$$i\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} d^4p . \quad (4.18)$$

Se prolunghiamo analiticamente questa funzione nel piano della variabile complessa temporale x^0 usando la trasformazione mostrata in Figura 4.1 data da

$$x^0 = x_4 e^{-i\theta} \quad \text{con } x_4 \in \mathbb{R} , \quad (4.19)$$

otteniamo una funzione $i\Delta_\theta(x)$ che si riduce a $i\Delta_F(x)$ per $\theta \rightarrow 0$. C'è un problema però. Se sostituiamo banalmente $x^0 = x_4 e^{-i\theta}$ nell'espressione del propagatore, i.e.

$$e^{-ip^0 x^0} = \exp[-ip^0 x_4 e^{-i\theta}] = e^{-ip^0 x_4 \cos\theta} e^{-p^0 x_4 \sin\theta} \quad (4.20)$$

otteniamo un integrale divergente e quindi non ben definito. Per definire opportunamen-

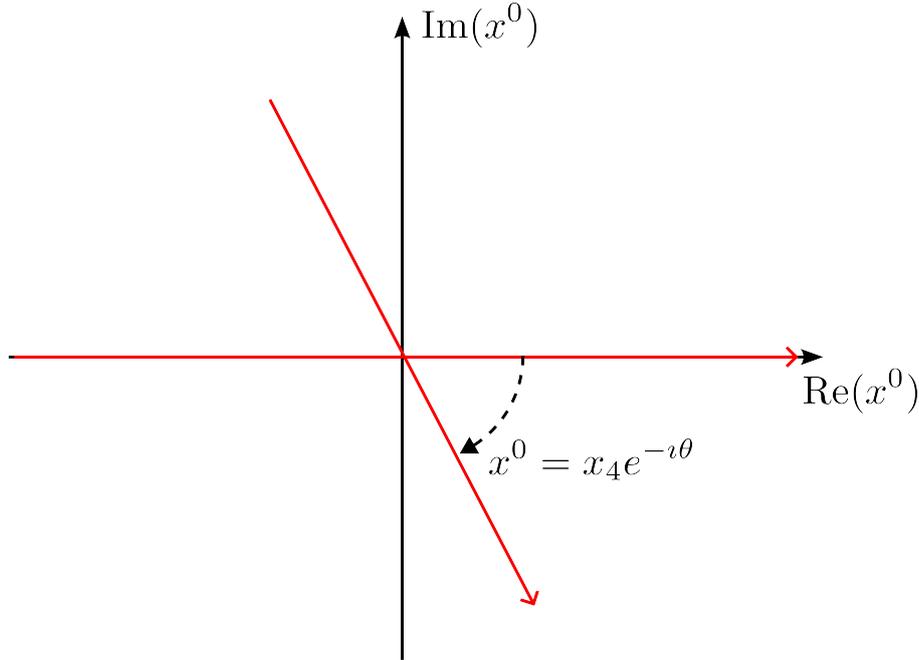


Figura 4.1: **Rotazione di Wick nel piano della variabile complessa x^0 .**

te il prolungamento analitico dobbiamo modificare il cammino di integrazione nel piano della variabile complessa p^0 ruotandolo in senso opposto. In buona sostanza, contemporaneamente alla sostituzione $x^0 = x_4 e^{-i\theta}$ dobbiamo effettuare la trasformazione mostrata in Figura 4.2 data da

$$p^0 = p_4 e^{i\theta} \quad \text{con } p_4 \in \mathbb{R} . \quad (4.21)$$

In tal modo otteniamo

$$i\Delta_\theta(x) = \frac{i e^{i\theta}}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip_4 x_4 + i\vec{p}\cdot\vec{x}}}{p_4^2 e^{i2\theta} - |\vec{p}|^2 - m^2} dp_4 d\vec{p} . \quad (4.22)$$

Scegliendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ (e facendo un cambio di variabili $\vec{p}' = -\vec{p}$) otteniamo

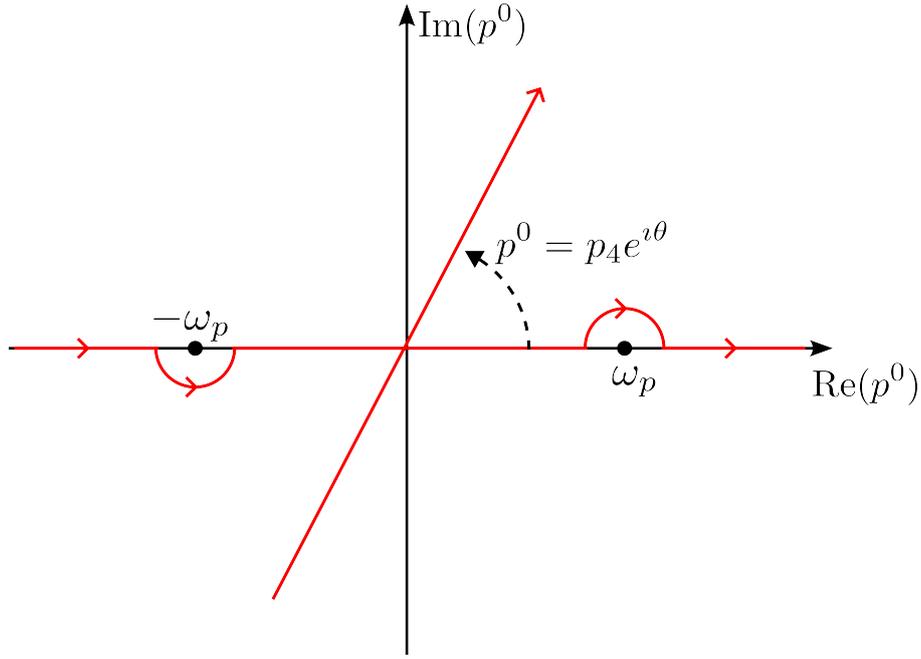


Figura 4.2: **Rotazione di Wick del cammino d'integrazione del propagatore di Feynman** $i\Delta_F(x)$.

$$i\Delta_{\pi/2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-i(p_4 x_4 + \vec{p} \cdot \vec{x})}}{p_4^2 + |\vec{p}|^2 + m^2} dp_4 d\vec{p} \equiv \Delta_E(x_E) . \quad (4.23)$$

Definiamo il **quadrimpulso euclideo** p_E il quadrivettore di componenti

$$p_E \equiv (p_4, \vec{p}) = (-ip^0, \vec{p}) . \quad (4.24)$$

Analogamente, definiamo il **quadrivettore posizione euclideo** come

$$x_E \equiv (x_4, \vec{x}) = (ix^0, \vec{x}) . \quad (4.25)$$

Definiamo il **prodotto scalare euclideo** $p_E x_E$ nel modo usuale come

$$p_E x_E = p_4 x_4 + \vec{p} \cdot \vec{x} = (-ip^0)(ix^0) + \vec{p} \cdot \vec{x} = p^0 x^0 + \vec{p} \cdot \vec{x} . \quad (4.26)$$

Con questa definizione, la norma del quadrimpulso euclideo p_E vale

$$p_E^2 = p_4^2 + |\vec{p}|^2 = -p_0^2 + |\vec{p}|^2 = -p^2 . \quad (4.27)$$

Per mezzo delle definizioni precedenti possiamo scrivere il **propagatore euclideo** in Eq. (4.23) come

$$\Delta_E(x_E) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip_E x_E}}{p_E^2 + m^2} d^4 p_E . \quad (4.28)$$

Riassumendo, le prescrizioni per effettuare la **rotazione di Wick** del propagatore sono

$$\boxed{\begin{array}{l} x_4 = ix^0 , \\ p_4 = -ip^0 \end{array}} . \quad (4.29)$$

4.3 Funzionale generatore euclideo

Consideriamo ora un funzionale generatore della forma

$$Z[J] = \int [\delta\phi] \exp \left[\imath \mathcal{S}(\phi) + \imath \int d^4x J(x)\phi(x) \right] , \quad (4.30)$$

dove l'**azione** $\mathcal{S}(\phi)$ è data da:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d^4x \left(\partial^0\phi\partial^0\phi - \vec{\partial}\phi \cdot \vec{\partial}\phi - m_0^2\phi^2 - g_0\phi^4 \right) . \quad (4.31)$$

Vogliamo prolungare $Z[J]$ analiticamente nell'euclideo. A tal scopo, le derivate rispetto a x^0 che compaiono nell'azione vanno sostituite, in accordo alle prescrizioni dell'Eq. (4.29), con

$$\frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial(-\imath x_4)} = \imath \frac{\partial}{\partial x^4} \rightarrow \partial^0\phi\partial^0\phi = -\partial^4\phi\partial^4\phi . \quad (4.32)$$

L'**azione euclidea** \mathcal{S}_E sarà quindi data da

$$\mathcal{S} = \frac{\imath}{2} \int d^4x_E \left(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m_0^2\phi^2 + g_0\phi^4 \right) = \imath \mathcal{S}_E , \quad (4.33)$$

mentre il fattore $e^{\imath\mathcal{S}}$ diventa

$$e^{\imath\mathcal{S}} \rightarrow e^{-\mathcal{S}_E} . \quad (4.34)$$

Operando le sostituzioni precedenti nell'Eq. (4.30) otteniamo il **funzionale generatore euclideo**, i.e.

$$Z_E[J] = \int [\delta\phi] \exp \left[-\mathcal{S}_E(\phi) + \int d^4x_E J(x)\phi(x) \right] , \quad (4.35)$$

la cui espressione esplicita è data da

$$\boxed{Z_E[J] = \int [\delta\phi] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4x_E \left(\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + m_0^2\phi^2 + g_0\phi^4 \right) + \int d^4x_E J(x)\phi(x) \right]} . \quad (4.36)$$

Questa espressione ha però carattere puramente formale. Per definire operativamente il funzionale generatore dobbiamo definire una procedura per poterlo calcolare. A tal fine, definiamo l'integrale funzionale che appare nella definizione formale (4.36) come limite di un integrale finito dimensionale. Supponiamo di sostituire allo spazio-tempo continuo un reticolo finito di passo a . I punti del reticolo saranno identificati con

$$x^\mu = n^\mu a = a(n_1, n_2, n_3, n_4) \quad \text{con } n_i \in \mathbb{Z} . \quad (4.37)$$

Alla derivata sostituiamo la sua forma discretizzata:

$$\partial_\mu\phi = \frac{\phi(x^\mu + a\hat{n}^\mu) - \phi(x^\mu - a\hat{n}^\mu)}{2a} , \quad (4.38)$$

dove \hat{n}^μ è la direzione di x^μ . A questo punto possiamo definire il funzionale generatore $Z_E[J]$ come il limite

$$Z_E[J] = \lim_{V_4 \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow 0} Z_E^{(a, V_4)}[J] , \quad (4.39)$$

dove il funzionale generatore regolarizzato $Z_E^{(a, V_4)}[J]$ è dato da

$$Z_E^{(a, V_4)}[J] = \int \prod_{n \in V_4} d\phi(x^n) \exp \left\{ -a^4 \sum_n \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + g_0 \phi^4 - J\phi \right] \right\} . \quad (4.40)$$

Questo integrale esiste se $g_0 > 0$. Il problema è dimostrare che esistono i due limiti $a \rightarrow 0$ e $V_4 \rightarrow \infty$. Il limite $V_4 \rightarrow \infty$ è sostanzialmente un limite termodinamico ed è sotto controllo. Il limite difficile è $a \rightarrow 0$. Notiamo subito che poiché $-\frac{\pi}{a} \leq p \leq \frac{\pi}{a}$, allora a^{-1} è un cut-off sugli impulsi. Quello che ci interessa è che le funzioni di Green siano ben definite (non divergenti) nel limite $a \rightarrow 0$. Questo è possibile se la teoria è **rinormalizzabile**. In altre parole, se consideriamo m_0 e g_0 come funzioni del passo reticolare a e nel limite $a \rightarrow 0$ riusciamo a scegliere queste funzioni in modo tale che le funzione di Green sono finite in questo limite, allora la teoria di campo sarà rinormalizzabile.

Supponiamo di calcolare un'osservabile $\phi_1(g_0, m_0, a)$. Assegnando a ϕ_1 il valore sperimentale ϕ_1^{exp} , i.e.

$$\phi_1^{\text{exp}} = \phi_1(m_0, g_0, a) , \quad (4.41)$$

otteniamo un'equazione che stabilisce un legame fra m_0 e g_0 . Calcolando una seconda osservabile $\phi_2(m_0, g_0, a)$ e assegnando ad essa il valore sperimentale

$$\phi_2^{\text{exp}} = \phi_2(m_0, g_0, a) , \quad (4.42)$$

possiamo ricavare m_0 e g_0 come funzioni di ϕ_1^{exp} e ϕ_2^{exp} , cioè

$$\begin{aligned} m_0 &= m_0(\phi_1^{\text{exp}}, \phi_2^{\text{exp}}, a) , \\ g_0 &= g_0(\phi_1^{\text{exp}}, \phi_2^{\text{exp}}, a) . \end{aligned} \quad (4.43)$$

A questo punto possiamo predire ϕ_3^{exp} come

$$\phi_3^{\text{exp}} = \phi_3(m_0, g_0, a) = F_3(\phi_1^{\text{exp}}, \phi_2^{\text{exp}}, a) . \quad (4.44)$$

Il punto cruciale è che il passaggio al limite $a \rightarrow 0$ si fa a ϕ_1^{exp} e ϕ_2^{exp} fissati e non a m_0 e g_0 fissati.

4.4 Funzionale generatore del campo libero

Abbiamo visto che le funzioni di Green possono essere ottenute come le derivate funzionali del funzionale generatore:

$$(-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_n) \dots \delta J(x_1)} \Big|_{J=0} = \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle . \quad (4.45)$$

Nel caso libero é semplice calcolare esplicitamente il funzionale generatore:

$$Z[J] = \int [\delta\phi] \exp \left[i\mathcal{S}(\phi) + i \int J\phi \right] , \quad (4.46)$$

dove

$$\mathcal{S}(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 . \quad (4.47)$$

Per effettuare il calcolo, valutiamo $Z[J]$ usando il formalismo euclideo e poi prolunghiamo analiticamente il risultato finale nello spazio minkowskiano. Dunque, il funzionale generatore euclideo è dato da

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \int [\delta\phi] \exp \left[-\mathcal{S}_E(\phi) + \int d^4x_E J(x_E)\phi(x_E) \right] , \\ \mathcal{S}_E(\phi) &= \int \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 d^4x_E . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Valutiamo l'argomento dell'esponenziale:

$$\begin{aligned} & - \int \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - J\phi \right) d^4x_E = \\ & = \int \left(\frac{1}{2} \phi \partial_\mu \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + J\phi \right) d^4x_E = \\ & = - \int \left(\frac{1}{2} \phi \hat{K} \phi - J\phi \right) d^4x_E = \\ & = - \int \frac{1}{2} \left(\phi - \hat{K}^{-1} J \right) \hat{K} \left(\phi - \hat{K}^{-1} J \right) d^4x_E + \frac{1}{2} \int J \hat{K}^{-1} J d^4x_E , \end{aligned} \quad (4.49)$$

dove $\hat{K} = -\partial_\mu \partial_\mu + m_0^2 = -(\partial_t^2 + \nabla^2) + m_0^2$. Facendo il cambio di variabili: $\phi' = \phi - \hat{K}^{-1} J$ la misura d'integrazione non cambia, per cui otteniamo

$$Z_E[J] = \exp \left(\frac{1}{2} \int J \hat{K}^{-1} J d^4x_E \right) \int [\delta\phi] \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^4x_E \phi' \hat{K} \phi' \right) . \quad (4.50)$$

Notando che l'integrale in $\delta\phi$ è un integrale gaussiano otteniamo

$$\int [\delta\phi] \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^4x_E \phi' \hat{K} \phi' \right) = (2\pi)^{N/2} \left(\det \hat{K} \right)^{-1/2} \quad \text{per } N \rightarrow \infty , \quad (4.51)$$

che non dipende da J . Quindi a parte questo fattore costante, che possiamo eliminare con un'opportuna normalizzazione del funzionale generatore, otteniamo il risultato finale:

$$\boxed{Z_E[J] = Z_E[0] \exp \left(\frac{1}{2} \int d^4x_E J \hat{K}^{-1} J \right)} . \quad (4.52)$$

L'operatore inverso \hat{K}^{-1} può essere scritto nella forma seguente

$$(\hat{K}^{-1} J)(x_E) = \int d^4y_E G(x_E - y_E) J(y_E) , \quad (4.53)$$

dove $G(x_E)$ soddisfa l'equazione

$$KG(x_E) = \delta^4(x_E) . \quad (4.54)$$

Ricordando che $\hat{K} = -\partial_\mu \partial_\mu + m_0^2$ e passando alla trasformata di Fourier troviamo

$$(-\partial_\mu \partial_\mu + m_0^2) \int d^4p_E e^{ip_E x_E} \tilde{G}(p_E) = \int d^4p_E (p_E^2 + m_0^2) \tilde{G}(p_E) e^{ip_E x_E} = \int d^4p_E e^{ip_E x_E} , \quad (4.55)$$

da cui ricaviamo $\tilde{G}(p_E)$

$$\tilde{G}(p_E) = \frac{1}{p_E^2 + m_0^2}, \quad (4.56)$$

e quindi $G(x_E)$

$$G(x_E) = \int d^4 p_E e^{i p_E x_E} \frac{1}{p_E^2 + m_0^2}. \quad (4.57)$$

Non ci resta che continuare analiticamente $G(x_E)$ nello spazio di Minkowski. Per effettuare la continuazione analitica poniamo $x_4 = ix_0$ e valutiamo $G(ix_0, \vec{x})$

$$G(ix_0, \vec{x}) = \int d^4 p_E \exp [i p_E^4 (ix_0) + i \vec{p} \cdot \vec{x}] \frac{1}{p_4^2 + \vec{p}^2 + m_0^2}. \quad (4.58)$$

Per completare la rotazione di Wick (vedi Figura 4.3) dobbiamo effettuare la sostituzione ulteriore $p_4 = -ip_0$ nell'integrando, per cui otteniamo

$$G(ix_0, \vec{x}) = \int -i d^4 p \frac{\exp [i(-ip_0)ix_0 + i \vec{p} \cdot \vec{x}]}{-p_0^2 + \vec{p}^2 + m_0^2} = i \int d^4 p e^{i p x} \frac{1}{p^2 - m_0^2} = i \Delta_F(x). \quad (4.59)$$

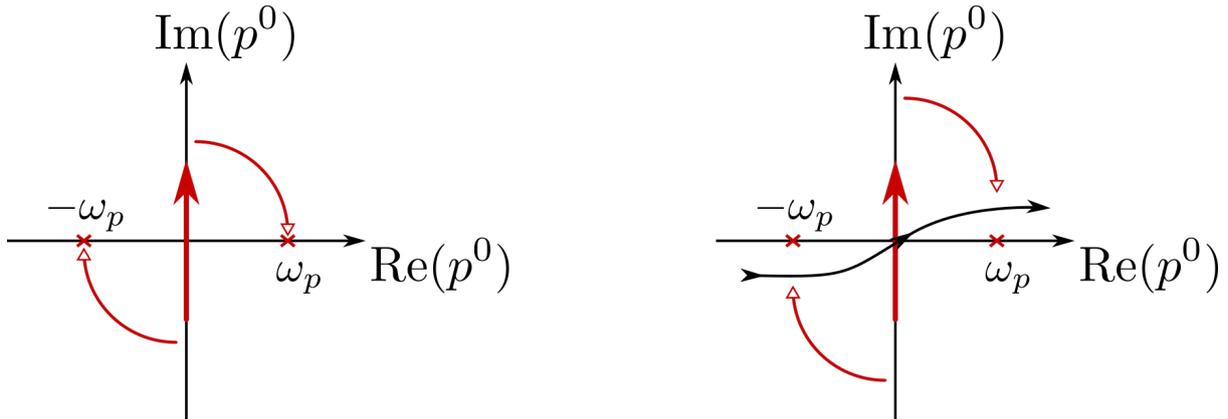


Figura 4.3: **Rotazione di Wick inversa dallo spazio euclideo allo spazio minkowskiano.** Il cammino d'integrazione per p^0 va da $-i\infty$ a $+i\infty$ (perché l'integrale è su p_4 reale). Possiamo deformare questo cammino, in accordo al teorema dei residui, fino all'asse reale aggirando i poli opportunamente.

A questo punto possiamo continuare analiticamente $Z_E[J]$ per ottenere finalmente il funzionale generatore minkowskiano, che è dato da

$$\begin{aligned} Z_E[J] &= \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4 x_E d^4 y_E J(x_E) G(x_E - y_E) J(y_E) \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) i \Delta_F(x - y) J(y) \right] = Z[J]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Calcolando la derivata del funzionale generatore rispetto a $J(x)$ si ottengono le funzioni di Green. Ad esempio, la funzione di Green a 2 punti è data da

$$\langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x_1) \phi(x_2)] | 0 \rangle = G(x_1, x_2) = i \Delta_F(x_1 - x_2), \quad (4.61)$$

La funzione $G(x_1, x_2)$ può essere rappresentata graficamente tramite il seguente diagramma

$$G(x_1, x_2) = x_1 \bullet \text{---} \bullet x_2 .$$

La funzione di Green successiva non triviale è quella a 4 punti, che vale

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)] | 0 \rangle = G(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \imath \Delta_F(x_1 - x_2) \imath \Delta_F(x_3 - x_4) + \\ & + \imath \Delta_F(x_1 - x_3) \imath \Delta_F(x_2 - x_4) + \\ & + \imath \Delta_F(x_1 - x_4) \imath \Delta_F(x_2 - x_3) , \end{aligned} \quad (4.62)$$

e può essere rappresentata diagrammaticamente come

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ | \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ | \\ x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_4 \\ x_3 \text{---} x_2 \end{array} .$$

In generale, nel caso libero, la funzione di Green a $2n$ punti sarà il prodotto di n funzioni di Green a 2 punti disgiunte (con tutte le permutazioni possibili). Conviene a questo punto considerare solo le **funzioni di Green connesse**, cioè quelle che non possono essere ulteriormente fattorizzate nel prodotto di altre funzioni di Green con un numero minore di punti. Graficamente le funzioni di Green connesse sono rappresentate da diagrammi in cui tutti i vertici sono connessi tra loro. È possibile dimostrare che il funzionale $W[J]$ definito come

$$\imath W[J] = \log Z[J] , \quad (4.63)$$

è un funzionale generatore per le sole funzioni di Green connesse, i.e.

$$G_c(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1)\dots\phi(x_n)] | 0 \rangle_{\text{conn}} = (-\imath)^{n-1} \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_n)\dots\delta J(x_1)} \right|_{J=0} . \quad (4.64)$$

Nel caso libero $W[J]$ può essere calcolato esplicitamente ed è dato da

$$\boxed{W[J] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)} , \quad (4.65)$$

da cui si vede facilmente che la sola funzione di Green connessa è quella a 2 punti, i.e.

$$G_{\text{conn}}^{(2)}(x, y) = \imath \Delta_F(x-y) . \quad (4.66)$$

Capitolo 5

Interazioni e teoria delle perturbazioni

Consideriamo una teoria di campo scalare con autointerazione descritta dalla lagrangiana seguente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4, \quad (5.1)$$

dove \mathcal{L}_0 è la lagrangiana della teoria di campo libero e \mathcal{L}_{int} è la lagrangiana che descrive l'autointerazione, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2, \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{1}{4!} \lambda \phi^4, \quad \lambda > 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Il funzionale generatore della teoria di campo interagente è dato da

$$Z[J] = \int [\delta\phi] \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} + J\phi \right) = \int [\delta\phi] \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_0 + J\phi \right) e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}}. \quad (5.3)$$

Espandendo in serie di Taylor l'esponenziale contenente \mathcal{L}_{int} otteniamo

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int [\delta\phi] \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_0 + J\phi \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left[\int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) \right]^n = \\ &= \int [\delta\phi] \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_0 + J\phi \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (-\lambda)^n}{n! (4!)^n} \left[\int d^4x \phi(x)^4 \right]^n. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Osserviamo ora che la derivata funzionale rispetto a J dell'esponenziale contenente \mathcal{L}_0 vale

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left(i \int d^4x' \mathcal{L}_0 + J(x')\phi(x') \right) = i\phi(x) \exp \left(i \int d^4x' \mathcal{L}_0 + J(x')\phi(x') \right). \quad (5.5)$$

Analogamente, la derivata funzionale seconda è data da

$$(-i)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x)^2} \exp \left(i \int d^4x' \mathcal{L}_0 + J(x')\phi(x') \right) = \phi(x)^2 \exp \left(i \int d^4x' \mathcal{L}_0 + J(x')\phi(x') \right), \quad (5.6)$$

e così via per le derivate di ordine superiore. Quindi sostituendo

$$\phi(x) \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta J(x)}, \quad (5.7)$$

possiamo riscrivere il funzionale generatore nell'Eq. (5.4) come

$$Z[J] = \int [\delta\phi] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (-\lambda)^n}{n! (4!)^n} \left[\int d^4x (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right]^n \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_0 + J\phi \right) . \quad (5.8)$$

Risponenziando la sommatoria e indicando con $Z_0[J]$ il funzionale generatore della teoria libera otteniamo l'espressione compatta seguente

$$\boxed{Z[J] = \exp \left[-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] Z_0[J]} . \quad (5.9)$$

Le funzioni di Green si ottengono come sempre prendendo le derivate funzionali di $Z[J]$.

5.1 Funzionale generatore all'ordine $O(\lambda)$

Valutiamo il funzionale generatore nell'Eq. (5.9) al primo ordine in λ :

$$\begin{aligned} Z[J] &= \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] Z_0[J] = \\ &= \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] \exp \left[-\frac{i}{2} \int dx dy J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Per semplificare la notazione introduciamo la seguente rappresentazione diagrammatica dei vari termini che compaiono nell'Eq. (5.10):

$$i\Delta_F(x-y) = \quad x \text{ ————— } y \quad , \quad (5.11)$$

$$i \int J(x) dx = \quad \bullet \text{ ————— } , \quad (5.12)$$

$$i\Delta_F(0) = \quad \text{loop} \quad , \quad (5.13)$$

$$i\lambda \int d^4x = \quad \text{cross} \quad , \quad (5.14)$$

$$Z[J] = \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] e^{\frac{1}{2} \bullet \text{---} \bullet} . \quad (5.15)$$

Prendendo le derivate funzionali otteniamo le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
 (-i) \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet} &= (\bullet - x) e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet} = \left(\int dy \iota J(x) \iota \Delta(x-y) \right) e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet}, \\
 (-i) \frac{\delta}{\delta J(x)} (\bullet - y) &= x - y = \iota \Delta_F(x-y), \\
 (-i) \frac{\delta}{\delta J(x)} (\bullet - x) &= \text{loop} = \iota \Delta_F(0), \\
 (-i)^2 \frac{\delta^2}{\delta J(x)^2} e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet} &= \left[\text{loop} + \bullet - x \bullet - x \right] e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet}, \\
 (-i)^3 \frac{\delta^3}{\delta J(x)^3} e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet} &= \left[2 \text{loop} \bullet - x + \left(\text{loop} + \bullet - x \bullet - x \right) \bullet - x \right] e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet} = \\
 &= \left[3 \text{loop} \bullet - x + \bullet - x \bullet - x \bullet - x \right] e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet}, \\
 (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet} &= \left[3 \text{loop} \text{loop} + 6 \text{loop} \bullet - x \bullet - x + \bullet - x \bullet - x \bullet - x \bullet - x \right] e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet}.
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Inserendo le relazioni precedenti nell'Eq. (5.15) otteniamo

$$\left[1 - \frac{\iota \lambda}{4!} \int d^4 x (-i)^4 \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4} \right] e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet} = \left[1 + \frac{1}{4!} \left(3 \text{loop} \text{loop} + 6 \text{loop} \bullet - x + \text{cross} \right) \right] e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet}. \tag{5.17}$$

In conclusione, all'ordine $O(\lambda)$ il funzionale generatore è dato da

$$Z[J] = \left[1 + \frac{1}{8} \text{loop} \text{loop} + \frac{1}{4} \text{loop} \bullet - x + \frac{1}{24} \text{cross} \right] e^{\frac{1}{2} \bullet \bullet}. \tag{5.18}$$

Ponendo $J = 0$ nell'equazione precedente, il funzionale generatore diventa

$$Z[0] = \left[1 + \frac{1}{8} \text{loop} \text{loop} + \dots \right]. \tag{5.19}$$

In generale, cioè a tutti gli ordini in λ , il funzionale $Z[0]$ rappresenta la somma di tutti i diagrammi del tipo **vuoto-vuoto**, cioè senza gambe esterne. Scegliendo la normalizzazione del funzionale generatore $Z[J]$ in modo tale che $Z[0] = 1$, possiamo verificare facilmente per ispezione dell'Eq. (5.1) che la somma di tutti i diagrammi vuoto-vuoto è identicamente nulla. Di conseguenza possiamo omettere del tutto tali diagrammi durante il calcolo, ad esempio, delle funzioni di Green.

5.1.1 Funzioni di Green al primo ordine

Avendo ottenuto l'espressione (5.18) del funzionale generatore possiamo ricavare facilmente le funzioni di Green al primo ordine perturbativo calcolando le derivate funzionali

di $Z[J]$, i.e.

$$G(x_1, x_2) = \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle = (-i)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] \Big|_{J=0} =$$

$$= (-i) \frac{\delta}{\delta J(x_1)} (-i) \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left\{ \left[1 + \frac{1}{8} \text{diagram} + \frac{1}{4} \text{diagram} + \frac{1}{24} \text{diagram} \right] e^{\frac{1}{2} \text{diagram}} \right\} \Big|_{J=0} \quad (5.20)$$

Calcolando la prima derivata (ignorando il diagramma vuoto-vuoto) otteniamo

$$(-i) \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \left(e^{\frac{1}{2} \text{diagram}} + \frac{1}{4} \text{diagram} e^{\frac{1}{2} \text{diagram}} + \frac{1}{24} \text{diagram} e^{\frac{1}{2} \text{diagram}} \right) =$$

$$= \left(\text{diagram} x_2 + \frac{2}{4} \text{diagram} x_2 + \frac{1}{24} \cdot 4 \text{diagram} x_2 + \frac{1}{4} \text{diagram} x_2 + \frac{1}{24} \text{diagram} x_2 \right) e^{\frac{1}{2} \text{diagram}} \quad (5.21)$$

Calcolando la seconda derivata troviamo

$$G(x_1, x_2) = \left(x_1 \text{---} x_2 + \frac{1}{2} x_1 \text{---} \text{diagram} x_2 + \frac{1}{24} \cdot 4 \cdot 3 \text{diagram} x_1 x_2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot 2 \text{diagram} x_1 \text{---} x_2 + \frac{1}{4} \text{diagram} x_1 \text{---} x_2 +$$

$$+ \frac{1}{24} \cdot 4 \text{diagram} x_1 x_2 + \frac{1}{24} \text{diagram} x_1 \text{---} x_2 + \text{diagram} x_2 \text{---} x_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \text{diagram} x_2 \text{---} x_1 + \frac{1}{6} \text{diagram} x_2 \text{---} x_1 +$$

$$\left. + \frac{1}{4} \text{diagram} x_2 \text{---} x_1 + \frac{1}{24} \text{diagram} x_2 \text{---} x_1 \right) e^{\frac{1}{2} \text{diagram}} \Big|_{J=0} \quad (5.22)$$

da cui, valutando il tutto a $J = 0$, otteniamo semplicemente

$$\boxed{G(x_1, x_2) = x_1 \text{---} x_2 + \frac{1}{2} x_1 \text{---} \text{diagram} x_2} \quad (5.23)$$

La forma diagrammatica della funzione di Green nell'Eq. (5.1.1) ha il significato analitico seguente:

$$\begin{aligned}
 G(x_1, x_2) &= x_1 \text{ --- } x_2 + \frac{1}{2} x_1 \text{ --- } \text{loop} \text{ --- } x_2 = \\
 &= i\Delta_F(x_1 - x_2) + \frac{1}{2} i\Delta_F(0)(-i)\lambda \int i\Delta_F(x_1 - x) i\Delta_F(x - x_2) d^4x = \\
 &= i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{1}{2} \Delta_F(0)\lambda \int \Delta_F(x_1 - x)\Delta_F(x - x_2) d^4x .
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

A questo punto è utile osservare ancora una volta, anticipando così il tema del capitolo successivo, che la funzione $i\Delta_F(x - y)$, data da

$$i\Delta_F(x - y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} , \tag{5.25}$$

è singolare per $x = y$. Infatti, indicando con Λ il cut-off ultravioletto nell'integrale sul quadrimpulso e ponendo $x = y$ otteniamo

$$i\Delta_F(0) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int^\Lambda d^4p \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sim \Lambda^2 , \tag{5.26}$$

che diverge quadraticamente per $\Lambda \rightarrow \infty$.

5.1.2 Funzionale generatore delle funzioni di Green connesse

Il funzionale generatore delle funzioni di Green connesse è dato da $iW[J] = \ln Z[J]$. Calcolando il logaritmo dell'Eq. (5.18) otteniamo

$$\begin{aligned}
 iW[J] &= \ln \left\{ \left[1 + \frac{1}{4} \text{---loop---} + \frac{1}{24} \text{---cross---} \right] e^{\frac{1}{2} \text{---}} \right\} = \\
 &= \ln \left(1 + \frac{1}{4} \text{---loop---} + \frac{1}{24} \text{---cross---} \right) + \ln e^{\frac{1}{2} \text{---}} = \\
 &= \frac{1}{2} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---loop---} + \frac{1}{24} \text{---cross---} + O(\lambda^2) .
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

La funzione di Green a 2 punti connessa si ottiene prendendo le derivate funzionali di $W[J]$, i.e.

$$G^c(x_1, x_2) = (-i) \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = (-i) \frac{\delta}{\delta J(x_1)} (-i) \frac{\delta}{\delta J(x_2)} iW[J] \Big|_{J=0} . \tag{5.28}$$

Questi diagrammi non possono essere separati in parti disgiunte tagliando una linea interna e sono perciò chiamati **diagrammi irriducibili a una particella (1PI)**. L'irriducibilità a una particella è una proprietà più forte della connessione, in quanto ci dice che i diagrammi devono essere non solo connessi, ma vieppiù connessi in modo non banale.

5.3 Grado di divergenza superficiale

Consideriamo un diagramma con N_e linee esterne, N_i linee interne e V vertici. Da ogni vertice partono 4 linee e ogni linea interna connette 2 vertici, quindi deve essere verificata la relazione seguente

$$\boxed{4V = E + 2I} . \quad (5.35)$$

Per valutare il grado di divergenza superficiale di un diagramma ci occorre il numero di integrazioni indipendenti sugli impulsi interni (cioè il numero di **loop**). Ogni linea interna può essere associata ad un valore q_i . Non tutti i q_i sono indipendenti, infatti ad ogni vertice abbiamo una funzione δ che assicura la conservazione dell'impulso al vertice. Una delle δ è semplicemente una condizione sulla conservazione dell'impulso totale e quindi il numero di integrali indipendenti è:

$$L = I - (V - 1) . \quad (5.36)$$

Poiché $I = \frac{1}{2}(4V - E)$ avremo che

$$L = \frac{1}{2}(4V - E) - V + 1 = 2V - \frac{E}{2} - V + 1 = V - \frac{E}{2} + 1 , \quad (5.37)$$

e quindi

$$\boxed{L = V - \frac{E}{2} + 1} . \quad (5.38)$$

Il grado di divergenza superficiale di un diagramma è il grado di divergenza dell'integrazione sulla regione dello spazio degli impulsi in cui gli impulsi di tutte le linee interne vanno ad infinito contemporaneamente. Quindi l'espressione per un diagramma ad L loops seguente

$$\mathcal{I}_L = \int d^4 p_1 \dots d^4 p_L \prod_{i=1}^L \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\epsilon} , \quad (5.39)$$

quando $p_i \rightarrow s p_i$ con $s \gg 1$, diverge come

$$\mathcal{I}_L \sim s^{4L-2I} = s^\delta . \quad (5.40)$$

Quindi il grado di divergenza superficiale di un diagramma a L loops è

$$\delta = 4L - 2I = 4 \left(V - \frac{E}{2} + 1 \right) + (E - 4V) = 4V - 2E + 4 + E - 4V , \quad (5.41)$$

da cui otteniamo

$$\boxed{\delta = 4 - E} . \quad (5.42)$$

Notiamo che se $\delta \geq 0$ il diagramma sarà certamente divergente. Tuttavia se $\delta < 0$ il diagramma potrebbe ancora essere divergente quando solo un sottoinsieme delle variabili

d'integrazione nello spazio degli impulsi va all'infinito (cioè quando il diagramma contiene qualche sottodiagramma divergente).

Nella teoria scalare con autointerazione $\lambda\phi^4$ il grado di divergenza superficiale di un diagramma è $\delta = 4 - E$, e questo δ non dipende dall'ordine perturbativo. Di conseguenza i soli diagrammi che divergono superficialmente sono:

- la funzione di Green a 2 punti, il cui grado di divergenza superficiale è $\delta = 2$ (divergenza quadratica);
- la funzione di Green a 4 punti, il cui grado di divergenza superficiale è $\delta = 0$ (divergenza logaritmica).

Le divergenze UV ottenute mediante la valutazione del grado di divergenza superficiale esauriscono in sostanza le divergenze possibili. Precisamente, ci sarà di sicuro qualche diagramma con $E > 4$ divergente ma la divergenza è riconducibile ad una divergenza superficiale, già individuata mediante il conteggio precedente, di un sottodiagramma. Le uniche divergenze della teoria ϕ^4 relative alle funzioni a 2 e 4 punti possono essere eliminate dal calcolo di una qualsiasi grandezza fisica, ad ogni ordine perturbativo, mediante il procedimento di **rinormalizzazione**, che sarà l'oggetto del prossimo capitolo. Ad ogni modo, possiamo subito intuire che in questo processo di rinormalizzazione è sufficiente considerare solo la rinormalizzazione dei diagrammi connessi, poiché i diagrammi non connessi sono sempre il prodotto di diagrammi connessi con un numero inferiore di punti; *ergo* basta curare le divergenze di diagrammi connessi. Ma possiamo dire ancora di più. Infatti, tra i diagrammi connessi, è sufficiente rinormalizzare solo i diagrammi connessi 1PI. Dopotutto se combiniamo sottodiagrammi 1PI per ottenere un diagramma riducibile non otterremo nuove divergenze perché i propagatori che connettono i pezzi irriducibili hanno impulsi fissati. In conclusione, nel prossimo capitolo, studieremo la rinormalizzazione della funzione a 2 punti 1PI e della funzione a 4 punti 1PI.

Capitolo 6

Rinormalizzazione

In una teoria di campo dove il numero di diagrammi divergenti è finito possiamo sempre eliminare le divergenze attraverso una ridefinizione delle costanti fisiche e una rinormalizzazione dei campi. Ciascun diagramma divergerà come Λ^δ . Se deriviamo $\delta + 1$ volte rispetto agli impulsi esterni otteniamo quindi un'espressione finita. Poiché la differenziazione $\delta + 1$ volte rende l'integrale finito segue che il contributo del diagramma può essere scritto come un polinomio di ordine δ negli impulsi esterni con coefficienti divergenti più un resto finito.

Per la funzione a N punti avremo un comportamento del tipo

$$G_N \sim \sum_{i=0}^{\delta} P^i(p) \Lambda^{\delta-i} + \bar{G}_N, \quad (6.1)$$

dove $P^i(p)$ è un polinomio nell'impulso esterno di grado i e \bar{G}_N è finito. Il punto essenziale è che i termini divergenti in G_N corrispondono precisamente a **vertici** che possono essere costruiti prendendo N potenze dei campi con i derivate così da ottenere i polinomi appropriati nell'impulso esterno e un accoppiamento che si comporta come $\Lambda^{\delta-i}$. Ad esempio $G_2(p)$ ha $\delta = 2$ e i termini divergenti sono della forma $c_2 p^2 \ln(\Lambda)$ e $c_0 \Lambda^2$. Il primo termine può essere riprodotto con un vertice del tipo $c_2 \frac{\ln(\Lambda)}{2} (\partial_\mu \phi)^2$, mentre il secondo con un vertice del tipo $c_0 \frac{\Lambda^2}{2} \phi^2$.

In generale, i vertici che corrispondono ai termini divergenti sono della stessa forma dei vertici permessi nella più generale interazione rinormalizzabile che possiamo scrivere per questi campi. In altre parole, possiamo cancellare i termini divergenti modificando i coefficienti degli accoppiamenti che appaiono nella lagrangiana originale, cioè aggiungiamo dei **controtermini**, uno per ciascuna divergenza in ciascuna ampiezza divergente superficialmente, arrangiando i coefficienti in modo da cancellare le divergenze dei diagrammi a 1-loop. Usando la 'nuova' lagrangiana rinormalizzata (che nuova non è), le ampiezza a 1-loop saranno finite. È ovvio che la cancellazione delle divergenze ultraviolette richiede necessariamente che gli **accoppiamenti nudi**

Prendendo come al solito il caso della teoria di campo scalare ϕ^4 , riscriviamo la lagrangiana originale come la somma di una lagrangiana rinormalizzata e di una parte

contenente i controtermini:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4 = \\
 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi_0^4 - \frac{1}{2} \delta m^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \delta \lambda \phi_0^4 = \\
 &= \frac{Z}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{Z}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda Z^2 \phi^4 - \frac{1}{2} Z \delta m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} Z^2 \delta \lambda \phi^4 = \\
 &= \mathcal{L}_{\text{REN}} + \mathcal{L}_{\text{CONTROT.}} ,
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

dove

$$\begin{aligned}
 \delta m^2 &= m_0^2 - m^2 , \\
 \delta \lambda &= \lambda_0 - \lambda , \\
 \phi_0 &= \sqrt{Z} \phi .
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Cosa succede all'ordine successivo? All'ordine corrispondente a 2-loop anche i diagrammi convergenti superficialmente potrebbero divergere a causa di sottodiagrammi divergenti. Ma questi ultimi sono proprio i sottodiagrammi divergenti a 1-loop, che dovrebbero essere finiti se abbiamo aggiustato attentamente i controtermini che abbiamo aggiunto prima. Quindi i diagrammi convergenti superficialmente a 2-loop dovrebbero essere finiti. Per quanto riguarda i diagrammi a 2-loop divergenti superficialmente, essi divergeranno di nuovo come Λ^δ , ma queste divergenze nasceranno solo dal diagramma come un tutto e non da alcuno dei suoi sottodiagrammi. Dunque, se di nuovo deriviamo $\delta+1$ volte rispetto agli impulsi esterni otteniamo un'espressione finita. I termini divergenti saranno di nuovo polinomi negli impulsi esterni e possono essere cancellati aggiungendo controtermini del secondo ordine negli accoppiamenti alla lagrangiana originale. In poche parole, modifichiamo di nuovo la lagrangiana originale assicurandoci che tutte le ampiezze ad albero + 1loop + 2loop siano finite. Andiamo avanti così fino a che, con un'attenta modifica dei parametri nella lagrangiana originale, possiamo rendere tutte le ampiezze finite **a tutti gli ordini in teoria delle perturbazioni**.

6.1 Teoria ϕ^4 rinormalizzata

Nella teoria di campo scalare $\lambda\phi^4$ abbiamo visto che le sole ampiezze superficialmente divergenti sono quelle a 2 e 4 punti. Dobbiamo imporre quindi delle condizioni di finitezza su queste funzioni. Possiamo imporre, ad esempio, che la funzione a 2 punti rinormalizzata $G_R(q)$ (nello spazio degli impulsi) soddisfi le condizioni seguenti

$$\begin{aligned}
 G_R^{-1}(m^2) &= 0 , \\
 \left. \frac{dG_R^{-1}}{dq^2} \right|_{q^2=m^2} &= 1
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

cioè abbia un polo in corrispondenza della **massa fisica** m con residuo 1. Ovviamente c'è grande libertà nella scelta delle condizioni di finitezza, per cui potrebbe essere più conveniente matematicamente usare condizioni 'meno fisiche'. Ad esempio, è conveniente scegliere delle condizioni di finitezza nell'origine dello spazio degli impulsi, cioè in $q^2 = 0$ invece che in $q^2 = m^2$. Da ora in poi, fino alla fine del presente capitolo, **lavoreremo nell'euclideo**.

6.1.1 Rinormalizzazione a 1 loop

La funzione a 2 punti all'ordine $O(\lambda_0)$ nell'espansione perturbativa a 1 loop della teoria è data dall'Eq. (5.1.1), la cui trasformata di Fourier nello spazio degli impulsi è

$$\left(\langle 0|\mathcal{T}[\phi_0(x)\phi_0(0)]|0\rangle_{\text{FT}}\right)^{-1} = G_\Lambda^{-1}(q^2) = q^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2}G_\Lambda(0) , \quad (6.5)$$

dove Λ è il cutoff ultravioletto sull'impulso. Riscaldando il campo con un fattore \sqrt{Z} , i.e. ponendo $\phi = \phi_0/\sqrt{Z}$, la funzione a 2 punti corrispondente viene rinormalizzata con un fattore Z , i.e.

$$G_R(q^2) = Z^{-1}G_\Lambda(q^2) = Z^{-1} \left[q^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2}G_\Lambda(0) \right]^{-1} . \quad (6.6)$$

A questo punto imponiamo le condizioni di finitezza su $G_R(q^2)$ nell'origine dello spazio degli impulsi, i.e.

$$\begin{aligned} G_R^{-1}(0) &= ZG_\Lambda^{-1}(0) = m^2 = Z \left[m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2}G_\Lambda(0) \right] , \\ \left. \frac{dG_R^{-1}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} &= Z \left. \frac{dG_\Lambda^{-1}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} = Z = 1 . \end{aligned} \quad (6.7)$$

A quest'ordine Z ed m sono quindi date da

$$\begin{aligned} Z &= 1 , \\ m^2 &= m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2}G_\Lambda(0) . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Esprimendo la funzione a 2 punti nell'Eq. (6.5) in termini delle costanti rinormalizzate otteniamo

$$G_R^{-1}(q^2) = q^2 + m^2 . \quad (6.9)$$

È importante notare che, anche se a quest'ordine m coincide con la massa della particella, in generale m non corrisponde alla massa fisica della particella, come dimostreremo nel conto a 2 loop nel paragrafo successivo.

Un'altra condizione di finitezza deve essere imposta sulla funzione a 4-punti 1PI:

$$G_R^{(4)}(q_1, q_2, q_3, q_4) = Z^{-2}G_\Lambda^{(4)}(q_1, q_2, q_3, q_4) . \quad (6.10)$$

Definiamo ora la funzione di Green a 4-punti 1PI **amputata** $\Gamma^{(4)}(q_1, q_2, q_3, q_4)$ come il rapporto

$$\Gamma^{(4)}(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{G^{(4)}(q_1, q_2, q_3, q_4)}{G(q_1)G(q_2)G(q_3)G(q_4)} . \quad (6.11)$$

e la sua versione rinormalizzata $\Gamma_R^{(4)}$ come

$$\Gamma_R^{(4)} = \frac{G_R^{(4)}}{G_R G_R G_R G_R} = \frac{Z^{-2}G_\Lambda^{(4)}}{Z^{-4}G_\Lambda G_\Lambda G_\Lambda G_\Lambda} = Z^2\Gamma_\Lambda^{(4)} . \quad (6.12)$$

A questo punto imponiamo su $\Gamma_R^{(4)}$ la condizione di finitezza seguente

$$\Gamma_R^{(4)}(0, 0, 0, 0) = Z^2\Gamma_\Lambda^{(4)}(0, 0, 0, 0) = -\lambda , \quad (6.13)$$

dove λ è la **costante di accoppiamento rinormalizzata**. Analogamente a quanto precisato nel caso della massa rinormalizzata m , anche λ non è direttamente la costante di accoppiamento fisica della teoria (sebbene sia ad essa collegata).

Il calcolo di $\Gamma_{\Lambda}^{(4)}(0, 0, 0, 0)$ è semplice e dà

$$\Gamma_{\Lambda}^{(4)}(0, 0, 0, 0) = -\lambda_0 , \quad (6.14)$$

per cui a quest'ordine la costante di accoppiamento rinormalizzata λ è uguale alla costante di accoppiamento nuda, i.e.

$$\lambda = Z^2 \lambda_0 = \lambda_0 , \quad (6.15)$$

cioè λ_0 non viene rinormalizzata ad 1 loop. Questo non è più vero nel conto a 2 loop, dove $\lambda \neq \lambda_0$, come faremo vedere fra poco. Riassumendo, le costanti della teoria rinormalizzate ad 1 loop come funzioni delle costanti nude sono date dalle seguenti espressioni

$$\begin{aligned} Z &= 1 , \\ \lambda &= \lambda_0 , \\ m^2 &= m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} G_{\Lambda}(0) , \end{aligned} \quad (6.16)$$

e le funzioni di Green rinormalizzate sono

$$\begin{aligned} G_R^{-1}(q^2) &= q^2 + m^2 , \\ \Gamma_R^{(4)} &= -\lambda . \end{aligned} \quad (6.17)$$

6.1.2 Rinormalizzazione a 2 loop

Facciamo ora il conto a 2 loop. La funzione di Green a 2-punti è data dalla somma dei seguenti diagrammi:

$$G = \text{---} + \text{---} \text{ (loop) } + \text{---} \text{ (two loops) } + \text{---} \text{ (circle) } + \text{---} \text{ (two loops) } . \quad (6.18)$$

L'ultimo diagramma nella (6.18) è riducibile e dunque non lo consideriamo. La funzione di Green a 2-punti 1PI a quest'ordine sarà quindi data da

$$G_{\Lambda}^{-1}(q^2) = q^2 + m_0^2 + \Sigma_{\Lambda}(q^2) , \quad (6.19)$$

dove $\Sigma_{\Lambda}(q^2)$ è la somma dei diagrammi 1PI e si può scrivere come

$$\Sigma_{\Lambda}(q^2) = \frac{\lambda_0}{2} G_{\Lambda}(0) + \lambda_0^2 \Pi_{\Lambda}(q^2) . \quad (6.20)$$

La funzione a 4-punti 1PI è data dalla somma dei diagrammi seguenti

$$G^{(4)} = \text{---} + \text{---} \text{ (loop) } + \text{---} \text{ (loop) } + \text{---} \text{ (loop) } . \quad (6.21)$$

Il diagramma contenente il loop vale

$$\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ \bullet \\ \nwarrow \\ 2 \end{array} = \frac{1}{2} \lambda_0^2 \left[\frac{1}{q_1^2 + m_0^2} I_\Lambda(q_1 + q_2) \frac{1}{q_2^2 + m_0^2} \frac{1}{q_3^2 + m_0^2} \frac{1}{q_4^2 + m_0^2} \right], \quad (6.22)$$

dove la quantità $I_\Lambda(q_1 + q_2)$ è data da

$$I_\Lambda(q_1 + q_2) = \begin{array}{c} k \\ \text{---} \\ \text{---} \\ q_1 + q_2 - k \end{array} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \frac{1}{(q_1 + q_2 - k)^2 + m_0^2} \sim \log \Lambda, \quad (6.23)$$

che diverge logicamente per $\Lambda \rightarrow \infty$. La funzione a 4 punti amputata $\Gamma^{(4)}$ a quest'ordine è data da

$$\Gamma_\Lambda^{(4)}(q_1, q_2, q_3, q_4) = -\lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} [I_\Lambda(q_1 + q_2) + I_\Lambda(q_1 + q_3) + I_\Lambda(q_1 + q_4)]. \quad (6.24)$$

Imponiamo ora le tre condizioni di finitezza

$$\begin{aligned} Z G_\Lambda^{-1}(0) &= Z \left[m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} G_\Lambda(0) + \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0) \right] = m^2, \\ Z \frac{dG_\Lambda^{-1}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} &= Z [1 + \lambda_0^2 \Pi'_\Lambda(0)] = 1, \\ Z^2 \left[-\lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} 3I_\Lambda(0) \right] &= -\lambda, \end{aligned} \quad (6.25)$$

da cui ricaviamo Z

$$Z = \frac{1}{1 + \lambda_0^2 \Pi'_\Lambda(0)} \sim 1 - \lambda_0^2 \Pi'_\Lambda(0) + O(\lambda_0^4), \quad (6.26)$$

e poi Z^2

$$Z^2 = [1 - \lambda_0^2 \Pi'_\Lambda(0) + O(\lambda_0^4)]^2 = 1 - 2\lambda_0^2 \Pi'_\Lambda(0) + O(\lambda_0^4). \quad (6.27)$$

Inserendo l'espressione di Z^2 appena trovata nella terza equazione (6.25) otteniamo

$$[1 - 2\lambda_0^2 \Pi'_\Lambda(0)] \left[-\lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} 3I_\Lambda(0) \right] = -\lambda_0 + \frac{3}{2} \lambda_0^2 I_\Lambda(0) + O(\lambda_0^3) = -\lambda, \quad (6.28)$$

da cui troviamo l'espressione di λ in funzione di λ_0

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{3}{2} \lambda_0^2 I_\Lambda(0) + O(\lambda_0^3). \quad (6.29)$$

Come avevamo anticipato nel paragrafo precedente, la costante di accoppiamento nuda viene rinormalizzata nel conto a 2 loop, i.e. $\lambda \neq \lambda_0$.

Calcoliamo ora la funzione a 2-punti 1PI rinormalizzata

$$\begin{aligned} G_R^{-1}(q^2) &= Z \left[q^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} G_\Lambda(0) + \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) \right] = \\ &= Z \left[q^2 + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} G_\Lambda(0) + \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0) + \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) - \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0) \right] = \\ &= Z q^2 + m^2 + Z \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) - Z \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0) = \\ &= q^2 [1 - \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0)] + m^2 + \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(q^2) - \lambda_0^2 \Pi_\Lambda(0) = \\ &= q^2 + m^2 + \lambda_0^2 [\Pi_\Lambda(q^2) - q^2 \Pi'_\Lambda(0) - \Pi_\Lambda(0)] = \\ &= q^2 + m^2 + \lambda^2 [\Pi_\Lambda(q^2) - q^2 \Pi'_\Lambda(0) - \Pi_\Lambda(0)], \end{aligned} \quad (6.30)$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che $\lambda_0^2 = \lambda^2$ a meno di termini di ordine superiore. Poiché $\Pi_\Lambda(q^2)$ diverge quadraticamente in Λ , e sviluppando in $q^2 = 0$, possiamo scrivere la seguente decomposizione

$$\Pi_\Lambda(q^2) = \Pi_\Lambda(0) + q^2 \Pi'_\Lambda(0) + \tilde{\Pi}_\Lambda(q^2) , \quad (6.31)$$

dove $\Pi_\Lambda(0)$ diverge come $\Lambda^2 \log \Lambda$; $\Pi'_\Lambda(0)$ diverge come $\log \Lambda$; mentre $\tilde{\Pi}_\Lambda(q^2)$ è finito. Di conseguenza, l'espressione fra parentesi nell'ultima riga dell'Eq. (6.30) è finita per $\Lambda \rightarrow \infty$. La massa fisica della particella a quest'ordine è data dall'espressione

$$m_{\text{phys}}^2 = m^2 + \lambda^2 [\Pi_\Lambda(q^2) - q^2 \Pi'_\Lambda(0) - \Pi_\Lambda(0)] , \quad (6.32)$$

da cui verifichiamo che $m_{\text{phys}}^2 \neq m^2$ come anticipato nel conto a 1 loop del paragrafo precedente.

La funzione a 4-punti 1PI rinormalizzata è data dalla seguente espressione

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(4)}(q_1, q_2, q_3, q_4) &= Z^2 \left\{ -\lambda_0 + \frac{\lambda_0^2}{2} [I_\Lambda(q_1 + q_2) + I_\Lambda(q_1 + q_3) + I_\Lambda(q_1 + q_4)] \right\} = \\ &= Z^2 \left\{ -\lambda_0 + \frac{3}{2} \lambda_0^2 I_\Lambda(0) + \frac{\lambda_0^2}{2} [I_\Lambda(q_1 + q_2) + I_\Lambda(q_1 + q_3) + I_\Lambda(q_1 + q_4) - 3I_\Lambda(0)] \right\} = \\ &= -\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \{ [I_\Lambda(q_1 + q_2) - I_\Lambda(0)] + [I_\Lambda(q_1 + q_3) - I_\Lambda(0)] + [I_\Lambda(q_1 + q_4) - I_\Lambda(0)] \} . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Poiché $I_\Lambda(q_1 + q_2)$ diverge logicamente come $\log \Lambda$, allora $I_\Lambda(q_1 + q_2) - I_\Lambda(0)$ è finito; analogamente $I_\Lambda(q_1 + q_3) - I_\Lambda(0)$ e $I_\Lambda(q_1 + q_4) - I_\Lambda(0)$ sono finiti.

Ricapitolando, le costanti della teoria rinormalizzate a 2 loop sono date da

$$\begin{aligned} Z &= 1 - \lambda^2 \Pi'_\Lambda(0) , \\ \lambda &= \lambda_0 - \frac{3}{2} \lambda_0^2 I_\Lambda(0) , \\ m^2 &= m_0^2 + \frac{\lambda}{2} G_\Lambda(0) - \lambda^2 \left[M^2 \Pi'_\Lambda(0) - \frac{3}{4} I_\Lambda(0) - \Pi_\Lambda(0) \right] . \end{aligned} \quad (6.34)$$

6.2 Gruppo di Rinormalizzazione

Lo scopo del gruppo di rinormalizzazione è di descrivere come cambia la dinamica del sistema quando cambiamo la scala di distanze a cui testiamo il sistema. È una caratteristica essenziale della natura il fatto che la fisica ad una data scala si disaccoppi dalla fisica ad una scala differente. Questa separazione, però, non è evidente a priori in una teoria di campo locale quantistica relativistica che descrive la fisica a tutte le scale di energia. In altri termini una teoria di campo siffatta coinvolge gradi libertà con tutti i possibili valori dell'impulso.

Come avviene il disaccoppiamento?

Una risposta (parziale) può essere data usando la teoria della rinormalizzazione. Abbiamo visto che la lagrangiana nuda \mathcal{L}_0 contiene parametri che si riferiscono a distanze arbitrariamente piccole ed è collegata, in modo complicato, alla fisica a distanze finite che è testata con esperimenti effettuati ad energie finite. Il tratto peculiare di una teoria di campo rinormalizzabile è che tutti gli effetti di alta energia possono essere assorbiti in

pochi parametri, gli accoppiamenti rinormalizzati (λ), le normalizzazione dei campi (Z), e delle masse (m).

Nel discutere la rinormalizzazione della teoria scalare con autointerazione abbiamo scelto il punto di sottrazione (cioè il punto in cui definire le funzioni di Green rinormalizzate) nell'origine dello spazio degli impulsi. Le condizioni di finitezza che abbiamo imposto alle funzioni di Green sono le seguenti

$$\boxed{\begin{aligned} ZG_{\Lambda}^{-1}(0) &= G_R^{-1}(0) = m^2 \\ Z \frac{dG_{\Lambda}^{-1}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} &= \frac{dG_R^{-1}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=0} = 1, \\ Z^2 \Gamma_{\Lambda}^4(0, 0, 0, 0) &= \Gamma_R^4(0, 0, 0, 0) = -\lambda \end{aligned}}, \quad (6.35)$$

dove m e λ non sono direttamente la massa e la costante di accoppiamento fisica della teoria, ma sono ad esse collegate. È evidente che la scelta del punto di sottrazione è del tutto arbitraria. Infatti avremmo potuto scegliere come punto di sottrazione un punto differente $q^2 = \bar{q}^2$. Ovviamente cambiando q^2 dovremmo cambiare anche m e λ per poter descrivere la stessa fisica.

La scelta del punto $q^2 = 0$ non è conveniente per una teoria a massa nulla. Infatti dovremmo imporre

$$G_R^{-1}(0) = 0, \quad (6.36)$$

il che conduce immediatamente ad una divergenza infrarossa. Conviene, invece, effettuare la sottrazione in un punto $q = \mu$ finito e fissato, ma arbitrario, nel modo seguente

$$\begin{aligned} G_R^{-1}(q^2) \Big|_{q^2=\mu^2} &= \mu^2, \\ \frac{dG_R^{-1}(q^2)}{dq^2} \Big|_{q^2=\mu^2} &= 1, \\ \Gamma_R^{(4)}(\mu) &= -\lambda, \end{aligned} \quad (6.37)$$

dove $\Gamma_R^{(4)}(\mu)$ è calcolata nel punto simmetrico

$$\begin{aligned} q_1^2 &= q_2^2 = q_3^2 = q_4^2 = \mu^2, \\ q_1 \cdot q_2 &= q_1 \cdot q_3 = q_2 \cdot q_3 = -\frac{2\mu^2}{3}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Queste condizioni sono ovviamente soddisfatte all'ordine più basso e non conducono a divergenze infrarosse.

Vorremmo capire come due teorie rinormalizzate corrispondenti a due differenti scelte del punto di sottrazione μ sono collegate l'una all'altra. Chiaramente una può essere ricostruita dall'altra attraverso l'introduzione di controtermini finiti, determinati ordine per ordine per implementare le nuove condizioni. Come nel caso della rinormalizzazione infinita, questa procedura equivale ad una ridefinizione dei parametri della teoria (nel caso di una teoria a massa nulla i parametri sono solo λ e Z). Poiché questi parametri sono uguali al valore della funzione di Green rinormalizzata in un dato punto μ , cambiare μ in μ' equivale a cambiare i parametri λ e Z che appaiono nel lato destro dell'Eq. (6.37) in λ' e Z' . Quindi possiamo scrivere

$$\Gamma_R^{(n)}(q_1, \dots, q_n; \lambda, \mu) = Z'^{n/2} \Gamma_R^{(n)}(q_1, \dots, q_n; \lambda', \mu'), \quad (6.39)$$

dove λ' e z sono funzioni di λ, μ e μ' calcolabili ordine per ordine in teoria delle perturbazioni.

6.2.1 Equazioni del gruppo di rinormalizzazione

Le funzioni di Green nude $G^{(n)}$ sono funzioni del cutoff Λ e di λ_0 , i.e.

$$G^{(n)} = G^{(n)}(\Lambda, \lambda_0) . \quad (6.40)$$

Le funzioni di Green rinormalizzate sono funzioni di μ e λ , i.e.

$$G_R^{(n)} = G_R^{(n)}(\mu, \lambda) = Z^{-n/2} G^{(n)}(\Lambda, \lambda_0) , \quad (6.41)$$

e abbiamo visto che

$$Z = Z(\lambda, \Lambda, \mu) = Z\left(\lambda, \frac{\mu}{\Lambda}\right) , \quad (6.42)$$

dove l'ultimo passaggio è una conseguenza del fatto che Z deve essere una quantità adimensionale. D'altra parte poiché la teoria è rinormalizzabile avremo che il limite

$$\lim_{\substack{\Lambda \rightarrow \infty \\ \mu, \lambda \text{ fissati}}} Z^{-n/2} G^{(n)}(\Lambda, \lambda_0) \quad (6.43)$$

esiste ed è uguale a

$$\lim_{\substack{\Lambda \rightarrow \infty \\ \mu, \lambda \text{ fissati}}} Z^{-n/2} G^{(n)}(\Lambda, \lambda_0) = G_R^{(n)}(\lambda, \mu) . \quad (6.44)$$

Di conseguenza, per $\Lambda \gg 1$, possiamo scrivere

$$G^{(n)}(\Lambda, \lambda_0) \sim Z^{n/2} \left(\lambda, \frac{\mu}{\Lambda}\right) G_R^{(n)}(\lambda, \mu) . \quad (6.45)$$

Se ora fissiamo Λ e λ_0 e prendiamo la derivata di $G^{(n)}(\Lambda, \lambda_0)$ rispetto a μ , quest'ultima deve essere identicamente nulla, i.e.

$$\mu \frac{d}{d\mu} G^{(n)}(\Lambda, \lambda_0) \Big|_{\Lambda, \lambda_0 \text{ fissati}} = 0 , \quad (6.46)$$

da cui consegue la seguente equazione differenziale per $G_R^{(n)}$:

$$\frac{n}{2} Z^{n/2-1} \mu \frac{dZ}{d\mu} \Big|_{\Lambda, \lambda_0} G_R^{(n)}(\lambda, \mu) + Z^{n/2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_R^{(n)}(\lambda, \mu) \Big|_{\Lambda, \lambda_0} + Z^{n/2} \mu \frac{\partial}{\partial \lambda} G_R^{(n)}(\lambda, \mu) \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, \lambda_0} = 0 , \quad (6.47)$$

dove abbiamo usato il fatto che quando Λ e λ_0 sono fissi, allora λ è una funzione solo di μ , i.e.

$$\lambda = \lambda(\lambda_0, \mu/\Lambda) \Big|_{\Lambda, \lambda_0} = \lambda(\mu) . \quad (6.48)$$

Dividendo per $Z^{n/2}$ otteniamo

$$\frac{n}{2} \mu \frac{d \log Z}{d\mu} \Big|_{\Lambda, \lambda_0} G_R^{(n)}(\lambda, \mu) + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_R^{(n)}(\lambda, \mu) \Big|_{\Lambda, \lambda_0} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \Big|_{\Lambda, \lambda_0} \frac{\partial G_R^{(n)}}{\partial \lambda} = 0 . \quad (6.49)$$

La grandezza $\gamma(\lambda, \Lambda/\mu)$ definita come

$$\mu \frac{d}{d\mu} \log \sqrt{Z} \Big|_{\Lambda, \lambda_0} = \gamma \left(\lambda, \frac{\Lambda}{\mu} \right), \quad (6.50)$$

è detta la **dimensione anomala del campo** ϕ ; mentre la grandezza $\beta(\lambda, \Lambda/\mu)$, definita dall'equazione seguente

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} \Big|_{\Lambda, \lambda_0} = \beta \left(\lambda, \frac{\Lambda}{\mu} \right), \quad (6.51)$$

è detta **dimensione anomala della costante di accoppiamento** λ . Con queste definizioni l'Eq. (6.49) diventa

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_R^{(n)}(\lambda, \mu) \Big|_{\Lambda, \lambda_0} + \beta \left(\lambda, \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} G_R^{(n)} + n\gamma \left(\lambda, \frac{\Lambda}{\mu} \right) G_R^{(n)}(\lambda, \mu) = 0. \quad (6.52)$$

Non ci resta che prendere $\lim \Lambda \rightarrow \infty$. Ora, il limite $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \beta(\lambda, \Lambda/\mu) = \beta(\lambda)$ esiste, così come esiste il limite $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \gamma(\lambda, \Lambda/\mu) = \gamma(\lambda)$. Infatti, se prendiamo $n = 2, 4$ possiamo impostare un sistema per ricavare β e γ in funzione di $G_R^{(2)}$ e $G_R^{(4)}$, i cui limiti per $\Lambda \rightarrow \infty$ esistono perchè la teoria è rinormalizzabile. Inoltre β e γ in questo limite non possono dipendere da μ essendo quantità adimensionali. L'equazione che otteniamo

$$\boxed{\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) \right] G_R^{(n)}(\lambda, \mu) = 0} \quad (6.53)$$

è l'**equazione del gruppo di rinormalizzazione**. L'esistenza di questa equazione implica che le funzioni di Green rinormalizzate non possono dipendere arbitrariamente da λ e μ .

6.2.2 Soluzione dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione

Per risolvere l'Eq. (6.53) poniamo

$$G_R^{(n)}(\lambda, \mu) = \exp \left[-n \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda} \frac{\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \right] \Phi_n(\lambda, \mu), \quad (6.54)$$

dove $\bar{\lambda} = \lambda(\bar{\mu})$ si riferisce ad un punto di sottrazione fissato $\bar{\mu}$. Con questa posizione, l'Eq. (6.53) diventa

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \Phi_n(\lambda, \mu) = 0. \quad (6.55)$$

Ricordando la definizione della funzione β possiamo scrivere

$$\frac{d\lambda}{\beta(\lambda)} = \frac{d\mu}{\mu}, \quad (6.56)$$

da cui integrando troviamo

$$\int_{\bar{\mu}}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu} = \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} \rightarrow \ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} = \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}. \quad (6.57)$$

È facile verificare che

$$\Phi_n(\lambda, \mu) = F_n \left(\ln \frac{\mu}{\bar{\mu}} - \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} \right) = F_n(z) , \quad (6.58)$$

è soluzione dell'equazione (6.55). Inoltre abbiamo che

$$\Phi_n(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) = F_n(0) = G_R^{(n)}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) . \quad (6.59)$$

Tenendo conto della condizione imposta dalla relazione differenziale

$$\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \beta(\lambda) , \quad (6.60)$$

vediamo che

$$\Phi_n(\mu, \lambda) \equiv \Phi_n(\bar{\mu}, \bar{\lambda}) = F_n(0) , \quad (6.61)$$

e quindi la soluzione si può scrivere come

$$\boxed{G_R^{(n)}(\mu, \lambda(\mu)) = \exp \left[-n \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda} \frac{\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \right] G_R^{(n)}(\bar{\mu}, \bar{\lambda})} . \quad (6.62)$$

Questa soluzione ci dice che le due funzioni di Green rinormalizzate $G_R^{(n)}(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ e $G_R^{(n)}(\mu, \lambda)$ differiscono per una costante in moltiplicativa finita. Possiamo vedere facilmente che la fisica non cambia se usiamo una o l'altra. A tal fine consideriamo due set di funzioni di Green:

$$\langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle , \quad c^n \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle , \quad (6.63)$$

e consideriamo altresì la matrice \mathcal{S} data da

$$\mathcal{S}_{fi} = (i)^n \int f f \dots f^* f^* \hat{K} \hat{K} \dots \hat{K} \left\langle \frac{\phi_1}{\sqrt{Z\phi}} \dots \frac{\phi_n}{\sqrt{Z\phi}} \right\rangle . \quad (6.64)$$

Abbiamo visto nel Capitolo 3 che possiamo utilizzare come campo interpolante un qualsiasi operatore che ha elementi di matrice non nulli tra vuoto e stati ad 1 particella. Ora, se

$$\left\langle 0 \left| \frac{\phi_1}{\sqrt{Z\phi}} \right| \tilde{p} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} , \quad (6.65)$$

evidentemente l'operatore $O_1 = c\phi_1$ sarà tale per cui

$$\left\langle 0 \left| \frac{O_1}{\sqrt{Z_O}} \right| \tilde{p} \right\rangle = \left\langle 0 \left| \frac{c\phi_1}{c\sqrt{Z_O}} \right| \tilde{p} \right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \neq 0 . \quad (6.66)$$

Quindi sostituendo ϕ_1 con $O_1 = c\phi_1$ e $Z\phi$ con Z_O la matrice \mathcal{S} rimane inalterata. In altre parole, la matrice \mathcal{S} (e quindi la sezione d'urto) è invariante sotto il gruppo di rinormalizzazione.

L'utilità del gruppo di rinormalizzazione risiede nella possibilità di migliorare i calcoli perturbativi. Consideriamo, ad esempio, la funzione a 4-punti $\Gamma_R^{(4)}$ ad 1 loop. A grandi q^2 il coefficiente di λ^2 contiene un logaritmo di q^2 che rovina l'accuratezza della teoria delle perturbazioni. Termini di ordine più elevato contengono un logaritmo extra per loop. Abbiamo quindi il cosiddetto **problema dei grandi logaritmi**. Possiamo tentare di eliminare i grandi logaritmi attraverso una scelta opportuna del punto di sottrazione

μ . Ovviamente un cambiamento di μ deve essere compensato da un cambiamento del valore dei parametri rinormalizzati finiti della teoria in modo da lasciare invarianti le quantità fisicamente rilevanti della teoria (sezioni d'urto, rate di decadimento, etc.). Ciò fatto, i calcoli perturbativi sono validi se non ci sono grandi logaritmi e se contemporaneamente l'accoppiamento $\lambda(\mu)$ è piccolo. Dunque spieghiamo come si fa ad implementare praticamente questo schema di calcolo. Consideriamo la nostra funzione di Green $G_R^{(n)}(q_1, \dots, q_n; \bar{\lambda}, \bar{\mu})$, che possiamo esprimere attraverso la seguente serie perturbativa

$$G_R^{(n)}(q_1, \dots, q_n; \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^n c_n(q_1, \dots, q_n; \bar{\mu}) . \quad (6.67)$$

I coefficienti c_n conteranno grandi logaritmi se q_1, \dots, q_n sono lontani dal punto di sottrazione $\bar{\mu}$. Supponiamo ad esempio che

$$q = \alpha \bar{q} \quad \text{con} \quad \alpha \gg 1 \quad \text{e} \quad \bar{p} \sim \bar{\mu} , \quad (6.68)$$

dove α è un fattore di dilatazione. Dalla soluzione dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione sappiamo che

$$G_R^{(n)}(q, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \exp \left[n \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda} \frac{\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \right] G_R^{(n)}(q, \lambda(\mu), \mu) . \quad (6.69)$$

A questo punto scegliamo il punto di sottrazione μ come

$$\mu = \alpha \bar{\mu} , \quad (6.70)$$

e, notando che la funzione di Green G_n è una funzione omogenea di grado $D_n = 4 - 3n$, cioè

$$G_R^{(n)}(q, \lambda(\mu), \mu) = \mu^{D_n} G_R^{(n)} \left(\frac{q}{\mu}, \lambda(\mu), 1 \right) , \quad (6.71)$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G_R^{(n)}(q, \lambda(\mu), \mu) &= G_R^{(n)}(\alpha \bar{q}, \lambda(\mu), \mu) = G_R^{(n)}(\alpha \bar{q}, \lambda(\alpha \bar{\mu}), \alpha \bar{\mu}) = \\ &= (\alpha \bar{\mu})^{D_n} G_R^{(n)} \left(\frac{\alpha \bar{q}}{\alpha \bar{\mu}}, \lambda(\alpha \bar{\mu}), 1 \right) = \alpha^{D_n} G_R^{(n)}(\bar{q}, \lambda(\alpha \bar{\mu}), \bar{\mu}) . \end{aligned} \quad (6.72)$$

Inserendo questo risultato nell'Eq. (6.69) otteniamo

$$G_R^{(n)}(q, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \exp \left[n \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda} \frac{\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda' \right] \alpha^{D_n} G_R^{(n)}(\bar{q}, \lambda(\alpha \bar{\mu}), \bar{\mu}) . \quad (6.73)$$

Ora $G_R^{(n)}(\bar{q}, \lambda(\alpha \bar{\mu}), \bar{\mu})$ può essere calcolato perturbativamente senza il problema dei grandi logaritmi perché $\bar{q} \sim \bar{\mu}$. Ovviamente dobbiamo controllare come varia $\lambda(\alpha \bar{\mu})$, poiché se aumenta non raggiungeremo comunque lo scopo di migliorare la teoria delle perturbazioni.

Controlliamo quindi l'andamento della costante di accoppiamento. L'equazione di evoluzione è

$$\mu \frac{d}{d\mu} \lambda(\mu) = \beta(\lambda) . \quad (6.74)$$

Ci interessa conoscere il comportamento di $\lambda(\alpha \bar{\mu})$ nel limite $\alpha \rightarrow \infty$ (o equivalentemente $\mu \rightarrow \infty$). Se $\beta(\lambda) > 0$, la teoria delle perturbazioni non funziona nell'ultravioletto perché

Tabella 6.1

| | | |
|-----------------------------|-------------|--|
| $\alpha \rightarrow \infty$ | $\beta > 0$ | Non vale la teoria delle perturbazioni nell'UV |
| $\lambda \rightarrow 0$ | $\beta > 0$ | Vale la teoria delle perturbazioni nell'IR |
| $\alpha \rightarrow \infty$ | $\beta < 0$ | Vale la teoria delle perturbazioni nell'UV |
| $\lambda \rightarrow 0$ | $\beta < 0$ | Non vale la teoria delle perturbazioni nell'IR |
| | $\beta = 0$ | La teoria è libera |

$\lambda(\mu)$ cresce quando μ cresce. D'altra parte, se $\beta(\lambda) > 0$, la teoria delle perturbazioni funziona nell'infrarosso, cioè quando $\alpha \rightarrow 0$ (o $\mu \rightarrow 0$), perché $\lambda(\mu)$ diminuisce quando μ decresce. Riassumendo, gli scenari possibili sono quelli elencati nella Tabella 6.1.

Calcoliamo la funzione $\beta(\lambda)$ che compare nell'Eq. (6.74) in teoria delle perturbazioni nel caso di una teoria di campo scalare con interazione $\lambda\phi^4$. Ricordiamo che

$$\lambda = \lambda \left(\lambda_0, \frac{\Lambda}{\mu} \right), \quad (6.75)$$

ed il limite $\Lambda \rightarrow \infty$ esiste a λ fissato (per tenere λ fisso dobbiamo aggiustare λ_0). Nella teoria $\lambda\phi^4$ abbiamo visto che

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{3}{2}\lambda_0^2 I_\Lambda(0), \quad (6.76)$$

dove $I_\Lambda(0)$ (stiamo considerando ancora il caso di una teoria a massa nulla) è dato da

$$I_\Lambda(0) = \begin{array}{c} k \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ -k \end{array} = \int^\Lambda \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2}, \quad (6.77)$$

quindi, se prendiamo $\mu = 0$ come punto di sottrazione abbiamo la divergenza IR. Prendiamo allora $\mu \neq 0$ e calcoliamo $I_\Lambda(\mu)$:

$$\begin{aligned} I_\Lambda(\mu) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(\mu - k)^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(\mu - k)^2 x + (1 - x)k^2]^2} = \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 + \mu^2 x(1 - x)]^2} = \int_0^1 dx \int_0^\Lambda \frac{\ell^3 d\ell}{(2\pi)^4} \Omega_4 \frac{1}{[\ell^2 + \mu^2 x(1 - x)]^2} = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda/\mu} \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{y^3 dy}{[y^2 + x(1 - x)]^2} = I_\Lambda \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right), \end{aligned} \quad (6.78)$$

dove abbiamo fatto un primo cambio di variabili ponendo $\ell = k - \mu x$; e poi un secondo cambio di variabili sostituendo $\frac{\ell}{\mu} = y$. L'Eq. (6.78) ci dice che I_Λ è una funzione solo di $\frac{\mu}{\Lambda}$, i.e.

$$I_\Lambda \equiv I_\Lambda \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right). \quad (6.79)$$

Usando il seguente risultato

$$\int_0^{\Lambda/\mu} \frac{y^3}{[y^2 + \alpha]^2} = \frac{1}{2} \left[\log(y^2 + \alpha) - \frac{y^2}{y^2 + \alpha} \right]_0^{\Lambda/\mu} = \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{\Lambda^2/\mu^2 + \alpha}{\alpha} \right) - \frac{(\Lambda/\mu)^2}{(\Lambda/\mu)^2 + \alpha} \right], \quad (6.80)$$

possiamo svolgere l'integrale in dy che compare nell'Eq. (6.78) ottenendo così

$$\begin{aligned}
 I_\Lambda \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) &= \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\log \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2 x(1-x)} + 1 \right) - \frac{1}{1+x(1-x)\mu^2/\Lambda^2} \right] = \\
 &= \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\log \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \log \left[\frac{1}{x(1-x)} + \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right] - \frac{1}{1+x(1-x)\mu^2/\Lambda^2} \right] = \\
 &= \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \left(\log \frac{\Lambda}{\mu} + \text{parte finita} \right) = \frac{1}{8\pi^2} \log \frac{\Lambda}{\mu} + \text{parte finita} ,
 \end{aligned} \tag{6.81}$$

avendo usato $\Omega_4 = 2\pi^2$. Inserendo l'espressione di I_Λ appena trovata nell'Eq. (6.76) otteniamo

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{3}{16\pi^2} \lambda_0^2 \left(\log \frac{\Lambda}{\mu} + \text{parte finita} \right) , \tag{6.82}$$

da cui ricaviamo la funzione $\beta(\lambda)$ come

$$\boxed{\beta(\lambda) = \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \Big|_{\Lambda, \lambda_0} = \frac{3}{16\pi^2} \lambda_0^2 = \frac{3}{16\pi^2} \lambda^2 > 0 + O(\lambda^3) > 0} , \tag{6.83}$$

che è quindi positiva. Il segno della β -function è fissato, in generale, dal 1° ordine della teoria delle perturbazioni. Dalla discussione precedente, poiché $\beta(\lambda) > 0$, la teoria delle perturbazioni è sotto controllo nell'IR (e quindi è sotto controllo lo spettro di massa), ma non nell'UV. Infatti avremo

$$\begin{aligned}
 \beta(\lambda) &= \beta_0 \lambda^2 + O(\lambda^3) \quad \text{con} \quad \beta_0 = \frac{3}{16\pi^2} , \\
 \rightarrow \log \frac{\mu}{\bar{\mu}} &= \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda(\mu)} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} = - \frac{1}{\beta_0 \lambda'} \Big|_{\bar{\lambda}}^{\lambda} = \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \right) , \\
 \rightarrow \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{\bar{\lambda}} - \beta_0 \log \frac{\mu}{\bar{\mu}} , \\
 \rightarrow \lambda(\mu) &= \frac{\bar{\lambda}}{1 - \beta_0 \bar{\lambda} \log \frac{\mu}{\bar{\mu}}} ,
 \end{aligned} \tag{6.84}$$

e quindi se μ cresce λ cresce, e se μ diminuisce λ decresce. Riespandendo l'espressione di $\lambda(\mu)$ otteniamo

$$\lambda(\mu) = \bar{\lambda} \left(1 + \beta_0 \bar{\lambda} \log \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \dots \right) = \bar{\lambda} + \beta_0 \bar{\lambda}^2 \log \frac{\mu}{\bar{\mu}} + \dots \tag{6.85}$$

Questa relazione può essere ottenuta anche in teoria delle perturbazioni dall'equazione $\lambda = \lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu)$ eliminando λ_0 e μ a favore di $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$. Nel conto otterremmo però anche altri termini, ad esempio un termine del tipo $\bar{\lambda}^3 \log \mu/\bar{\mu}$. Quindi la relazione (6.85) precedente è solo una somma ai **logaritmi dominanti**. Ai Log dominanti possiamo anche scrivere

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 + \beta_0 \lambda_0 \log \frac{\Lambda}{\mu}} \sim \lambda_0 \left(1 - \beta_0 \lambda_0 \log \frac{\Lambda}{\mu} + \dots \right) , \tag{6.86}$$

il cui grafico è mostrato in Figura 6.1. Se cambiamo il cut-off Λ otteniamo un'altra curva, come mostrato nella stessa Figura. Il limite $\Lambda \rightarrow \infty$ deve essere effettuato a λ fissato. Se

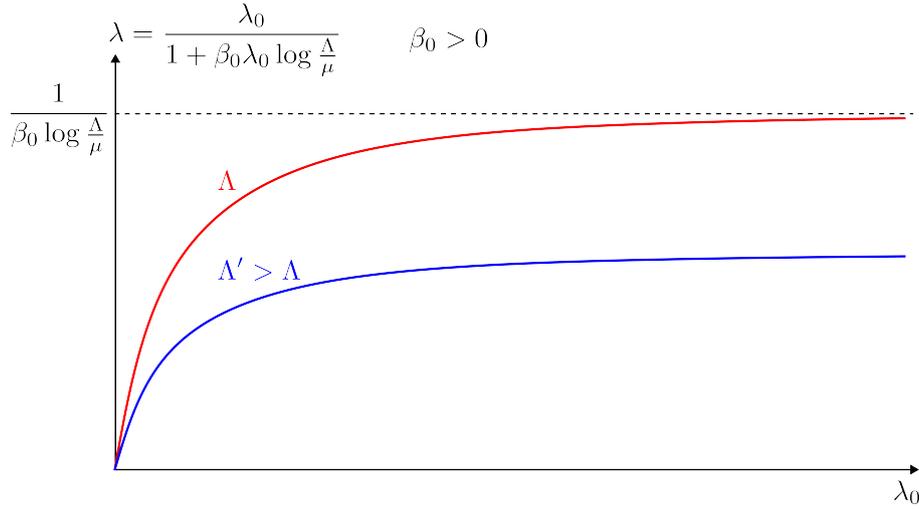


Figura 6.1: Caso $\beta_0 > 0$. Asintoto orizzontale.

λ ha un asintoto orizzontale avremo l'andamento in Figura 6.1. Se, fissando λ , non esiste il limite $\Lambda \rightarrow \infty$, allora **la teoria non può essere universale**, ma vale solo in un certo intervallo di energia al di sotto del cut-off.

Vediamo che succede nel caso in cui $\beta_0 < 0$. In questo caso λ è data da

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 - |\beta_0| \lambda_0 \log \frac{\Lambda}{\mu}}, \tag{6.87}$$

il cui grafico è mostrato in Figura 6.2. Se fissiamo λ , il limite $\Lambda \rightarrow \infty$, in questo caso,

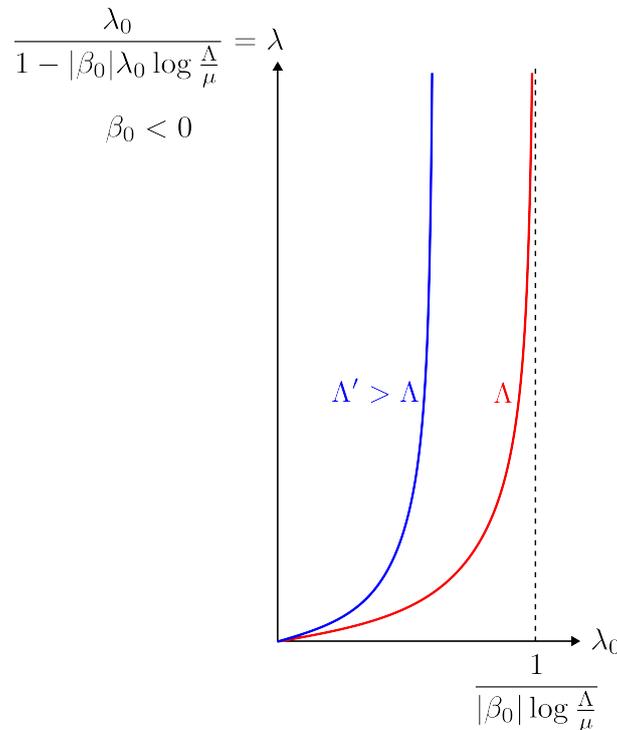


Figura 6.2: Caso $\beta_0 < 0$. Asintoto verticale: libertà asintotica UV

può esistere e la teoria è detta **asintoticamente libera nell'UV**.

6.2.3 Libertà asintotica nell'infrarosso

Discutiamo ora la libertà asintotica nell'IR. Consideriamo la funzione di Green a 2-punti euclidea con $x_0 > 0$

$$\langle 0|O(x)O(0)|0\rangle = \sum_n \langle 0|O(0, \vec{x})|n\rangle \langle n|O(0)|0\rangle e^{-E_n x^0} \xrightarrow{x^0 \rightarrow \infty} \langle 0|O(0, \vec{x})|p\rangle \langle p|O(0)|0\rangle e^{-m x^0}, \quad (6.88)$$

dove m è la massa a riposo dello stato di singola particella. Dall'Eq. (6.88) deduciamo che, se aspettiamo un tempo abbastanza lungo, possiamo conoscere lo spettro di massa della teoria misurando la funzione di Green a 2-punti.

Consideriamo ora la funzione di **Green a 2-punti rinormalizzata** nello spazio delle posizioni x :

$$G_2^R(\bar{x}; \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}^n c_n(\bar{x}, \bar{\mu}). \quad (6.89)$$

Dall'equazione del gruppo di rinormalizzazione sappiamo che

$$G_2(\bar{x}; \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = e^{2 \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda(\mu)} \frac{\gamma(\lambda')}{\beta(\lambda')} d\lambda'} G_2(\bar{x}; \lambda(\mu), \mu). \quad (6.90)$$

Studiamo cosa accade quando

$$\begin{aligned} \bar{x} &\rightarrow \alpha \bar{x}, \\ \bar{\mu} &\rightarrow \frac{\bar{\mu}}{\alpha}, \\ \alpha &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Dalla semplice analisi dimensionale ricaviamo che

$$G_2(x; \lambda(\mu), \mu) = \mu^{D_2} G(\mu x; \lambda(\mu), 1), \quad (6.92)$$

con $D_2 = -(4 - 3 \cdot 2) = 2$. Avremo quindi che

$$G_2(x; \lambda(\mu), \mu) = \mu^2 G(\mu x; \lambda(\mu), 1) = \frac{\bar{\mu}^2}{\alpha^2} G(\bar{\mu} \bar{x}; \lambda_\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha^2} G(\bar{x}; \lambda_\alpha, \bar{\mu}), \quad (6.93)$$

dove $\lambda_\alpha = \lambda(\mu = \bar{\mu}/\alpha) = \lambda\left(\frac{\bar{\mu}}{\alpha}\right)$, da cui ricaviamo che

$$G_2(x = \alpha \bar{x}; \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = e^{2 \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda_\alpha} \frac{\gamma}{\beta} d\lambda'} G_2(x = \alpha \bar{x}; \lambda(\mu), \mu) = e^{2 \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda_\alpha} \frac{\gamma}{\beta} d\lambda'} \frac{1}{\alpha^2} G_2(\bar{x}; \lambda_\alpha, \bar{\mu}), \quad (6.94)$$

da cui segue che

$$\boxed{G_2(\alpha \bar{x}; \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = \frac{1}{\alpha^2} \exp\left(2 \int_{\bar{\lambda}}^{\lambda_\alpha} \frac{\gamma}{\beta} d\lambda'\right) G_2(\bar{x}; \lambda_\alpha, \bar{\mu})}. \quad (6.95)$$

Per essere valida la teoria delle perturbazioni λ_α deve soddisfare la condizione al limite seguente

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda_\alpha = 0, \quad (6.96)$$

ovverosia

$$\lambda_\alpha = \lambda\left(\frac{\bar{\mu}}{\alpha}\right) \rightarrow \lambda(0) = 0, \quad (6.97)$$

cioè la teoria deve essere **asintoticamente libera nell'IR**

Capitolo 7

Funzionale generatore fermionico

In questo capitolo ricaviamo e discutiamo il funzionale generatore per una teoria di campo fermionica e una teoria di campo scalare accoppiate, che funge da modello, ad esempio, per un sistema di pioni e nucleoni interagenti.

7.1 Integrali gaussiani grassmaniani

Introduciamo il concetto di variabili di Grassmann e algebra di Grassmann. Un'algebra di Grassmann (su un campo \mathbb{F} , per esempio \mathbb{C}) è un'algebra associativa generata dall'elemento unità (1) e da un insieme di generatori c_i (dette variabili di Grassmann) che soddisfano le seguenti regole di anticommutazione:

$$c_i c_j = -c_j c_i . \quad (7.1)$$

In particolare avremo che $c_i^2 = 0$, e analogamente per le potenze di ordine più elevato. Di conseguenza, una funzione $F(c_1, \dots, c_n)$ considerata come funzione della variabile c_i può sempre essere scritta nella forma generale

$$F = F_1 + c_i F_2 , \quad (7.2)$$

dove F_1 e F_2 non dipendono da c_i . La derivata di F è definita come

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = F_2 . \quad (7.3)$$

L'integrazione sulle variabili di Grassmann è uguale alla differenziazione, per cui avremo che

$$\int dc_i F \equiv \frac{\partial F}{\partial c_i} = F_2 . \quad (7.4)$$

Nel caso di un integrale in molte variabili, il risultato è semplicemente il coefficiente del prodotto $c_n \dots c_1$ nell'espansione dell'integrando. Ad esempio, consideriamo il seguente integrale

$$\int dc_1 dc_2 e^{-c_i A_{ij} c_j} , \quad (7.5)$$

dove è sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti. L'integrando può essere espanso come

$$e^{-c_i A_{ij} c_j} = 1 - c_i A_{ij} c_j = 1 - A_{12} c_1 c_2 - A_{21} c_2 c_1 = 1 + (A_{12} - A_{21}) c_2 c_1 , \quad (7.6)$$

per cui l'integrale vale

$$\int dc_1 dc_2 e^{-c_i A_{ij} c_j} = A_{12} - A_{21} . \quad (7.7)$$

Se A è simmetrica l'integrale è identicamente nullo. Quindi possiamo prendere A anti-simmetrica, nel qual caso avremo che

$$\int dc_1 dc_2 e^{-c_i A_{ij} c_j} = 2A_{12} = 2\sqrt{\det A} . \quad (7.8)$$

Consideriamo ora un'algebra di Grassmann generata da due insiemi di variabili di Grassmann coniugate c_i e \bar{c}_i . Analogamente al caso di un solo tipo di variabili, il risultato dell'integrazione su due tipi di variabili è semplicemente il coefficiente del prodotto $\bar{c}_n c_n \dots \bar{c}_1 c_1$ nell'espansione dell'integrando. Nel caso più semplice avremo

$$\int dcd\bar{c} e^{-a\bar{c}c} = \int dcd\bar{c}(1 - a\bar{c}c) = -a . \quad (7.9)$$

Nel caso di due variabili otteniamo

$$\begin{aligned} \int dc_i d\bar{c}_i e^{-\bar{c}_i A_{ij} c_j} &= - \int dc_i d\bar{c}_i \bar{c}_i A_{ij} c_j + \frac{1}{2} \int dc_i d\bar{c}_i (\bar{c}_i A_{ij} c_j)^2 = \\ &= - \int dc_1 d\bar{c}_1 dc_2 d\bar{c}_2 \left[(\bar{c}_1 A_{11} c_1 + \bar{c}_1 A_{12} c_2 + \bar{c}_2 A_{21} c_1 + \bar{c}_2 A_{22} c_2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\bar{c}_1 A_{11} c_1 + \bar{c}_1 A_{12} c_2 + \bar{c}_2 A_{21} c_1 + \bar{c}_2 A_{22} c_2) (\bar{c}_1 A_{11} c_1 + \bar{c}_1 A_{12} c_2 + \bar{c}_2 A_{21} c_1 + \bar{c}_2 A_{22} c_2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int dc_1 d\bar{c}_1 dc_2 d\bar{c}_2 (\bar{c}_1 A_{11} c_1 \bar{c}_2 A_{22} c_2 + \bar{c}_1 A_{12} c_2 \bar{c}_2 A_{21} c_1 + \bar{c}_2 A_{21} c_1 \bar{c}_1 A_{12} c_2 + \bar{c}_2 A_{22} c_2 \bar{c}_1 A_{11} c_1) = \\ &= \frac{1}{2} (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} - A_{21} A_{12} + A_{11} A_{22}) = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = \det A . \end{aligned} \quad (7.10)$$

Generalizzando al caso di molte variabili otteniamo la formula seguente

$$\boxed{\int \prod_i dc_i d\bar{c}_i e^{-\bar{c}_i A_{ij} c_j} = \det A} . \quad (7.11)$$

7.2 Lagrangiana di pioni e nucleoni interagenti

La lagrangiana di un **sistema di pioni e nucleoni** interagenti è data da

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu_0^2}{2} \phi^2 + \bar{\psi} (i \partial_\mu \gamma^\mu - m_0) \psi + i g_0 \bar{\psi} \gamma^5 \psi \phi - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4} . \quad (7.12)$$

Il funzionale generatore minkowskiano è dato da

$$Z(J, \eta, \bar{\eta}) = \left\langle 0 \left| \mathcal{T} \exp \left[i \int J \phi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right] \right| 0 \right\rangle . \quad (7.13)$$

Ponendo $J = 0$, cioè considerando solo le sorgenti fermioniche, avremo

$$\begin{aligned} Z(0, \eta, \bar{\eta}) &= 1 + \frac{1}{2!} (i)^2 \langle 0 | \mathcal{T} \int (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) d^4 x \int (\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) d^4 y | 0 \rangle + \dots \\ &= 1 + (i)^2 \langle 0 | \mathcal{T} \int \bar{\eta}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \eta(y) d^4 x d^4 y | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (7.14)$$

Dal funzionale generatore otteniamo le funzioni di Green al solito modo, cioè calcolando le derivate funzionali. Ad esempio, la funzione di Green a 2-punti è data da

$$(-i)^2 \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\eta}_j(x_2) \delta \eta_i(x_1)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = -\langle 0 | \mathcal{T} [\psi_j(x_2) \bar{\psi}_i(x_1)] | 0 \rangle . \quad (7.15)$$

Passiamo all'eulideo. Le prescrizioni per la continuazione analitica sono

$$\begin{aligned} x_0 &= -ix_4 , \\ p_0 &= ip_4 . \end{aligned} \quad (7.16)$$

Avremo quindi

$$\begin{aligned} \exp \left[i \int d^4 x \bar{\psi} (i \not{\partial} - m_0) \psi \right] &= \exp \left[i \int -i d^4 x_E \bar{\psi} \left(i \frac{\partial}{-i \partial x_4} \gamma^0 - i \vec{\partial} \cdot \vec{\gamma} - m_0 \right) \psi \right] = \\ &= \exp \left[\int d^4 x_E \bar{\psi} \left((i \gamma^0) i \frac{\partial}{\partial x_4} - i \vec{\partial} \cdot \vec{\gamma} - m_0 \right) \psi \right] = \\ &= \exp \left[\int d^4 x_E \bar{\psi} (i \not{\partial} - m_0) \psi \right] , \end{aligned} \quad (7.17)$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_0^E &= i \gamma^0 , \\ (\gamma_0^E)^\dagger &= -\gamma_0^E , \\ \not{\partial} &= \gamma_0^E \partial_0 + \gamma^i \partial_i . \end{aligned} \quad (7.18)$$

Il funzionale generatore euclideo è dato dalla seguente espressione

$$Z_E(J, \eta, \bar{\eta}) = \int \delta \phi \delta \bar{\psi} \delta \psi \exp \left[-S_E(\phi, \psi, \bar{\psi}) + \int J \phi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \, d^4 x_E \right] , \quad (7.19)$$

dove

$$S_E = \int d^4 x_E \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\mu_0^2}{2} \phi^2 + \bar{\psi} (i \not{\partial}_E - m_0) \psi - g_0 \bar{\psi} \gamma^5 \psi \phi + \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 . \quad (7.20)$$

In $\bar{\psi} \psi$ l'integrale è gaussiano e possiamo scriverlo come

$$\int \delta \psi \delta \bar{\psi} \exp \left[- \int \bar{\psi}(x) D(\phi) \psi(x) \, d^4 x_E + \int \bar{\psi}(x) \eta(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) \, d^4 x_E \right] = \int \delta \psi \delta \bar{\psi} e^{-\tilde{S}} , \quad (7.21)$$

dove l'operatore $D(\phi)$ è dato da

$$D(\phi) = i \not{\partial}_E - m_0 - g_0 \gamma^5 \phi , \quad (7.22)$$

e \tilde{S} è definita come

$$\tilde{S} = \int d^4 x_E \bar{\psi}(x) D(\phi) \psi(x) - \bar{\psi} \eta - \bar{\eta} \psi . \quad (7.23)$$

Per risolvere l'integrale calcoliamo prima le derivate

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \bar{\psi}} &= D(\phi) \psi - \eta = (i \not{\partial}_E - m_0 - g_0 \gamma^5 \phi) \psi - \eta = 0 , \\ \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \psi} &= -\bar{\psi} \overleftarrow{D}(\phi) - \bar{\eta} = -\bar{\psi} (i \not{\partial}_E + m_0 + g_0 \gamma^5 \phi) - \bar{\eta} = 0 . \end{aligned} \quad (7.24)$$

Chiamiamo $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\bar{\psi}}$ le soluzioni del sistema (7.24) e facciamo il cambio di variabili seguente

$$\begin{aligned}\psi &= \tilde{\psi} + \chi, \\ \bar{\psi} &= \tilde{\bar{\psi}} + \bar{\chi},\end{aligned}\tag{7.25}$$

cosicché l'integrale (7.21) diventa

$$\begin{aligned}& \int \delta\chi\delta\bar{\chi} \exp \left[- \int (\tilde{\bar{\psi}} + \bar{\chi})D(\phi)(\tilde{\psi} + \chi) d^4x_E + \int (\tilde{\bar{\psi}} + \bar{\chi})\eta + \bar{\eta}(\tilde{\psi} + \chi) d^4x_E \right] = \\ &= \int \delta\chi\delta\bar{\chi} \exp \left[- \int d^4x_E \tilde{\bar{\psi}}D(\phi)\tilde{\psi} + \tilde{\bar{\psi}}D(\phi)\chi + \bar{\chi}D(\phi)\tilde{\psi} + \bar{\chi}D(\phi)\chi - \tilde{\bar{\psi}}\eta - \bar{\chi}\eta - \bar{\eta}\tilde{\psi} - \bar{\eta}\chi \right] = \\ &= \int \delta\chi\delta\bar{\chi} \exp \left[- \int d^4x_E \tilde{\bar{\psi}}D(\phi)\chi + \bar{\chi}D(\phi)\chi - \bar{\eta}\tilde{\psi} - \bar{\eta}\chi \right].\end{aligned}\tag{7.26}$$

Notando che

$$\begin{aligned}\int \tilde{\bar{\psi}}D(\phi)\chi - \bar{\eta}\chi &= \int \tilde{\bar{\psi}}(\not{\partial} - m_0 - g_0\phi\gamma^5)\chi - \bar{\eta}\chi = - \int \tilde{\bar{\psi}}(\not{\partial} + m_0 + g_0\phi\gamma^5)\chi + \bar{\eta}\chi = \\ &= - \int \tilde{\bar{\psi}}\overleftarrow{D}(\phi)\chi + \bar{\eta}\chi = 0,\end{aligned}\tag{7.27}$$

l'integrale (7.26) si riduce a

$$\int \delta\chi\delta\bar{\chi} \exp \left[- \int \bar{\chi}D(\phi)\chi - \bar{\eta}\tilde{\psi} \right].\tag{7.28}$$

A questo punto l'equazione $D(\phi)\tilde{\psi} = \eta(x)$ può essere risolta scrivendo $\tilde{\psi}(x)$ come

$$\tilde{\psi}(x) = \int d^4y_E S(x, y; \phi)\eta(y)\tag{7.29}$$

dove S soddisfa l'equazione

$$D(\phi)S(x, y; \phi) = (\not{\partial}_E - m_0 - g_0\phi\gamma^5)S(x, y; \phi) = \delta^4(x - y).\tag{7.30}$$

Quindi l'integrale (7.28) diventa

$$\left(\int \delta\chi\delta\bar{\chi} \exp \left[- \int \bar{\chi}D(\phi)\chi \right] \right) e^{\int \bar{\eta}(x)\tilde{\psi}(x)} = \det[D(\phi)] \exp \left[\int d^4x_E d^4y_E \bar{\eta}(x)S(x, y; \phi)\eta(y) \right].\tag{7.31}$$

Ricapitolando, dopo aver eseguito l'integrale gaussiano fermionico il funzionale generatore euclideo (7.19) prende la forma seguente

$$Z_E(J, \eta, \bar{\eta}) = \int \delta\phi e^{-\int \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{\mu_0^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 + \int J\phi} \det[D(\phi)] \exp \left[\int \bar{\eta}(x)S(x, y; \phi)\eta(y) d^4x_E d^4y_E \right].\tag{7.32}$$

Se $g_0 = 0$ abbiamo che $S(x, y; \phi) = S(x - y)$, dove $S(x - y)$ soddisfa l'equazione $(\not{\partial}_E - m_0)S(x - y) = \delta^4(x - y)$. Passando alla trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned}S(x - y) &= \int \frac{d^4q_E}{(2\pi)^4} \tilde{S}(q) e^{iq(x-y)}, \\ &\rightarrow \int \frac{d^4q_E}{(2\pi)^4} (-\not{q} - m_0) \tilde{S}(q) e^{iq(x-y)} = \int \frac{d^4q_E}{(2\pi)^4} e^{iq(x-y)}, \\ &\rightarrow \tilde{S}(q) = -\frac{1}{\not{q} + m_0}.\end{aligned}\tag{7.33}$$

Sfruttando il fatto che l'anticommutatore delle matrici γ nell'euclideo vale $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$ avremo che

$$\not{q}^2 = q_\mu q_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = q_\mu q_\nu [\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \gamma^\mu \gamma^\nu] = q_\mu q_\nu [-2\delta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu] = -2q_E^2 - \not{q}^2, \quad (7.34)$$

e quindi

$$\not{q}^2 = -q_E^2. \quad (7.35)$$

Usando quest'ultimo risultato possiamo infine riscrivere $\tilde{S}(q)$ come

$$\tilde{S}(q) = -\frac{1}{\not{q} + m_0} = -\frac{\not{q} - m_0}{\not{q}^2 - m_0^2} = -\frac{\not{q} - m_0}{-q_E^2 - m_0^2} = \frac{\not{q} - m_0}{q_E^2 + m_0^2}. \quad (7.36)$$

Torniamo ora al caso $g_0 \neq 0$. Dal funzionale generatore calcoliamo la funzione di Green euclidea

$$\begin{aligned} G_{ij}(x, y) &= \langle 0 | \mathcal{T}[\psi_i(x) \bar{\psi}_j(y)] | 0 \rangle = -\frac{\delta^2 Z[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\eta}_i(x) \delta \eta_j(y)} \Big|_{\eta = \bar{\eta} = 0} = \\ &= \int \delta\phi e^{-\mathcal{S}_0(\phi) - \frac{\lambda_0}{4!} \int \phi^4 + \int J\phi} S_{ij}(x, y; \phi) \det[D(\phi)], \end{aligned} \quad (7.37)$$

dove abbiamo definito per semplicità l'azione imperturbata $\mathcal{S}_0(\phi)$ come

$$\mathcal{S}_0(\phi) = \int \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{\mu_0^2}{2} \phi^2. \quad (7.38)$$

Nell'equazione (7.37) non conosciamo né $S_{ij}(x, y; \phi)$, né $\det[D(\phi)]$. Sviluppamo perturbativamente S in potenze dell'accoppiamento g_0 . All'ordine più basso, cioè per $g_0 = 0$ sappiamo già che $S = S_0(x - y)$.

Per scrivere lo sviluppo perturbativo di S torniamo all'equazione differenziale:

$$(i\not{\partial} - m_0 - g_0 \phi \gamma^5) S(x, y; \phi) = \delta^4(x - y), \quad (7.39)$$

che possiamo scrivere come

$$(i\not{\partial} - m_0) S(x, y; \phi) = \delta^4(x - y) + g_0 \phi \gamma^5 S(x, y; \phi). \quad (7.40)$$

Quest'ultima equazione differenziale può essere trasformata nella seguente equazione integrale:

$$\boxed{S(x, y; \phi) = S_0(x - y) + g_0 \int dz S_0(x - z) \gamma_5 \phi(z) S(z, y; \phi)}. \quad (7.41)$$

Infatti, applicando $(i\not{\partial}_x - m_0)$ troviamo

$$\begin{aligned} (i\not{\partial}_x - m_0) S(x, y; \phi) &= \delta^4(x - y) + g_0 \int dz \delta^4(x - z) \gamma_5 \phi(z) S(z, y; \phi) = \\ &= \delta^4(x - y) + g_0 \gamma_5 \phi(x) S(x, y; \phi), \end{aligned} \quad (7.42)$$

cioè l'equazione precedente. A questo punto possiamo procedere perturbativamente. All'ordine g_0 avremo:

$$\begin{aligned} S(x, y; \phi) &= S_0(x - y) + g_0 \int dz S_0(x - z) \gamma_5 \phi(z) S_0(z - y) + O(g_0^2) = \\ &= x \text{ --- } y + g_0 \int dz \begin{array}{c} \gamma^5 \phi \\ \left. \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\} z \\ x \qquad \qquad y \end{array} + O(g_0^2). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Al secondo ordine avremo:

$$S(x, y; \phi) = x \text{ --- } y + g_0 \int dz \begin{array}{c} \gamma^5 \phi \\ \text{wavy line} \\ x \text{ --- } z \text{ --- } y \end{array} + g_0^2 \int dz_1 dz_2 \begin{array}{c} \gamma^5 \phi \quad \gamma^5 \phi \\ \text{wavy line} \quad \text{wavy line} \\ x \text{ --- } z_1 \text{ --- } z_2 \text{ --- } y \end{array} + O(g_0^3) \quad (7.44)$$

Quindi

$$\langle \psi_i(x) \bar{\psi}_j(y) \rangle = \int \delta\phi e^{-S_0(\phi) - \frac{\lambda_0}{4!} \int \phi^4 + \int J\phi} \left(\text{---} + \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{wavy line} \quad \text{wavy line} \\ \text{---} \end{array} + \dots \right) \det[D(\phi)] . \quad (7.45)$$

Ora dobbiamo capire quale contributo dà il termine $\det[D(\phi)]$. Per prima cosa, trasformiamo l'operatore differenziale $(i\cancel{\partial} - m_0 - g_0\phi\gamma^5)$ in un operatore integrale $K(x, y)$

$$K(x, y) = (i\cancel{\partial}_x - m_0 - g_0\phi_x\gamma^5)\delta^4(x - y) , \quad (7.46)$$

che soddisfa

$$\int dy K(x, y)\psi(y) = D(\phi)\psi(x) . \quad (7.47)$$

A questo punto notiamo che possiamo riscrivere $K(x, y)$ come

$$K(x, y) = (i\cancel{\partial}_x - m_0)\{\delta^4(x - y) - g_0S_0(x - y)\gamma^5\phi(y) , \quad (7.48)$$

e poi ne prendiamo il det, ottenendo così

$$\det K = \det(i\cancel{\partial} - m_0) \det\{\delta^4(x - y) - g_0S_0(x - y)\gamma^5\phi(y)\} . \quad (7.49)$$

Il termine $\det(i\cancel{\partial} - m_0)$ si semplifica quando dividiamo il funzionale generatore per $Z[0]$. Valutiamo quindi il termine $\det\{\delta^4(x - y) - g_0S_0(x - y)\gamma^5\phi(y)\}$. Ponendo $B = S_0(x - y)\gamma^5\phi(y)$, e usando l'identità $\det A = e^{\text{tr} \log A}$, otteniamo

$$\det(I - g_0B) = \exp[\text{tr} \log(I - g_0B)] = \exp\left(-\text{tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0^n}{n} B^n\right) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0^n}{n} \text{tr} B^n\right) , \quad (7.50)$$

e quindi

$$\det(I - g_0B) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0^n}{n} (-)\text{tr}(B^n)\right] . \quad (7.51)$$

Ora

$$B_{ij} = [S_0(x-y)\gamma^5]_{ij}\phi(y) = x \text{ --- } y \left. \vphantom{S_0} \right\} \gamma^5 \phi$$

$$B^2 = (B_{ij})^2 = B_{ik}B_{kj} = \int [S_0(x-y)\gamma^5]_{ik}[S_0(y-z)\gamma^5]_{kj}\phi(y)\phi(z) dy = \int dy x \text{ --- } y \left. \vphantom{S_0} \right\} \gamma^5 \phi \text{ --- } z' \left. \vphantom{S_0} \right\} \gamma^5 \phi$$

$$\rightarrow \text{tr}(B^n) = \int dx_1 \dots dx_n \text{ (diagram of a square with wavy lines on all four sides labeled } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ and an ellipsis)} = \text{(diagram of a circle with wavy lines around its perimeter)}$$

$$\rightarrow \det(I - g_0 B) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0^n}{n} (-) \text{ (diagram of a circle with wavy lines around its perimeter)} \right] = \det[D(\phi)] .$$

(7.52)

Possiamo riassumere il risultato appena trovato dicendo che:

1. prendendo il logaritmo del $\det[D(\phi)]$ nell'Eq. (7.52) otteniamo tutti i diagrammi a 1-loop;
2. per quanto riguarda il $\det[D(\phi)]$, che è la quantità che ci interessa (e non il suo logaritmo), osserviamo che espandendo l'esponenziale nell'Eq. (7.52) ottiamo tutti i diagrammi con un numero arbitrario di loop.

Capitolo 8

Teorie di gauge

8.1 Integrazione sul gruppo

Consideriamo un gruppo continuo G , ad esempio $SU(N)$ con la parametrizzazione esponenziale $e^{i\alpha_a t_a}$, dove t_a sono i **generatori del gruppo**. Questo gruppo può essere pensato come una varietà differenziabile, almeno nell'intorno dell'identità, e i parametri α_a come coordinate sulla varietà. Matematicamente, questo vuol dire che esiste una funzione $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow G$ che assegna ad ogni n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ un elemento del gruppo $g \in G$, i.e.

$$\phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g, \quad (8.1)$$

come mostrato in Figura 8.1.

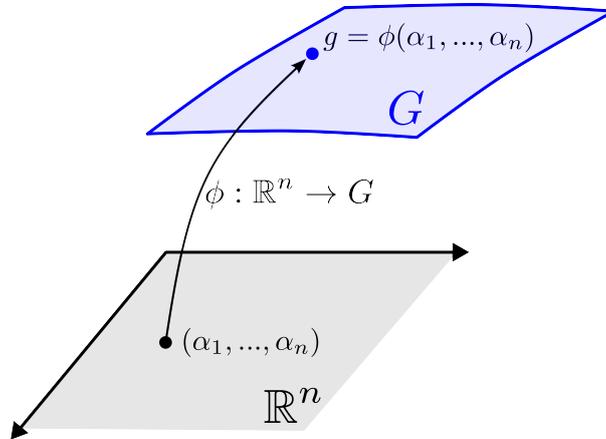


Figura 8.1: La funzione $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow G$ assegna ad ogni punto $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dello spazio reale \mathbb{R}^n un elemento $g = \phi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ del gruppo G .

Si definisce **carta** la coppia (ϕ, U) , dove ϕ è la mappa definita nell'Eq. (8.1) e U è un intorno di \mathbb{R}^n tale che $\phi(U) \in G$. Due carte (ϕ, U) e (ψ, V) si dicono **compatibili** se $\phi(U) \cap \psi(V) \neq 0$. La struttura differenziabile sul gruppo è indotta dalla trasformazione differenziabile di carte compatibili (ϕ, U) e (ψ, V) :

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \circ \phi : U &\rightarrow V, \\ \psi^{-1}(\phi(\alpha)) &= \beta, \end{aligned} \quad (8.2)$$

con

$$\begin{aligned} \phi(U) \cap \psi(V) &\neq 0, \\ \phi(\alpha) &\in \phi(U) \cap \psi(V). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Precisamente

$$\psi^{-1} \circ \phi : U \rightarrow \phi(U) \cap \psi(V) \rightarrow \psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(V)) , \quad (8.4)$$

come illustrato in Figura 8.2.

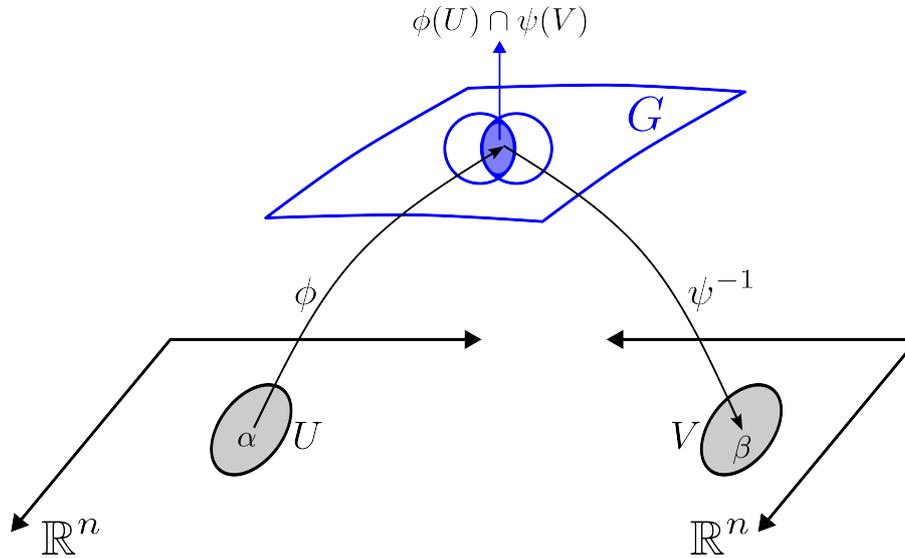


Figura 8.2: La struttura differenziabile sul gruppo è indotta dalla composizione di funzioni in carte compatibili.

Possiamo anche definire una funzione sul gruppo $f(g)$:

$$f : G \rightarrow \mathbb{R} . \quad (8.5)$$

o più precisamente

$$f(g) = f(\phi(\alpha)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} . \quad (8.6)$$

La funzione f è detta differenziabile se $f \circ \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile.

Vogliamo definire ora un'integrazione sul gruppo:

$$\int_G f(g) dg . \quad (8.7)$$

Quest'integrale dipende dalla parametrizzazione del gruppo (cioè dalla mappa ϕ). Per ovviare a questo problema, definiamo l'integrale di $f(g)$ come

$$\int_G f(g) d\mu(g) \equiv \int f(g)\mu(g) dg , \quad (8.8)$$

dove $\mu(g)$ è una funzione invariante sotto il gruppo, cioè è una **misura invariante**. Di conseguenza, $\mu(g)$ soddisfa la seguente condizione

$$\int_G f(g) d\mu(g) = \int_G f(\tilde{g} \circ g) d\mu(g) , \quad (8.9)$$

dove \tilde{g} è un qualsiasi elemento del gruppo e questa relazione deve valere per una funzione f arbitraria. Supponiamo che $\tilde{g} \circ g = g'$ sia invertibile, i.e.

$$\tilde{g} \circ g = g' \rightarrow g = \tilde{g}^{-1} \circ g' , \quad (8.10)$$

e quindi

$$dg = \left| \frac{\partial g}{\partial g'} \right| dg' = \left| \frac{\partial(\tilde{g}^{-1} \circ g')}{\partial g'} \right| dg' . \quad (8.11)$$

Avremo allora

$$\begin{aligned} \int_G f(g) d\mu(g) &= \int_G f(g)\mu(g) dg = \int_G f(\tilde{g} \circ g)\mu(g) dg = \\ &= \int_G f(g')\mu(\tilde{g}^{-1} \circ g') \left| \frac{\partial(\tilde{g}^{-1} \circ g')}{\partial g'} \right| dg' = \int f(g)\mu(\tilde{g}^{-1} \circ g) \left| \frac{\partial(\tilde{g}^{-1} \circ g)}{\partial g} \right| dg , \end{aligned} \quad (8.12)$$

per cui la misura invariante $\mu(g)$ deve soddisfare l'equazione

$$\boxed{\mu(g) = \mu(\tilde{g}^{-1} \circ g) \left| \frac{\partial(\tilde{g}^{-1} \circ g)}{\partial g} \right|} . \quad (8.13)$$

La mappa

$$g \rightarrow g' = \tilde{g} \circ g , \quad (8.14)$$

corrisponde proprio ad una riparametrizzazione del gruppo e, poiché l'integrale è esteso a tutto il gruppo e la misura è invariante per questa riparametrizzazione, l'integrale così definito **non dipende dalla parametrizzazione**.

8.2 Teoria di gauge non abeliana

Consideriamo ora una **teoria di gauge non abeliana**, cioè una teoria di campo invariante sotto un certo gruppo di trasformazioni locali. Il gruppo di simmetria è un gruppo di Lie ai cui elementi permettiamo di dipendere dalle coordinate dello spazio-tempo x^μ . Indichiamo con $g(\alpha)$ un elemento del gruppo, dove $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sono i parametri continui del gruppo. Parametriamo l'identità del gruppo con $g(0) = e$. Un elemento del gruppo infinitamente vicino all'elemento identità si può scrivere come

$$g(\alpha) = e + \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha^a} \right|_{\alpha=0} d\alpha^a + O(\alpha^2) = e + t^a \alpha^a , \quad (8.15)$$

dove t^a sono i generatori del gruppo in qualche rappresentazione. Se la rappresentazione è unitaria i t^a sono hermitiani. Nel caso di $SU(N)$, gli elementi del gruppo saranno matrici $N \times N$ a entrate complesse che soddisfano la condizione di unitarietà

$$U^\dagger U = I \rightarrow UU^\dagger = I \rightarrow \sum_j U_{ij}(U^\dagger)_{jk} = \sum_j U_{ij}U_{kj}^* = \delta_{ik} . \quad (8.16)$$

Questa condizione equivale a N condizioni reali $\sum_j |U_{ij}|^2 = 1$ e $N(N-1)/2$ condizioni complesse. Quindi i parametri indipendenti sarebbero $2N^2 - N - N(N-1) = 2N^2 - N - N^2 + N = N^2$, ma bisogna sottrarre la condizione reale sul determinante $\det U = 1$, e quindi i parametri indipendenti sono $N^2 - 1$. Nella rappresentazione esponenziale $U = e^{i\alpha_a t^a}$, dove t^a sono i generatori del gruppo. Poiché $\det U = e^{\text{tr} \log U} = e^{i\alpha_a \text{tr}(t^a)} = 1$, allora avremo che $\text{tr}(t^a) = 0$, cioè i t^a sono hermitiani a traccia nulla.

Tornando alle trasformazioni infinitesime possiamo definire la struttura del gruppo nel modo seguente

$$g(\alpha) \circ g(\beta) = g(f(\alpha, \beta)) , \quad (8.17)$$

dove la funzione $f(\alpha, \beta)$ soddisfa le condizioni seguenti

$$\begin{aligned} g(\alpha) \circ g(\beta) &= g(f(\alpha, \beta)) , \\ f(0, 0) &= 0 , \\ f(\alpha, 0) &= \alpha , \\ f(0, \beta) &= \beta , \end{aligned} \tag{8.18}$$

per cui $f(\alpha, \beta)$ deve essere della forma

$$f_a(\alpha, \beta) = \alpha^a + \beta^a + f_{bc}^a \alpha^b \beta^c , \tag{8.19}$$

in quanto termini quadratici in α o β violerebbero le condizioni precedenti. Espandendo $g(\alpha)$ al secondo ordine in α

$$g(\alpha) = e + \imath t^a \alpha^a + \frac{\imath^2}{2} \alpha^a \alpha^b t^{ab} , \tag{8.20}$$

e sostituendo quest'espansione nel prodotto $g(\alpha) \circ g(\beta)$ prima, e nella composizione $g(f(\alpha, \beta))$ poi, otteniamo

$$\begin{aligned} g(\alpha) \circ g(\beta) &= \left(1 + \imath t^a \alpha^a + \frac{\imath^2}{2} \alpha^a \alpha^b t^{ab} \right) \left(1 + \imath t^a \beta^a + \frac{\imath^2}{2} \beta^a \beta^b t^{ab} \right) + \dots = \\ &= 1 + \imath t^a \alpha^a + \frac{\imath^2}{2} \alpha^a \alpha^b t^{ab} + \imath t^a \beta^a + \imath \alpha^a \beta^b t^{ab} + \frac{\imath^2}{2} \beta^a \beta^b t^{ab} = \\ &= g(f(\alpha, \beta)) = \left(1 + \imath f_a t^a + \frac{\imath^2}{2} t^{ab} f_a f_b + \dots \right) = \\ &= 1 + \imath t^a (\alpha^a + \beta^a + f^{abc} \alpha^b \beta^c) + \frac{\imath^2}{2} t^{ab} (\alpha^a + \beta^a + \dots)(\alpha^b + \beta^b + \dots) = \\ &= 1 + \imath t^a \alpha^a + \imath t^a \beta^a + \imath t^a f^{abc} \alpha^b \beta^c + \frac{\imath^2}{2} t^{ab} \alpha^a \alpha^b + \frac{\imath^2}{2} t^{ab} \beta^a \beta^b + \\ &+ \frac{\imath^2}{2} t^{ab} \alpha^a \beta^b + \frac{\imath^2}{2} t^{ab} \alpha^b \alpha^a , \end{aligned} \tag{8.21}$$

da cui ricaviamo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \rightarrow \imath \alpha^a \beta^b t^a t^b &= \imath^2 t^{ab} \alpha^a \beta^b + \imath t^a f^{abc} \alpha^b \beta^c \\ \rightarrow \imath t^{ab} \alpha^a \beta^b &= t^a t^b \alpha^a \beta^b - f^{cab} \alpha^a \beta^b t^c \\ \rightarrow t^{ab} &= -\imath t^a t^b + \imath f^{cab} t^c . \end{aligned} \tag{8.22}$$

Poiché t^{ab} è simmetrico in a, b avremo

$$\begin{aligned} t^{ba} = t^{ab} &= -\imath t^b t^a + \imath f^{cba} t^c \\ \rightarrow -\imath t^a t^b + \imath t^b t^a + \imath (f^{cab} - f^{cba}) t^c &= 0 \\ -\imath [t^a, t^b] &= -\imath (f^{cab} - f^{cba}) t^c = C_c^{ab} t^c \end{aligned} \tag{8.23}$$

dove $C_c^{ab} = -\imath (f^{cab} - f^{cba})$ sono le **costanti di struttura** del gruppo. Le relazioni di commutazione dei generatori del gruppo

$$\boxed{[t^a, t^b] = \imath C_c^{ab} t^c} , \tag{8.24}$$

definiscono l'**algebra di Lie**.

La trasformazione locale che ci interessa corrisponde ad un elemento del gruppo $g(\alpha(x)) \equiv g(x)$ che induce una trasformazione unitaria sui campi, i.e.

$$\psi(x) \rightarrow \psi^g(x) = U(g(x))\psi(x) \equiv U(x)\psi(x) . \quad (8.25)$$

Poiché il termine cinetico non è invariante dobbiamo ridefinirlo. Definiamo un operatore (**non locale**) che agisce sui campi nel modo seguente:

$$\psi_T(y; x) = V(y, x)\psi(x) , \quad (8.26)$$

cioè l'operatore V 'trasporta' $\psi(x)$ da $x \rightarrow y$. Richiediamo che sotto una trasformazione locale $\psi_T(y; x)$ trasformi come trasforma un campo nel punto y :

$$\psi'_T(y; x) = U(y)\psi_T(y; x) = U(y)V(y, x)\psi(x) = U(y)V(y, x)U^{-1}(x)\psi'(x) = V'(y, x)\psi'(x) \quad (8.27)$$

da cui ricaviamo che

$$V'(y, x) = U(y)V(y, x)U^{-1}(x) . \quad (8.28)$$

Considerando un trasporto infinitesimo da $x \rightarrow x + dx$ otteniamo

$$\psi_T(x+dx; x) = V(x+dx, x)\psi(x) = [1 + \partial_\mu V dx^\mu + \dots]\psi(x) = [1 + \imath A_\mu(x) dx^\mu]\psi(x) . \quad (8.29)$$

Poiché V è un operatore nella rappresentazione che ha come base i campi $\psi(x)$, così anche gli $A_\mu(x)$ definiti nell'equazione precedente sono operatori nella stessa rappresentazione. Abbiamo dunque trovato la seguente equazione:

$$\boxed{\psi_T(x+dx; x) = \psi(x) + \imath A_\mu(x) dx^\mu \psi(x)} . \quad (8.30)$$

Vediamo ora come trasforma $A_\mu(x)$:

$$\begin{aligned} [1 + \imath A'_\mu(x) dx^\mu] &= U(x+dx)[1 + \imath A_\mu(x) dx^\mu]U^{-1}(x) = \\ &= [U(x) + \partial_\mu U(x) dx^\mu][1 + \imath A_\mu(x) dx^\mu]U^{-1}(x) = \\ &= U(x)U^{-1}(x) + \imath U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) dx^\mu + (\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) dx^\mu + \dots \\ &= 1 + [\imath U A_\mu U^{-1} + (\partial_\mu U)U^{-1}] dx^\mu \\ &\rightarrow \imath A'_\mu(x) = \imath U A_\mu U^{-1} + (\partial_\mu U)U^{-1} \\ &\rightarrow \boxed{A'_\mu = U(x)A_\mu U^{-1}(x) - \imath (\partial_\mu U)U^{-1}(x)} . \end{aligned} \quad (8.31)$$

Sotto una trasformazione infinitesima $U(x) = 1 + \imath \lambda_a(x) t^a$ avremo

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= (1 + \imath \lambda) A_\mu (1 - \imath \lambda) - \imath (\partial_\mu (1 + \imath \lambda)) (1 - \imath \lambda) = \\ &= A_\mu - \imath A_\mu \lambda + \imath \lambda A_\mu - \imath \partial_\mu (\imath \lambda) = \\ &= A_\mu + \imath [\lambda, A_\mu] + \partial_\mu \lambda , \end{aligned} \quad (8.32)$$

da cui ricaviamo

$$\boxed{A'_\mu(x) = A_\mu + \imath [\lambda, A_\mu] + \partial_\mu \lambda} . \quad (8.33)$$

Espandendo A nella base dei generatori del gruppo otteniamo

$$\begin{aligned} A'^a_\mu(x) t^a &= A^a_\mu t^a + \imath [\lambda_b t^b, A^c_\mu t^c] + \partial_\mu \lambda^a t^a = \\ &= A^a_\mu t^a + \imath \lambda_b A^c_\mu \imath f^{bca} t^a + \partial_\mu \lambda^a t^a = \\ &= A^a_\mu t^a - \lambda_b A^c_\mu f^{abc} t^a + \partial_\mu \lambda^a t^a , \end{aligned} \quad (8.34)$$

da cui ricaviamo la legge di trasformazione infinitesima dei campi $A_\mu^a(x)$.

$$\boxed{A_\mu^a(x) = A_\mu^a(x) - f^{abc}\lambda_b(x)A_\mu^c(x) + \partial_\mu\lambda^a} . \quad (8.35)$$

Il **differenziale covariante** è dato da

$$\begin{aligned} D\psi(x) &= \psi(x + dx) - \psi_T(x + dx; x) = \\ &= \psi(x) + d\psi(x) - \psi(x) - \imath A_\mu(x)\psi(x)dx^\mu = \\ &= (\partial_\mu\psi(x) - \imath A_\mu(x)\psi(x))dx^\mu \\ &\rightarrow D\psi(x) = d\psi - \imath A_\mu(x)\psi(x) , \end{aligned} \quad (8.36)$$

e la **derivata covariante** $D_\mu\psi(x)$ si scrive quindi come

$$\boxed{D_\mu\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) - \imath A_\mu(x)\psi(x)} . \quad (8.37)$$

Vediamo come trasforma $D_\mu\psi(x)$:

$$\begin{aligned} (D_\mu\psi(x))' &= (\partial_\mu\psi' - \imath A'_\mu\psi') = \partial_\mu[U(x)\psi(x)] - \imath[U A_\mu U^{-1} - \imath(\partial_\mu U)U^{-1}]U\psi(x) = \\ &= (\partial_\mu U)\psi + U(\partial_\mu\psi) - \imath U A_\mu\psi - (\partial_\mu U)\psi = \\ &= U(\partial_\mu\psi - \imath A_\mu\psi) = U(x)D_\mu\psi(x) , \end{aligned} \quad (8.38)$$

cioè abbiamo trovato che

$$\boxed{(D_\mu\psi(x))' = U(x)(D_\mu\psi(x))} . \quad (8.39)$$

e quindi il **termine cinetico costruito con la derivata covariante è invariante**.

La libertà di ridefinire i campi in ogni punto dello spazio attraverso una trasformazione di gauge (indipendente punto per punto) senza alterare la teoria rende problematico definire un termine cinetico. Fisicamente il termine cinetico è una misura della variazione del campo nello spazio (variazione dell'intensità). Il differenziale ordinario $\psi(x + dx) - \psi(x)$ non è attendibile perché dipende dall'orientazione dei campi che possiamo cambiare indipendentemente nei due punti x e $x + dx$.

Il differenziale $D\psi = \psi(x+dx) - \psi_T(x+dx; x)$, invece, non soffre della stessa ambiguità, perché i due campi ruotano simultaneamente dello stesso angolo in modo tale che il loro angolo relativo resti fissato. Il campo $\psi_T(x + dx; x)$ è un campo direttamente collegato con $\psi(x)$ attraverso le **connessioni** $A_\mu(x)$. In sostanza $\psi_T(x + dx; x)$ è una 'copia' di $\psi(x)$ in $x + dx$ che però ruota come $\psi(x + dx)$.

Per un trasporto finito $\psi_T(y; x)$ dipende criticamente dal cammino scelto per andare da $x \rightarrow y$. Ricaviamo l'operatore di trasporto finito da $x \rightarrow y$. A tal fine notiamo che

$$D_\mu\psi_T = 0 , \quad (8.40)$$

cioè

$$\begin{aligned} [\partial_\mu - \imath A_\mu(x)]\psi_T &= 0 , \\ \rightarrow \partial_\mu\psi_T &= \imath A_\mu(x)\psi_T , \end{aligned} \quad (8.41)$$

che possiamo riscrivere come equazione integrale:

$$\psi_T(y; x) = \psi(x) + \imath \int_x^y A_\mu(x')\psi_T(x'; x) dx' . \quad (8.42)$$

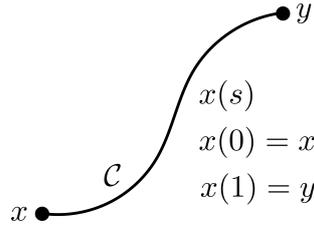


Figura 8.3

Iterando otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \psi_T(y; x) &= \psi(x) + i \int_x^y A_\mu(x') \left[\psi(x) + i \int_x^{x'} A_\mu(x'') \psi_T(x''; x) dx'' \right] dx' = \\
 &= \psi(x) + i \int_x^y A_\mu(x') \psi(x) dx' + i^2 \int_x^y dx' \int_x^{x'} dx'' A_\mu(x') A_\mu(x'') \psi_T(x''; x) = \\
 &= \left[1 + i \int_x^y A_\mu(x') dx' + i^2 \int_x^y dx' \int_x^{x'} dx'' A_\mu(x') A_\mu(x'') + \dots \right] \psi(x) = \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_x^y dx^1 \dots \int_x^{x^{n-1}} dx^n A_\mu(x^1) \dots A_\mu(x^n) \right] \psi(x) = \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^{s_{n-1}} ds_n A_\mu(x(s_1)) \dots A_\mu(x(s_n)) \frac{dx^1}{ds_1} \dots \frac{dx^n}{ds_n} \right] = \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 ds_n \mathcal{P} \left\{ A_\mu(x(s_1)) \frac{dx^1}{ds_1} \dots A_\mu(x(s_n)) \frac{dx^n}{ds_n} \right\} \right] = \\
 &= \exp \left[i \mathcal{P} \int_0^1 ds A_\mu(x(s)) \cdot \frac{dx^\mu}{ds} \right],
 \end{aligned} \tag{8.43}$$

da cui ricaviamo la seguente espressione per l'operatore di trasporto finito $V(y, x)$:

$$\boxed{V(y, x) = \exp \left[i \mathcal{P} \int_0^1 ds A_\mu(x(s)) \cdot \frac{dx^\mu}{ds} \right]}, \tag{8.44}$$

dove \mathcal{P} è un operatore di ordinamento che ordina le connessioni in base alla loro posizione sul cammino dalla più vicina al punto iniziale alla più lontana. Questo è palesemente un operatore non locale e inoltre dipende dal cammino \mathcal{C} che unisce il punto iniziale al punto finale, giacché le connessioni variano punto per punto. In realtà però non ci interessa un trasporto finito del campo, in quanto perderemmo la natura locale del campo stesso.

Per effettuare un trasporto infinitesimo è sufficiente un campo locale $A_\mu(x)$ che forza ψ_T a ruotare come un campo in $(x + dx)$. Infatti $A_\mu(x)$, accoppiandosi con $\psi(x)$, induce la rotazione in $(x + dx)$. Attraverso il campo $A_\mu(x)$ è possibile costruire un termine cinetico invariante di gauge. Dobbiamo confrontare $\psi(x + dx)$ non con $\psi(x)$ ma con $\psi(x) + i A_\mu(x) \psi(x) dx^\mu$. Possiamo interpretare questo fatto dicendo che il campo $\psi(x)$ nel tratto dx^μ dello spazio-tempo sperimenta un'interazione con $A_\mu(x)$ che, in un certo senso, lo vincola ad orientarsi in una certa direzione. L'interazione tra $\psi(x)$ e $A_\mu(x)$ nel punto x produce un campo 'mobile' ψ_T che però trasforma come un campo nel punto $(x + dx)$. Quando andiamo a confrontare questo campo mobile ψ_T con il campo $\psi(x + dx)$ che

non è stato trascinato nello spazio-tempo (a differenza di ψ_T) abbiamo una misura reale della variazione del campo che non dipende dalla gauge. In altre parole il campo $A_\mu(x)$ determina e definisce un'evoluzione del campo invariante di gauge, cioè indipendente dall'orientazione assoluta del campo nel punto x .

Calcoliamo ora il commutatore seguente

$$\begin{aligned}
 [D_\mu, D_\nu]\psi(x) &= [(\partial_\mu - \imath A_\mu)(\partial_\nu - \imath A_\nu) - (\partial_\nu - \imath A_\nu)(\partial_\mu - \imath A_\mu)]\psi(x) = \\
 &= [\partial_\mu\partial_\nu - \imath A_\nu\partial_\mu - \imath(\partial_\mu A_\nu) - \imath A_\mu\partial_\nu - A_\mu A_\nu - \partial_\nu\partial_\mu + \imath A_\mu\partial_\nu + \imath(\partial_\nu A_\mu) + \\
 &\quad + \imath A_\nu\partial_\mu + A_\nu A_\mu]\psi(x) = \\
 &= [-\imath(\partial_\mu A_\nu) - [A_\mu, A_\nu] + \imath(\partial_\nu A_\mu)]\psi(x) = \\
 &= \imath(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \imath[A_\mu, A_\nu])\psi(x) = \imath G_{\mu\nu}\psi(x) ,
 \end{aligned} \tag{8.45}$$

dove abbiamo definito il tensore $G_{\mu\nu}$ come

$$\boxed{G_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \imath[A_\mu, A_\nu]} . \tag{8.46}$$

Espandendo $G_{\mu\nu}$ nella base dei generatori otteniamo

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu}^a t^a &= (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a)t^a + \imath A_\mu^b A_\nu^c [t^b, t^c] = \\
 &= (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a)t^a + \imath A_\mu^b A_\nu^c \imath f^{bca} t^a = \\
 &= (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a - f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)t^a ,
 \end{aligned} \tag{8.47}$$

per cui le componenti $G_{\mu\nu}^a$ sono date da

$$\boxed{G_{\mu\nu}^a = \partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a - f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c} . \tag{8.48}$$

Consideriamo ora la lagrangiana seguente

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\imath \not{D} - m)\psi . \tag{8.49}$$

Questa lagrangiana è invariante di gauge. La corrente associata alla simmetria di gauge è data da

$$J_\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} \delta \psi = \imath \bar{\psi} \gamma^\mu \imath \alpha \psi = -\alpha_a \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi . \tag{8.50}$$

D'altra parte l'equazione del moto per A_μ dà

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu^a} = \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi = 0 , \tag{8.51}$$

e quindi $J_\mu = 0$, cioè **la corrente non fluisce**. Per far fluire la corrente dobbiamo inserire un termine cinetico per A_μ . Per trovare un termine cinetico invariante di gauge consideriamo la trasformazione della quantità $([D_\mu, D_\nu]\psi(x))'$. Osservando che

$$(D_\mu \psi(x))' = D'_\mu \psi'(x) = U(x) D_\mu \psi(x) = U(x) D_\mu U^{-1}(x) \psi'(x) , \tag{8.52}$$

otteniamo la seguente legge di trasformazione per $G_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 D'_\mu &= U(x) D_\mu U^{-1}(x) , \\
 [D_\mu, D_\nu]' &= U(x) [D_\mu, D_\nu] U^{-1}(x) , \\
 \rightarrow G'_{\mu\nu}(x) &= U(x) G_{\mu\nu}(x) U^{-1}(x) .
 \end{aligned} \tag{8.53}$$

Prendendo una trasformazione infinitesima $U(x) = 1 + \imath\alpha_a t^a$ avremo che

$$G'_{\mu\nu}(x) = (1 + \imath\alpha_a t^a)G_{\mu\nu}(1 - \imath\alpha_a t^a) = G_{\mu\nu} + \imath\alpha_a t^a G_{\mu\nu} - \imath\alpha_a G_{\mu\nu} t^a, \quad (8.54)$$

e quindi

$$\boxed{G'_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu} + \imath\alpha_a [t^a, G_{\mu\nu}]} . \quad (8.55)$$

Espandendo nella base dei generatori otteniamo

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a t^a &= G_{\mu\nu}^a t^a + \imath\alpha_b [t^b, G_{\mu\nu}^c t^c] = G_{\mu\nu}^a t^a + \imath\alpha_b G_{\mu\nu}^c \imath f^{bca} t^a = \\ &= G_{\mu\nu}^a t^a - \alpha_b G_{\mu\nu}^c f^{abc} t^a, \end{aligned} \quad (8.56)$$

da cui ricaviamo la seguente legge di trasformazione per le componenti $G_{\mu\nu}^a$:

$$\boxed{G_{\mu\nu}^a(x)' = G_{\mu\nu}^a(x) - f^{abc} \alpha_b G_{\mu\nu}^c(x)} . \quad (8.57)$$

Consideriamo un termine del tipo $\text{tr}[G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)]$ e vediamo come trasforma:

$$\text{tr}[G'_{\mu\nu}G'^{\mu\nu}] = \text{tr}[UG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}U^{-1}] = \text{tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] . \quad (8.58)$$

Il termine $\text{tr}[G_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}(x)]$ è quindi invariante di gauge (e anche invariante di Lorentz); contiene le derivate di $A_\mu(x)$ ed è l'**unica combinazione invariante**. Scrivendo

$$-\frac{1}{2g^2}\text{tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = -\frac{1}{2g^2}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu b} \text{tr}[t^a t^b] . \quad (8.59)$$

e scegliendo la normalizzazione dei generatori come

$$\text{tr}[t^a t^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab} , \quad (8.60)$$

avremo che il termine cinetico cercato è dato da

$$\boxed{-\frac{1}{4g^2}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}} . \quad (8.61)$$

Riscalando i campi $A_\mu \rightarrow gA_\mu$ avremo

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - \imath g A_\mu , \\ \frac{1}{g}G_{\mu\nu} &= \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \imath g [A_\mu, A_\nu] , \end{aligned} \quad (8.62)$$

e quindi possiamo riscrivere il termine cinetico come $-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}$ con $G_{\mu\nu}$ ridefinito come

$$\boxed{\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + \imath g [A_\mu, A_\nu] \\ G_{\mu\nu}^a &= \partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned}} . \quad (8.63)$$

A questo punto calcoliamo la variazione $\delta(G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a})$:

$$\begin{aligned} \delta(G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}) &= 2G_{\mu\nu}^a \delta G^{\mu\nu a} = \\ &= 2G_{\mu\nu}^a [\delta\partial_\nu A_\mu^a - \delta\partial_\mu A_\nu^a - g f^{abc} \delta(A_\mu^b A_\nu^c)] = \\ &= 2G_{\mu\nu}^a \delta\partial_\nu A_\mu^a - 2G_{\nu\mu}^a \delta\partial_\nu A_\mu^a - 2G_{\mu\nu}^a g f^{abc} \delta(A_\mu^b A_\nu^c) = \\ &= 4G_{\mu\nu}^a \delta\partial_\nu A_\mu^a - 2G_{\mu\nu}^a g f^{abc} [(\delta A_\mu^b) A_\nu^c + A_\mu^b (\delta A_\nu^c)] = \\ &= 4G_{\mu\nu}^a \delta(\partial_\nu A_\mu^a) - 2G_{\mu\nu}^a g f^{abc} (\delta A_\mu^b) A_\nu^c - 2G_{\mu\nu}^a g f^{abc} A_\mu^b (\delta A_\nu^c) = \\ &= 4G_{\mu\nu}^a \delta(\partial_\nu A_\mu^a) - 2G_{\mu\nu}^a g f^{abc} (\delta A_\mu^b) A_\nu^c - 2G_{\nu\mu}^a g f^{acb} A_\nu^c (\delta A_\mu^b) = \\ &= 4G_{\mu\nu}^a \delta(\partial_\nu A_\mu^a) - 4G_{\mu\nu}^a g f^{abc} (\delta A_\mu^b) A_\nu^c , \end{aligned} \quad (8.64)$$

da cui concludiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta(\partial_\nu A_\mu^a)} \left(-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right) &= -G^{\mu\nu a} , \\ \frac{\delta}{\delta A_\mu^b} \left(-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \right) &= G^{\mu\nu a} g f^{abc} A_\nu^c , \end{aligned} \quad (8.65)$$

Le equazioni del moto per il campo A_μ sono quindi date da

$$\partial_\nu G^{\mu\nu a} = g G^{\mu\nu b} f^{abc} A_\nu^c - g \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi . \quad (8.66)$$

Riassumendo, avremo

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\nu G^{\mu\nu a}(x) &= J_T^{\mu a}(x) , \\ \partial_\mu \partial_\nu G^{\mu\nu a}(x) &= \partial_\mu J_T^{\mu a}(x) = 0 , \\ J_T^{\mu a} &= g f^{abc} G^{\mu\nu b} A_\nu^c - g \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi , \end{aligned}} , \quad (8.67)$$

dove $J_T^{\mu a}$ è la corrente totale dovuta al campo di gauge più il campo di materia ed è la vera corrente conservata.

8.3 Gauge fixing

La quantità che ci interessa calcolare in questo paragrafo è un integrale funzionale sui campi di gauge della forma

$$\int \delta A e^{iS(A)} , \quad (8.68)$$

ovvero la sua continuazione analitica nell'euclideo

$$\int \delta A e^{-S_E(A)} . \quad (8.69)$$

Sotto una trasformazione $\Omega(x)$ del gruppo di gauge $A_\mu(x)$ trasforma come

$$A_\mu^\Omega(x) = \Omega(x) A_\mu(x) \Omega^{-1}(x) - i(\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1}(x) , \quad (8.70)$$

mentre $S_E(A)$ è invariante

$$S_E(A^\Omega) = S_E(A) . \quad (8.71)$$

Applicando tutte le possibili trasformazioni $\Omega(x)$ del gruppo di gauge ad $A_\mu(x)$ otteniamo l'**orbita** A_μ^Ω mostrata in Figura 8.4 Quindi, fissato $A_\mu(x)$, esiste un'intera orbita $A_\mu^\Omega(x)$ lungo la quale $S_E(A)$ (e qualsiasi altra osservabile fisica) non cambia. In altre parole, per le osservabili fisiche come S_E tutti i punti lungo le orbite di gauge sono equivalenti: ciascun punto su ogni orbita dà lo stesso risultato fisico. Per questo motivo vorremmo integrare solo sulle configurazioni del campo di gauge fisicamente distinte e quindi considerare solo un punto per ogni orbita di gauge. In sostanza vorremmo integrare su una ipersuperficie che interseca ciascuna orbita di gauge una sola volta. Questa ipersuperficie nello spazio di funzioni è definita dal vincolo

$$f(A) = 0 , \quad (8.72)$$

ed è chiamata **superficie di gauge fixing**.

Supponiamo di avere un certo $A_\mu(x)$ tale che $f(A) = 0$. Se esiste un altro $\bar{A}_\mu(x)$ tale che $f(\bar{A}) = 0$ sulla stessa orbita di gauge di $A_\mu(x)$, i.e.

$$\bar{A}_\mu^\Omega(x) = \bar{\Omega} \bar{A}_\mu \bar{\Omega}^{-1} - \imath(\partial_\mu \bar{\Omega}) \bar{\Omega}^{-1} = A_\mu(x) , \quad (8.73)$$

allora la superficie di gauge fixing interseca l'orbita di gauge più di una volta. Queste intersezioni multiple sono chiamate **copie di Gribov**. Nella discussione seguente assumeremo che non ci siano copie di Gribov, cioè che la superficie di gauge fixing definita dal vincolo $f(A) = 0$ non abbia intersezioni multiple. Notiamo che i campi di gauge indipendenti $A_\mu^a(x)$ sono in numero pari al numero di generatori del gruppo: $a = 1, \dots, N^2 - 1$ nel caso di $SU(N)$. Di conseguenza avremo esattamente $N^2 - 1$ vincoli $f_a(A) = 0$ che sono necessari per determinare univocamente la superficie di gauge fixing. Nello spazio di funzioni questi vincoli individuano una superficie $(N^2 - 1)$ -dimensionale.

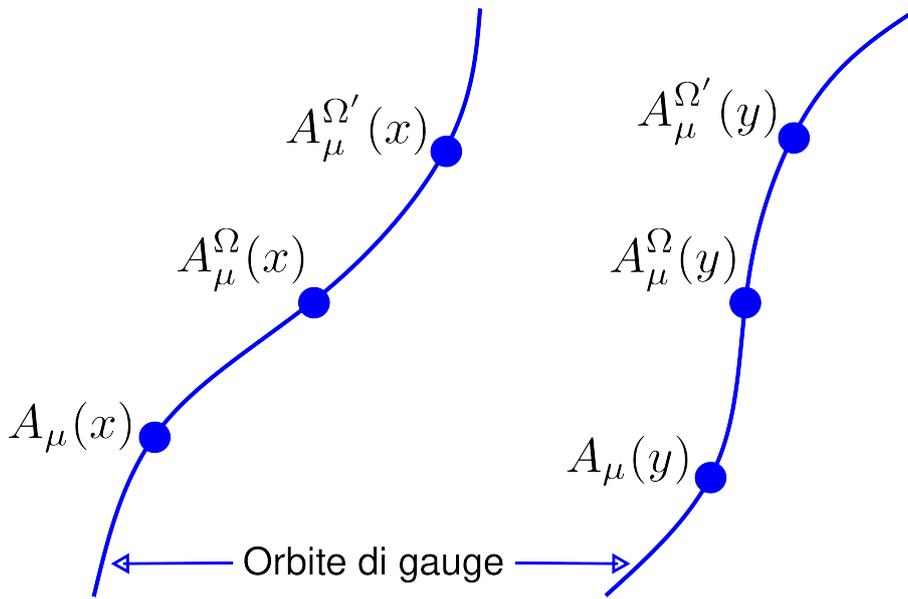


Figura 8.4: **Orbita di gauge**. In ogni punto dello spazio-tempo il valore del campo $A_\mu(x)$ può essere cambiato in un nuovo valore $A_\mu^\Omega(x)$ applicando un'opportuna trasformazione $\Omega(x)$ del gruppo di gauge. Applicando un'altra trasformazione si ottiene, in generale, un altro valore ancora $A_\mu^{\Omega'}(x)$. Applicando tutte le trasformazioni del gruppo si ottiene un insieme di valori $\{A_\mu(x), A_\mu^\Omega(x), A_\mu^{\Omega'}(x), \dots\}$ detto orbita di gauge del campo $A_\mu(x)$. Prendendo un altro punto y dello spazio-tempo e ragionando analogamente si ottiene l'orbita di gauge del campo $A_\mu(y)$. Tutti i valori del campo A_μ lungo un'orbita di gauge sono fisicamente equivalente. Questo vuol dire che il valore di qualsiasi osservabile fisica costruita con i campi A_μ non cambia quando A_μ varia lungo la sua orbita di gauge.

Chiariamo la procedura per calcolare l'integrale nell'Eq. (8.69). Fissiamo un punto x dello spazio-tempo. Fissiamo la funzione $A_\mu(x)$. Se $A_\mu(x)$ non soddisfa la condizione $f(A) = 0$ percorriamo la sua orbita di gauge $A_\mu^\Omega(x)$ e individuamo il punto in cui $f(A_\mu^\Omega) = 0$. A questo punto, variamo la forma funzionale di $A_\mu(x)$ in modo da non intersecare l'orbita di gauge precedente. Questa nuova forma funzionale di $A_\mu(x)$ è fisicamente distinta da quella precedente in quanto non è raggiungibile da una trasformazione del gruppo di gauge. Percorriamo l'orbita di gauge di questo nuovo $A_\mu(x)$ per trovare il punto in cui $f(A_\mu^\Omega) = 0$. Per ognuna di queste configurazioni fisicamente distinte calcoliamo S_E

e sommiamo i vari contributi. Infine, variamo il punto x , e sommiamo tutti i contributi relativi a tutti i punti dello spazio-tempo.

Per implementare questa procedura matematicamente dobbiamo fattorizzare l'integrale originale nel prodotto di un integrale sulla superficie di gauge fixing e un integrale sul gruppo di gauge, i.e.

$$\int \delta A \rightarrow \int \delta \bar{A} \delta \Omega , \quad (8.74)$$

dove l'integrale in $\delta \bar{A}$ è esteso a tutte e sole le configurazioni del campo fisicamente inequivalenti, mentre l'integrale su $\delta \Omega$ è esteso a tutte le trasformazioni del gruppo di gauge. A questo scopo introduciamo il funzionale δ infinito-dimensionale:

$$\delta[f(A)] = \prod_{x,a} \delta[f_a(A_\mu(x))] . \quad (8.75)$$

Se prendiamo A arbitrariamente allora $f(A) \neq 0 \rightarrow \delta[f(A)] = 0$. Ma esisterà Ω tale che:

$$f(A^\Omega(x)) = 0 . \quad (8.76)$$

L'integrale sul gruppo di gauge di $\delta[f(A)]$ può essere scritto come

$$\int \delta \Omega \delta[f(A^\Omega)] = \frac{1}{\Delta_f(A)} , \quad (8.77)$$

o analogamente

$$\Delta_f(A) \int \delta \Omega \delta[f(A^\Omega)] = 1 . \quad (8.78)$$

Il fattore $\Delta_f(A)$ è chiamato **determinante di Faddeev-Popov**. Esso dipende dalla superficie di gauge fixing f , ma è invariante di gauge, cioè se prendiamo due $A_\mu(x)$ sulla stessa orbita di gauge $\Delta_f(A)$ non cambia. Per dimostrare quest'affermazione notiamo che $\delta \Omega$ è un prodotto (infinito) di misure invarianti, i.e.

$$\delta \Omega = \prod_{x,a} \mu(g(x)) d^{N^2-1} g(x) . \quad (8.79)$$

Sotto una trasformazione $\bar{\Omega}$ $\Delta_f(A)$ diventa

$$\Delta_f(A^{\bar{\Omega}}) \int \delta \Omega \delta[f(A^{\bar{\Omega}})^\Omega] = 1 . \quad (8.80)$$

Usando la definizione di misura invariante

$$\int_G F(\tilde{g} \circ g) d\mu(g) = \int_G F(g) d\mu(g) , \quad (8.81)$$

avremo che

$$\Delta_f(A^{\bar{\Omega}}) \int \delta \Omega \delta[f(A^{\bar{\Omega}})^\Omega] = \Delta_f(A^{\bar{\Omega}}) \int \delta \Omega \delta[f(A^\Omega)] = \frac{\Delta_f(A^{\bar{\Omega}})}{\Delta_f(A)} = 1 , \quad (8.82)$$

e quindi

$$\Delta_f(A^{\bar{\Omega}}) = \Delta_f(A) , \quad (8.83)$$

$\Delta_f(A)$ è indipendente da $\bar{\Omega}$, cioè è invariante di gauge.

A questo punto possiamo calcolare il valore di aspettazione di un operatore O come

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \frac{\int \delta A e^{-S(A)} O(A)}{\int \delta A e^{-S(A)}} = \frac{\int \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \int \delta \Omega \delta[f(A^\Omega)]}{\int \delta A e^{-S(A)} \Delta_f(A) \int \delta \Omega \delta[f(A^\Omega)]} = \\ &= \frac{\int \delta \Omega \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A^\Omega)]}{\int \delta \Omega \delta A e^{-S(A)} \Delta_f(A) \delta[f(A^\Omega)]} . \end{aligned} \quad (8.84)$$

Ora consideriamo la trasformazione

$$A^\Omega(x) = \Omega(x)A(x)\Omega^{-1}(x) - \iota(\partial_\mu \Omega(x))\Omega^{-1}(x) = A'(x) . \quad (8.85)$$

Questa trasformazione è lineare e non omogenea e corrisponde geometricamente ad una rotazione + una traslazione. Inoltre avremo che

$$\begin{aligned} S(A) &= S(A') , \\ O(A) &= O(A') , \\ \Delta_f(A) &= \Delta_f(A') , \delta A = \delta A' , \end{aligned} \quad (8.86)$$

perché sono gauge-invarianti (in particolare la misura d'integrazione funzionale è invariante di gauge, i.e. è invariante sotto rototraslazioni) e quindi l'Eq. (8.84) diventa

$$\langle O \rangle = \frac{\int \delta \Omega \delta A' e^{-S(A')} O(A') \Delta_f(A') \delta[f(A')]}{\int \delta \Omega \delta A' e^{-S(A')} \Delta_f(A') \delta[f(A')]} . \quad (8.87)$$

A questo punto notiamo che la variabile d'integrazione funzionale è una variabile muta, per cui possiamo scrivere

$$\langle O \rangle = \frac{\int \delta \Omega \int \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)]}{\int \delta \Omega \int \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)]} . \quad (8.88)$$

L'integrale in δA è indipendente da Ω , quindi $\int d\Omega$ si fattorizza e si semplifica col denominatore. Ci'ò che resta è un integrale funzionale sulla sola superficie di gauge-fixing:

$$\boxed{\langle O \rangle = \frac{\int \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)]}{\int \delta A e^{-S(A)} \Delta_f(A) \delta[f(A)]}} . \quad (8.89)$$

Potrebbe sembrare che $\langle O \rangle$ dipenda dalla scelta della superficie di gauge-fixing, ma possiamo dimostrare che se $O(A)$ è una quantità gauge invariante, allora $\langle O \rangle$ è indipendente dalla scelta della superficie di gauge-fixing, cioè indipendente da f . Per dimostrare questa affermazione, scegliamo un'altra superficie di gauge-fixing $g(A) = 0$. Avremo che

$$\Delta_g(A) \int \delta \Omega \delta[g(A^\Omega)] = 1 , \quad (8.90)$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_f &= \int \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)] = \\ &= \int \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)] \Delta_g(A) \int \delta \Omega \delta[g(A^\Omega)] = \\ &= \int \delta \Omega \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f(A)] \Delta_g(A) \delta[g(A^\Omega)] . \end{aligned} \quad (8.91)$$

Chiamiamo

$$A^\Omega = A' , \quad (8.92)$$

e l'inverso come

$$A = (A')^{\Omega^{-1}} , \quad (8.93)$$

per cui possiamo scrivere $\langle O \rangle_f$ come

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_f &= \int \delta\Omega \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_f(A) \delta[f((A')^{\Omega^{-1}})] \Delta_g(A) \delta[g(A')] = \\ &= \int \delta\Omega \delta A' e^{-S(A')} O(A') \Delta_f(A') \delta[f((A')^{\Omega^{-1}})] \Delta_g(A') \delta[g(A')] = \\ &= \int \delta A' e^{-S(A')} O(A') \Delta_g(A') \delta[g(A')] \Delta_f(A') \int \delta\Omega \delta[f((A')^{\Omega^{-1}})] . \end{aligned} \quad (8.94)$$

Usando la definizione di misura invariante sul gruppo

$$\int f(g) d\mu(g) = \int f(g^{-1}) d\mu(g) , \quad (8.95)$$

deduciamo che

$$\int \delta\Omega \delta[f((A')^{\Omega^{-1}})] = \int \delta\Omega \delta[f((A')^\Omega)] . \quad (8.96)$$

Osservando infine che

$$\Delta_f(A') \int \delta\Omega \delta[f((A')^\Omega)] = 1 , \quad (8.97)$$

possiamo concludere che

$$\boxed{\langle O \rangle_f = \int \delta A e^{-S(A)} O(A) \Delta_g(A) \delta[g(A)] = \langle O \rangle_g} , \quad (8.98)$$

cioè $\langle O \rangle$ è indipendente dalla scelta della superficie di gauge-fixing.

8.4 Ghosts

In questo paragrafo ci occuperemo del calcolo esplicito del determinante di Faddeev-Popov.

8.4.1 Caso abeliano

Cominciamo considerando il caso di un gruppo di gauge abeliano. La trasformazione di gauge

$$A_\mu^\Omega(x) = A_\mu(x) - i(\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} , \quad (8.99)$$

con Ω dato da $\Omega = e^{i\Lambda(x)}$ diventa

$$A_\mu^\Omega(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) = A_\mu^\Lambda(x) . \quad (8.100)$$

Scegliamo come superficie di gauge-fixing la gauge di Lorentz, i.e.

$$f(A) = \partial_\mu A^\mu(x) = 0 . \quad (8.101)$$

Inserendo l'Eq (8.101) nella definizione di $\Delta_f(A)$

$$\Delta_f(A) \int \delta\Omega \delta[f(A^\Omega)] = 1 , \quad (8.102)$$

otteniamo

$$\Delta_f(A) \int \delta\Omega \delta[\partial_\mu A^\mu + \square\Lambda] = 1 . \quad (8.103)$$

La misura invariante sul gruppo è proprio $\delta\Lambda$, per cui avremo

$$\Delta_f(A) \int \delta\Lambda \delta[\partial_\mu A^\mu + \square\Lambda] = 1 . \quad (8.104)$$

Facendo il seguente cambiamento di variabili:

$$\Lambda' = \partial A + \square\Lambda , \quad (8.105)$$

con lo jacobiano funzionale dato da

$$J = \det \left(\frac{\delta\Lambda}{\delta\Lambda'} \right) = \det[\square^{-1}] = \frac{1}{|\det[\square]|} , \quad (8.106)$$

otteniamo

$$\Delta_f(A) \frac{1}{|\det[\square]|} \int \delta\Lambda' \delta(\Lambda') = \frac{\Delta_f(A)}{|\det[\square]|} = 1 , \quad (8.107)$$

da cui ricaviamo che

$$\boxed{\Delta_f(A) = |\det[\square]|} . \quad (8.108)$$

Riassumendo, nel caso abeliano abbiamo imparato che il fattore $\Delta_f(A)$ è uguale al determinante dell'operatore differenziale \square ed è, quindi, indipendente da A . Di conseguenza può essere immediatamente fattorizzato e semplificato con il denominatore nel calcolo dei valori di aspettazioni delle osservabili fisiche. Nel caso non-abeliano le cose sono molto diverse.

8.4.2 Caso non-abeliano

Nel caso non-abeliano avremo come prima

$$A_\mu^\Omega(x) = \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \imath(\partial_\mu \Omega) \Omega^{-1} , \quad (8.109)$$

ma ricavare la trasformazione per $A_\mu^{a\Omega}(x)$ è complicato per una trasformazione finita. Tuttavia per una trasformazione infinitesima $\Omega = I + \imath g_a(x) \lambda_a$ avremo

$$A_\mu^\Omega(x) = A_\mu + \imath g_a(x) [\lambda_a, A_\mu(x)] + \partial_\mu g(x) , \quad (8.110)$$

e espandendo $A_\mu(x)$ nella base dei generatori otteniamo

$$A_\mu^{a\Omega}(x) = A_\mu^a(x) - f^{abc} g_b(x) A_\mu^c(x) + \partial_\mu g^a(x) , \quad (8.111)$$

da cui vediamo che anche quando $g = \text{cost}$ i campi di gauge trasformano in modo non banale (sono campi che portano una carica) a differenza del caso abeliano.

Calcoliamo ora il determinante di Faddeev-Popov nella gauge di Lorentz partendo dalla sua definizione:

$$\Delta_f(A) \int \delta\Omega \delta[\partial_\mu A^{\mu\Omega}(x)] = 1 . \quad (8.112)$$

Diciamo subito che la gauge di Lorentz nel caso non abeliano ha molte copie di Gribov, cioè la superficie di gauge fixing interseca la stessa orbita di gauge più di una volta. Se richiediamo che l'intersezione tra orbite di gauge e superficie di gauge-fixing sia unica allora l'integrale è diverso da zero solo in un piccolissimo intorno del punto d'intersezione. Quindi possiamo limitarci a considerare trasformazioni infinitesime. Nel caso generale di intersezioni multiple tra un'orbita di gauge e la superficie di gauge-fixing il modo di procedere seguente non dà risultati esatti. Dopo aver fatto questa precisazione, procedendo nel calcolo otteniamo

$$\Delta_f(A) \int \delta\Omega \delta[\square g^a(x) - f^{abc}\partial_\mu(g_b(x)A_c^\mu(x))] = 1 , \quad (8.113)$$

avendo posto $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$. Usando il fatto che la misura invariante sul gruppo è $\delta\Omega = \mu(g)\delta g$ otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta_{\partial A}(A) \int \mu(g)\delta g \delta[\square g^a - f^{abc}\partial_\mu(g_b A_c^\mu)] &= \\ = \Delta_{\partial A}(A) \int \mu(g)\delta g \delta[Bg] &= 1 . \end{aligned} \quad (8.114)$$

L'unica soluzione di $Bg = 0$ è $g = 0$, perché l'altra possibile soluzione $g = \text{cost}$ non soddisfa la 'condizione al bordo' $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Quindi avremo che

$$\Delta_{\partial A}(A) \int \mu(g) \delta[Bg] \delta g = \Delta_{\partial A}(A) \int \mu(g') \delta(g') \delta g' \frac{1}{|\det B|} = 1 , \quad (8.115)$$

da cui ricaviamo che

$$\Delta_{\partial A}(A) \frac{\mu(0)}{|\det B|} = 1 . \quad (8.116)$$

Ponendo $\mu(0) = 1$ otteniamo infine

$$\boxed{\Delta_{\partial A}(A) = |\det[\delta^{ab}\square - f^{abc}\partial_\mu(A_\mu^c)]|} . \quad (8.117)$$

A differenza del caso abeliano $\Delta_{\partial A}(A)$ dipende da A_μ .

Dimostriamo ora che il det non si annulla mai al variare di A_μ . Essendo il determinante il prodotto degli autovalori, i.e.

$$\det = \prod_{\text{autovalori}} \mu_n , \quad (8.118)$$

possiamo scrivere

$$\square g^a - f^{abc}\partial_\mu(A_\mu^c g^b) = \mu_n g^a . \quad (8.119)$$

Se ci fosse un autovalore nullo avremmo

$$\square g^a - f^{abc}\partial_\mu(A_\mu^c g^b) = 0 , \quad (8.120)$$

e cioè

$$\partial_\mu A_\mu^\Omega = \partial_\mu A_\mu = 0 , \quad (8.121)$$

che vuol dire che avremmo trovato un A_μ^Ω sull'orbita di gauge che soddisfa la condizione $\partial_\mu A_\mu^\Omega = 0$ e quindi interseca la superficie di gauge-fixing. Avremmo quindi un'intersezione multipla tra orbita di gauge e superficie di gauge-fixing. Quindi un autovalore nullo segnala la presenza di intersezioni multiple. Supponiamo che non ci siano intersezioni multiple. Ma allora il det non si annulla mai al variare di A_μ .

Inoltre, poiché il det compare a numeratore e denominatore nel calcolo dei valori medi delle osservabili, il segno è irrilevante e possiamo omettere il modulo.

Quando effettuiamo l'espansione perturbativa del determinante, questa porta ad interazioni non locali tra i campi di gauge. È conveniente, quindi, effettuare un'ultima manipolazione sul determinante e riesprimerlo come un'interazione locale di campi fittizi. A tal fine scriviamo il det B come un integrale funzionale su variabili (di campo) grassmaniane:

$$\begin{aligned} \det B &= \int \delta c \delta \bar{c} \exp \left[- \int \bar{c}(x) B(x) c(x) dx \right] = \\ &= \int \delta c \delta \bar{c} \exp \left[- \int \bar{c}_a(x) (\delta^{ab} \square - f^{abc} \partial_\mu A_\mu^c) c_b(x) d^4x \right], \end{aligned} \quad (8.122)$$

che dopo un'integrazione per parti diventa

$$\boxed{\det B = \int \delta c \delta \bar{c} \exp \left\{ \int [\partial_\mu \bar{c}_a \partial^\mu c^a + \bar{c}_a f^{abc} \partial_\mu (A_c^\mu c_b)] d^4x \right\}}. \quad (8.123)$$

I campi fittizi $c^a(x)$ sono campi scalari a massa nulla anticommutanti in rappresentazione aggiunta, chiamati **ghosts**. Possiamo quindi scrivere il valore di aspettazione dell'osservabile O come

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \int \delta A e^{-S(A)} O(A) \delta[f(A)] \Delta_f(A), \\ \langle O \rangle &= \int \delta A \delta c \delta \bar{c} \exp \left\{ -S(A) + \int d^4x [\partial_\mu \bar{c}_a \partial^\mu c^a + \bar{c}_a f^{abc} \partial_\mu (A_c^\mu c_b)] \right\} O(A) \delta[\partial_\mu A^\mu]. \end{aligned} \quad (8.124)$$

8.5 Propagatore fotonico

Consideriamo il funzionale generatore dell'elettrodinamica senza campi di materia:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \left\langle 0 \left| \mathcal{T} \exp \left(i \int J_\mu A_\mu \right) \right| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \left| \mathcal{T} \exp \left(i \int J_\mu A_\mu^E d^4x_E \right) \right| 0 \right\rangle = \\ &= \int \delta A \exp \left[-S(A) + \int J_\mu A^\mu d^4x_E \right] \delta(\partial_\mu A^\mu), \end{aligned} \quad (8.125)$$

dove $S(A) = \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x_E$. Usando la definizione del tensore elettromagnetico per calcolare il prodotto $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu), \quad (8.126)$$

e integrando in d^4x_E otteniamo che

$$\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x_E = \frac{1}{2} \int (\partial_\nu A_\mu)^2 + (\partial_\mu \partial_\nu A_\mu) A_\nu = \frac{1}{2} \int (\partial_\nu A_\mu)^2, \quad (8.127)$$

avendo usato il vincolo $\partial_\mu A^\mu = 0$. Effettuando una trasformazione di Fourier funzionale della $\delta(\partial_\mu A_\mu)$

$$\delta(\partial_\mu A_\mu) = \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu(x)) = \int \delta\lambda \exp \left[i \int \lambda(x) \partial_\mu A_\mu d^4x \right], \quad (8.128)$$

e inserendo quest'espressione nell'integrale funzionale (8.125) otteniamo

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \delta A \delta\lambda \exp \left[-\frac{1}{2} \int (\partial_\nu A_\mu)^2 + \int J_\mu A^\mu + i \int \lambda \partial_\mu A^\mu \right] = \\ &= \int \delta A \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int A_\mu \square A^\mu + \int J_\mu A^\mu - i \int (\partial_\mu \lambda) A^\mu \right] = \\ &= \int \delta A \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int A_\mu \square A^\mu + \int (J_\mu - i \partial_\mu \lambda) A^\mu \right]. \end{aligned} \quad (8.129)$$

Come al solito variamo l'azione per cercare i punti stazionari per effettuare il cambiamento di variabile:

$$\square A_\mu + (J_\mu - i \partial_\mu \lambda) = 0, \quad (8.130)$$

che risolta dà

$$A_\mu = \int d^4y G_{\mu\nu}(x, y) (J^\nu - i \partial^\nu \lambda), \quad (8.131)$$

dove $G_{\mu\nu}(x, y)$ soddisfa l'equazione seguente

$$\square G_{\mu\nu}(x, y) = -\delta^{\mu\nu} \delta(x - y). \quad (8.132)$$

Chiamiamo \tilde{A}_μ la soluzione dell'Eq (8.130). Effettuando il cambio di variabili

$$A_\mu = A'_\mu + \tilde{A}_\mu, \quad (8.133)$$

nell'integrale (8.129) otteniamo

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \delta A' \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int (A' + \tilde{A}) \square (A' + \tilde{A}) + 2(J_\mu - i \partial_\mu \lambda) (A'^\mu + \tilde{A}) \right] = \\ &= \int \delta A' \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int A' \square A' + \tilde{A} \square A' + A' \square \tilde{A} + \tilde{A} \square \tilde{A} + 2(J_\mu - i \partial_\mu \lambda) A'^\mu + 2(J_\mu - i \partial_\mu \lambda) \tilde{A} \right] = \\ &= \int \delta A' \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int A' \square A' + (J_\mu - i \partial_\mu \lambda) \tilde{A} \right] = \\ &= \int \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int (J_\mu - i \partial_\mu \lambda) \tilde{A} \right] \int \delta A' \exp \left[\frac{1}{2} \int A' \square A' \right]. \end{aligned} \quad (8.134)$$

Il secondo integrale non dipende da J e λ e si semplifica con il denominatore, per cui avremo che

$$Z[J] = \int \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y (J_\mu(x) - i \partial_\mu \lambda(x)) G^{\mu\nu}(x, y) (J_\nu(y) - i \partial_\nu \lambda(y)) \right]. \quad (8.135)$$

Risolvendo l'Eq. (8.132) troviamo anche $G_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
 \square G_{\mu\nu} &= -\delta_{\mu\nu}\delta(x-y) , \\
 \rightarrow G_{\mu\nu}(x) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{G}_{\mu\nu}(q) e^{iqx} , \\
 \rightarrow \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} -q^2 \tilde{G}_{\mu\nu}(q) e^{iqx} &= -\delta_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} , \\
 \rightarrow \tilde{G}_{\mu\nu}(q) &= \frac{\delta_{\mu\nu}}{q^2} , \\
 \rightarrow G_{\mu\nu}(x-y) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{\mu\nu}}{q^2} e^{iq(x-y)} = \delta_{\mu\nu} G(x-y) .
 \end{aligned} \tag{8.136}$$

Il funzionale generatore diventa

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \int \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(x) G(x-y) J^\mu(y) - i J_\mu(x) G(x-y) \partial^\mu \lambda(y) - \right. \\
 &\quad \left. - i \partial_\mu \lambda(x) G(x-y) J^\mu(y) - \partial_\mu \lambda(x) G(x-y) \partial^\mu \lambda(y) \right] = \\
 &= \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(x) G(x-y) J^\mu(y) \right] \\
 &\quad \int \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y - 2i J_\mu G(x-y) \partial^\mu \lambda(y) - \lambda(x) (\partial_x^\mu \partial_y^\mu G(x-y)) \lambda(y) \right] .
 \end{aligned} \tag{8.137}$$

Ora, poiché

$$\partial_x^\mu \partial_y^\mu G(x-y) = -\square_{(x-y)} G(x-y) = \delta^4(x-y) , \tag{8.138}$$

avremo che

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= e^{\frac{1}{2} \int J G J} \int \delta\lambda \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x d^4y 2i J_\mu(x) [\partial_y^\mu G(x-y)] \lambda(y) - \lambda(x) \delta(x-y) \lambda(y) \right] = \\
 &= e^{\frac{1}{2} \int J G J} \int \delta\lambda \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^4y \lambda^2(y) + i \int dx dy J_\mu(x) [\partial_y^\mu G(x-y)] \lambda(y) \right] .
 \end{aligned} \tag{8.139}$$

L'integrale in $\delta\lambda$ è gaussiano e lo risolviamo cercando i punti stazionari per effettuare il cambiamento di variabile:

$$\begin{aligned}
 -\lambda(y) + i \int dx J_\mu(x) [\partial_y^\mu G(x-y)] &= 0 , \\
 \rightarrow \lambda(y) &= i \int d^4x J_\mu(x) [\partial_y^\mu G(x-y)] .
 \end{aligned} \tag{8.140}$$

Ponendo $\lambda' = \lambda + \tilde{\lambda}$ avremo

$$\int \delta\lambda' \exp \left[-\frac{1}{2} \int (\lambda' + \tilde{\lambda})^2 dy + i \int dx dy J_\mu(x) [\partial_y^\mu G(x-y)] (\lambda' + \tilde{\lambda}) \right] . \tag{8.141}$$

Valutando l'argomento dell'esponenziale troviamo

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int \lambda^2(y) + \tilde{\lambda}^2(y) + 2\lambda'(y)\tilde{\lambda}(y) + \imath \int dx dy J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\lambda'(y) + \\
 & + \imath \int dx dy J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\tilde{\lambda}(y) = \\
 & -\frac{1}{2} \int \lambda^2(y) - \frac{1}{2} \int dy \tilde{\lambda}(y) \left[\tilde{\lambda}(y) - \imath \int dx J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)] \right] + \\
 & + \frac{\imath}{2} \int dx dy J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\tilde{\lambda}(y) - \int dy \lambda'(y) \left[\tilde{\lambda}(y) - \imath \int dx J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)] \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \int \lambda^2(y) dy + \frac{\imath}{2} \int dx dy J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\tilde{\lambda}(y) .
 \end{aligned} \tag{8.142}$$

Quindi l'integrale in $\delta\lambda'$ si fattorizza e si semplifica con il denominatore e otteniamo

$$Z[J] = \exp \left[\frac{1}{2} \int JGJ + \frac{\imath}{2} \int dx dy J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]\tilde{\lambda}(y) \right] . \tag{8.143}$$

Ricapitolando, abbiamo trovato che il funzionale generatore del campo elettromagnetico è dato dalla seguente espressione

$$\boxed{Z[J] = \exp \left[\frac{1}{2} \int dx dy J_\mu(x)G(x-y)J^\mu(y) - \frac{1}{2} \int dx dy dz J_\mu(x)[\partial_y^\mu G(x-y)]J_\nu(z)[\partial_y^\nu G(z-y)] \right]} . \tag{8.144}$$

Nel secondo integrale nell'esponenziale possiamo risolvere l'integrale in y , i.e.

$$\begin{aligned}
 & \int dy [\partial_y^\mu G(x-y)][\partial_y^\nu G(z-y)] = \int dy \frac{dq_1}{(2\pi)^4} \frac{dq_2}{(2\pi)^4} \partial_y^\mu \frac{e^{iq_1(x-y)}}{q_1^2} \partial_y^\nu \frac{e^{iq_2(z-y)}}{q_2^2} = \\
 & = \int dy \frac{dq_1}{(2\pi)^4} \frac{dq_2}{(2\pi)^4} \frac{-iq_1^\mu}{q_1^2} \frac{-iq_2^\nu}{q_2^2} e^{iq_1x} e^{iq_2z} e^{-i(q_1+q_2)y} = \\
 & = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu q^\nu}{q^4} e^{iq(x-z)} = \Delta^{\mu\nu}(x-z) ,
 \end{aligned} \tag{8.145}$$

e quindi $Z[J]$ diventa

$$Z[J] = \exp \left[\frac{1}{2} \int dx dy J_\mu(x)G(x-y)J^\mu(y) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx dy J_\mu(x)\Delta^{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y) \right] , \tag{8.146}$$

cioè

$$\boxed{Z[J] = \exp \left[\frac{1}{2} \int dx dy J_\mu(x)[G^{\mu\nu}(x-y) - \Delta^{\mu\nu}(x-y)]J_\nu(y) \right]} . \tag{8.147}$$

A questo punto possiamo ricavare il propagatore del fotone nella gauge di Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, che è quindi dato da

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) = \delta_{\mu\nu}G(x-y) - \Delta_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2} e^{iq(x-y)}} , \tag{8.148}$$

ed è chiamato **propagatore fotonico trasverso**.

Vogliamo ora estendere il calcolo precedente al caso di una teoria di gauge non abeliana con una funzione di gauge-fixing del tipo

$$f(A) = C , \quad (8.149)$$

ad esempio

$$\partial^\mu A_\mu^a = C^a(x) . \quad (8.150)$$

Il valor medio di un'osservabile O sarà dato dall'espressione

$$\langle O \rangle = \int \delta A e^{-S(A)} \Delta_{\partial A - C}(A) \delta(\partial_\mu A^\mu - C) O(A) , \quad (8.151)$$

dove $\Delta_{\partial A - C}(A)$ soddisfa l'equazione

$$\Delta_{\partial A - C}(A) \int \delta \Omega \delta[\partial^\mu A_\mu^\Omega - C] = 1 . \quad (8.152)$$

e può essere calcolato come

$$\begin{aligned} A_\mu^{\Omega a} &\approx A_\mu^a - f^{abc} g_b(x) A_\mu^c(x) + \partial_\mu g^a(x) , \\ \partial^\mu A_\mu^{\Omega a} &= \partial^\mu A_\mu^a - f^{abc} \partial^\mu [g_b(x) A_\mu^c(x)] + \square g^a(x) , \\ &\rightarrow \partial^\mu A_\mu^{\Omega a} - C^a = \square g^a(x) - f^{abc} \partial^\mu [g_b(x) A_\mu^c(x)] , \\ &\rightarrow \Delta_{\partial A - C}(A) = |\det[\delta^{ab} \square \cdot - f^{abc} \partial^\mu (A_\mu^c \cdot)]| = |\det B| , \end{aligned} \quad (8.153)$$

per cui $\langle O \rangle$ può essere scritto come

$$\langle O \rangle = \int \delta A e^{-S(A)} (\det B) \delta(\partial_\mu A^\mu - C) O(A) . \quad (8.154)$$

Poiché le quantità gauge-invarianti non sono sensibili ad un cambiamento della condizione ausiliaria $C(x)$ possiamo mediare su $C(x)$ con un peso gaussiano, ottenendo così

$$\langle O \rangle = \int \delta C \delta A e^{-S(A)} (\det B) \delta(\partial_\mu A^\mu - C) O(A) e^{-\frac{1}{2\alpha} \int C^2(x) dx} , \quad (8.155)$$

da cui ricaviamo l'espressione finale indipendente da C :

$$\boxed{\langle O \rangle = \int \delta A e^{-S(A)} (\det B) O(A) \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} \int (\partial_\mu A^\mu)^2 dx \right]} . \quad (8.156)$$

Capitolo 9

Simmetrie

9.1 Conservazione della carica

Supponiamo di avere una teoria invariante sotto un gruppo di trasformazioni globali. Come esempio di riferimento possiamo pensare ad un gruppo $SO(N)$ di trasformazioni ortogonali tali che

$$\begin{aligned} OO^T &= O^T O = I , \\ \det O &= 1 . \end{aligned} \tag{9.1}$$

Per trasformazioni infinitesime possiamo porre $O \sim I + g = I + g_a \lambda_a$ e dalla condizione $O^T O = I$ deduciamo che $g^T = -g$, per cui i generatori λ_a sono matrici antisimmetriche. L'algebra del gruppo è descritta dalle seguenti regole di commutazione

$$[\lambda_a, \lambda_b] = f_{abc} \lambda_c , \tag{9.2}$$

dove f_{abc} sono le costanti di struttura. Un campo vettoriale ϕ sotto una rotazione infinitesima viene trasformato nel campo ϕ' dato da

$$\phi'_i = (1 + g_a \lambda_a)_{ij} \phi_j = \phi_i + g_a (\lambda_a)_{ij} \phi_j , \tag{9.3}$$

per cui la variazione $\delta\phi = \phi' - \phi$ sarà data da

$$\delta\phi_i = g_a (\lambda_a)_{ij} \phi_j . \tag{9.4}$$

D'altra parte, la variazione dell'azione è nulla, i.e. $\delta S(\phi) = 0$, perché la teoria è invariante. Se però g_a dipende dal punto dello spazio-tempo, i.e. $g_a = g_a(x)$, avremo che $\delta S \neq 0$. Infatti calcolando δS otteniamo

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) d^4x = \int d^4x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} \delta(\partial_\mu\phi_i) = \\ &= \int d^4x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} \delta\phi_i + \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} \delta\phi_i \right) - \left(\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} \right) \delta\phi_i . \end{aligned} \tag{9.5}$$

Se ϕ soddisfa le equazioni del moto allora avremo

$$\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} = 0 , \tag{9.6}$$

e l'Eq. (9.5) diventa

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_i} \delta \phi_i \right) d^4 x = \int \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_i} g_a(x) (\lambda^a)_{ij} \phi_j \right) d^4 x = \\ &= \int d^4 x [\partial_\mu g_a(x)] \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j + \int d^4 x g_a(x) \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j \right]. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Quando $g_a(x) = \text{cost}$ sappiamo che la variazione dell'azione deve essere identicamente nulla, i.e. $\delta S = 0$, da cui ricaviamo che

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j = 0, \quad (9.8)$$

per cui l'Eq. (9.7) diventa

$$\delta S = \int d^4 x [\partial_\mu g_a(x)] \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j = \int d^4 x [\partial_\mu g_a(x)] J_\mu^a(x), \quad (9.9)$$

dove abbiamo definito la corrente $J_\mu^a(x)$ come

$$J_\mu^a(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j, \quad (9.10)$$

che, come conseguenza dell'Eq. (9.8), ha quadri-divergenza nulla

$$\partial_\mu J_\mu^a = 0. \quad (9.11)$$

Quest'ultima equazione rappresenta una **legge di conservazione**. Dimostriamo questa affermazione con un esempio pratico, cioè nel caso di una teoria descritta dalla lagrangiana seguente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi^i - \frac{\mu_0^2}{2} \phi_i \phi^i - \frac{g_0}{4!} (\phi_i \phi^i)^2. \quad (9.12)$$

La corrente J_μ^a è data da

$$J_\mu^a = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi_i} (\lambda^a)_{ij} \phi_j = (\partial_\mu \phi_i) \lambda_{ij}^a \phi_j. \quad (9.13)$$

Chiamiamo $\Pi_i(x)$ il campo coniugato a $\phi_i(x)$, che è definito come

$$\Pi_i(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi_i} = \partial_0 \phi_i. \quad (9.14)$$

La carica Q^a è definita come l'integrale spaziale della componente temporale della quadri-corrente e vale

$$Q^a = \int d^3 x J_0^a(\vec{x}, t) = \int d^3 x (\partial_0 \phi_i) \lambda_{ij}^a \phi_j = \int d^3 x \Pi_i(x) \lambda_{ij}^a \phi_j(x). \quad (9.15)$$

La carica è indipendente dal tempo, infatti calcolando la derivata temporale avremo

$$\partial_0 Q^a = \int d^3 x \partial_0 J_0^a = \int d^3 x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^a = \int d\sigma \vec{J} \cdot \vec{n} = 0, \quad (9.16)$$

dove l'ultimo passaggio è una conseguenza del fatto che i campi si annullano sulla superficie all'infinito.

Calcoliamo ora il commutatore delle cariche:

$$\begin{aligned}
 [Q^a, Q^b] &= Q^a Q^b - Q^b Q^a = \\
 &= \int d^3x d^3y \left(\Pi_i^x \lambda_{ij}^a \phi_j^x \Pi_k^y \lambda_{km}^b \phi_m^y - \Pi_k^y \lambda_{km}^b \phi_m^y \Pi_i^x \lambda_{ij}^a \phi_j^x \right) = \\
 &= \int d^3x d^3y \left[\Pi^x \lambda^a \phi^x \Pi^y \lambda^b \phi^y - \Pi^y \lambda^b \left(\phi_m(y) \Pi_i(x) - \Pi_i(x) \phi_m(y) + \Pi_i(x) \phi_m(y) \right) \lambda^a \phi^x \right].
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

Usando il fatto che il commutatore dei campi ϕ e Π vale

$$\phi_m(y) \Pi_i(x) - \Pi_i(x) \phi_m(y) = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{im}, \tag{9.18}$$

l'Eq. (9.17) diventa

$$\begin{aligned}
 [Q^a, Q^b] &= \\
 &= \int d^3x d^3y \left[\Pi_i^x \lambda_{ij}^a \phi_j^x \Pi_k^y \lambda_{km}^b \phi_m^y - \Pi_k^y \lambda_{km}^b i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{im} \lambda_{ij}^a \phi_j^x(x) - \Pi_k^y \lambda_{km}^b \Pi_i^x \phi_m^y \lambda_{ij}^a \phi_j^x \right] = \\
 &= \int d^3x d^3y \left\{ \Pi_i^x \left(\lambda_{ij}^a \phi_j^x \Pi_k^y \lambda_{km}^b - \lambda_{km}^b \Pi_k^y \phi_j^x \lambda_{ij}^a \right) \phi_m^y - \Pi_k^y \lambda_{km}^b i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{im} \lambda_{ij}^a \phi_j^x \right\} = \\
 &= \int d^3x d^3y \left\{ \Pi_i^x \left(\lambda_{ij}^a \lambda_{km}^b \phi_j^x \Pi_k^y - \lambda_{km}^b \lambda_{ij}^a \Pi_k^y \phi_j^x \right) \phi_m^y - // \right\} = \\
 &= \int d^3x d^3y \left\{ \Pi_i^x \left[\lambda_{ij}^a \lambda_{km}^b \left([\phi_j(x), \Pi_k(y)] + \Pi_k^y \phi_j^x \right) - \lambda_{km}^b \lambda_{ij}^a \Pi_k^y \phi_j^x \right] \phi_m^y - // \right\} = \\
 &= \int d^3x d^3y \left\{ \Pi_i^x \lambda_{ij}^a \lambda_{km}^b i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{jk} \phi_m^y + \Pi_i^x [\lambda_{ij}^a, \lambda_{km}^b] \Pi_k^y \phi_j^x \phi_m^y - // \right\} = \\
 &= i \int d^3x \Pi_i \lambda_{ij}^a \lambda_{jm}^b \phi_m - i \int d^3x \Pi_k \lambda_{km}^b \lambda_{mj}^a \phi_j + \int d^3x d^3y \Pi_i^x [\lambda_{ij}^a, \lambda_{km}^b] \Pi_k^y \phi_j^x \phi_m^y = \\
 &= i \int d^3x \Pi [\lambda_{ij}^a, \lambda_{jm}^b] \phi_m = i \int d^3x \Pi_i f^{abc} \lambda_{im}^c \phi_m = i f^{abc} Q_c.
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

Abbiamo quindi trovato che

$$\boxed{[Q^a, Q^b] = i f^{abc} Q_c}, \tag{9.20}$$

cioè le Q_a soddisfano le regole di commutazione dei generatori dell'algebra di Lie. Inoltre è facile dimostare che

$$[Q^a, \phi_i(x)] = -i \lambda_{im}^a \phi_m(x), \tag{9.21}$$

cioè le Q_a inducono la trasformazione infinitesima del campo attraverso il commutatore. Per una trasformazione finita avremo

$$\boxed{\phi'_i(x) = e^{i g_a Q_a} \phi_i(x) e^{-i g_a Q_a}}, \tag{9.22}$$

dove l'operatore $e^{i g_a Q_a}$ è proprio l'operatore della trasformazione del gruppo che agisce sullo spazio degli stati.

Prima di studiare l'azione della carica sullo spazio degli stati fisici, facciamo due osservazioni importanti:

1. dal momento che le Q_a sono costanti del moto, esse devono commutare con l'hamiltoniana, i.e.

$$[Q_a, H] = 0 . \quad (9.23)$$

2. Consideriamo poi la trasformazione:

$$e^{-i\vec{P}\cdot\vec{y}} Q_a e^{i\vec{P}\cdot\vec{y}} = \int d^3x e^{-i\vec{P}\cdot\vec{y}} J_a^0(\vec{x}, t) e^{i\vec{P}\cdot\vec{y}} = \int d^3x J_a^0(\vec{x} + \vec{y}, t) = \int d^3x' J_a^0(\vec{x}', t) , \quad (9.24)$$

che è quindi indipendente da \vec{y} . Sotto una trasformazione infinitesima avremo

$$(1 - i\vec{P}\cdot\vec{y}) Q_a (1 + i\vec{P}\cdot\vec{y}) = Q_a - iy_i [P^i, Q_a] = Q_a , \quad (9.25)$$

da cui deduciamo che

$$[Q_a, P^i] = 0 , \quad (9.26)$$

e quindi in definitiva Q_a commuta con il quadrimuplso, i.e.

$$[Q_a, P^\mu] = 0 . \quad (9.27)$$

Valutiamo ora l'azione della carica sul vuoto. A tal fine calcoliamo

$$P^\mu Q_a |0\rangle = Q_a P^\mu |0\rangle = 0 , \quad (9.28)$$

da cui deduciamo che

$$Q_a |0\rangle = c |0\rangle , \quad (9.29)$$

assumendo che non ci siano stati di vuoto degeneri. Prendendo il valore di aspettazione sul vuoto della carica otteniamo

$$\langle 0 | Q_a | 0 \rangle = c = \int d^3x \langle 0 | J_0^a(x) | 0 \rangle = \int d^3x \langle 0 | J_0^a(0) | 0 \rangle . \quad (9.30)$$

Per stimare il termine $\langle 0 | J_0^a(0) | 0 \rangle$ osserviamo che sotto una trasformazione di Lorentz $J_\mu(0)$ trasforma come

$$U(\Lambda) J_\mu(0) U^\dagger(\Lambda) = \Lambda_\mu^\nu J_\nu(0) . \quad (9.31)$$

Prendendo il valore di aspettazione sul vuoto dell'Eq. (9.31) e sfruttando il fatto che il vuoto è Lorentz-invariante avremo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | J^\mu(0) | 0 \rangle &= \langle 0 | U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) J^\mu(0) U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) | 0 \rangle = \langle 0 | U(\Lambda) J^\mu(0) U^\dagger(\Lambda) | 0 \rangle = \\ &= \Lambda_\mu^\nu \langle 0 | J^\nu(0) | 0 \rangle , \end{aligned} \quad (9.32)$$

da cui concludiamo che, poiché $\langle 0 | J^\mu(0) | 0 \rangle$ è un quadrivettore che trasforma secondo una rappresentazione non banale del gruppo di Lorentz e poichè il vuoto è non degenero, allora l'unica possibilità è che sia proporzionale al vettore nullo. Di conseguenza avremo che

$$\langle 0 | J^\mu(0) | 0 \rangle = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow Q_a | 0 \rangle = 0 , \quad (9.33)$$

cioè la carica annichila il vuoto.

Consideriamo ora gli stati a una particella $|p, i\rangle$. Avremo:

$$P^\mu Q_a |p, i\rangle = p^\mu Q_a |p, i\rangle , \quad (9.34)$$

cioè $Q^a|p, i\rangle$ ha lo stesso impulso dello stato $|p, i\rangle$ e quindi deve essere una combinazione lineare di stati con impulso p :

$$Q^a|p, i\rangle = \sum_j c_{ij}|p, j\rangle . \quad (9.35)$$

In altre parole gli stati a 1-particella forniscono una rappresentazione (non banale) del gruppo di simmetria.

Gli stati a 2-particelle $|p_1, i; p_2, j\rangle$ trasformano come il prodotto diretto \otimes di stati a 1-particella; e così via per gli stati con un numero arbitrario di particelle.

9.2 Identità di Ward

9.2.1 Primo metodo

Consideriamo le funzioni di Wightman $\langle 0|\phi_i(x)\phi_j(y)|0\rangle$. Se il vuoto è invariante, cioè se $Q^a|0\rangle = 0$, allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0|Q_a\phi_i(x)\phi_j(y) - \phi_i(x)\phi_j(y)Q_a|0\rangle = \\ &= \langle 0|Q_a\phi_i(x)\phi_j(y) - \phi_i(x)Q_a\phi_j(y) + \phi_i(x)Q_a\phi_j(y) - \phi_i(x)\phi_j(y)Q_a|0\rangle = \\ &= \langle 0|[Q_a, \phi_i(x)]\phi_j(y)|0\rangle + \langle 0|\phi_i(x)[Q_a, \phi_j(y)]|0\rangle = \\ &= -i\lambda_{ik}^a\langle 0|\phi_k(x)\phi_j(y)|0\rangle - i\lambda_{jk}^a\langle 0|\phi_i(x)\phi_k(y)|0\rangle , \end{aligned} \quad (9.36)$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} \lambda_{ik}^a\Delta_{kj}(x-y) + \lambda_{jk}^a\Delta_{ik}(x-y) &= 0 , \\ \lambda_{ik}^a\Delta_{kj}(x-y) - \lambda_{kj}^a\Delta_{ik}(x-y) &= 0 , \\ \lambda^a\Delta(x-y) - \Delta(x-y)\lambda^a &= 0 , \end{aligned} \quad (9.37)$$

e quindi

$$\boxed{[\lambda^a, \Delta(x-y)] = 0} . \quad (9.38)$$

Enunciamo ora il **Lemma di Schur**.

Se abbiamo un gruppo continuo di trasformazioni rappresentate da un insieme di operatori $U(g)$, allora dato un qualsiasi operatore A , se:

$$[A, U(g)] = 0 \quad \forall g \rightarrow A = cI , \quad (9.39)$$

cioè A è un multiplo dell'identità. Resta inteso che il gruppo di trasformazioni è un gruppo di simmetria della teoria.

Per il lemma di Schur avremo che $\Delta(x-y)$ deve essere proporzionale all'identità, i.e.

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta(x-y) &= F(x-y)I , \\ \Delta_{ij}(x-y) &= F(x-y)\delta_{ij} . \end{aligned}} \quad (9.40)$$

La relazione precedente (o equivalentemente l'Eq. (9.38)) è un caso particolare delle **identità di Ward**.

9.2.2 Secondo metodo

Presentiamo ora un secondo metodo per derivare l'identità di Ward (9.38). L'ingrediente fondamentale per ottenere il risultato finale è la **proprietà di clustering** delle funzioni di Wightman, che ora discutiamo in dettaglio.

Consideriamo la funzione di Wightman $\langle 0|A(x)B(y)|0\rangle$. Inserendo la spettralizzazione dell'identità avremo

$$\langle 0|A(x)B(y)|0\rangle = \langle 0|A(x)|0\rangle\langle 0|B(y)|0\rangle + \int d^3p \langle 0|A(x)|p\rangle\langle p|B(y)|0\rangle + \dots, \quad (9.41)$$

dove

$$\int d^3p \langle 0|A(x^0, \vec{x})|p\rangle\langle p|B(y^0, \vec{y})|0\rangle = \int d^3p \langle 0|A(x^0, 0)|p\rangle\langle p|B(y^0, 0)|0\rangle e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}. \quad (9.42)$$

Enunciamo ora il **lemma di Riemann-Lebesgue**.

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione Lebesgue-integrabile allora

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{izx} dx = 0. \quad (9.43)$$

Torniamo all'Eq. (9.42) e osserviamo che, poiché $|p\rangle$ appartiene allo spettro continuo dell'operatore impulso \vec{P} , è lecito assumere che gli elementi di matrice nell'integrando dipendano da \vec{p} in modo sufficientemente regolare (siano Lebesgue-integrabili) da permettere l'uso del lemma di Riemann-Lebesgue. Di conseguenza l'integrale tende a zero quando $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty$. Quindi, se il vuoto è unico, deve valere la seguente relazione

$$\lim_{|\vec{x}-\vec{y}| \rightarrow \infty} \langle 0|A(x)B(y)|0\rangle = \langle 0|A(x)|0\rangle\langle 0|B(y)|0\rangle, \quad (9.44)$$

che rappresenta l'espressione matematica della **proprietà di clustering** della teoria di campo. In altre parole, l'elemento di matrice sul vuoto del prodotto di operatori si fattorizza nel prodotto degli elementi di matrice degli operatori quando questi sono separati da una distanza spaziale infinita. Per quanto riguarda la funzione di Green, la proprietà di clustering implica la seguente relazione

$$\begin{aligned} \lim_{|\vec{x}-\vec{y}| \rightarrow \infty} \langle 0|\mathcal{T}[A(x)B(y)]|0\rangle &= \lim_{|\vec{x}-\vec{y}| \rightarrow \infty} \langle 0|A(x)B(y)|0\rangle\theta(x^0 - y^0) + \langle 0|B(y)A(x)|0\rangle\theta(y^0 - x^0) = \\ &= \langle 0|A(x)|0\rangle\langle 0|B(y)|0\rangle\theta(x^0 - y^0) + \langle 0|B(y)|0\rangle\langle 0|A(x)|0\rangle\theta(y^0 - x^0) = \\ &= \mathcal{T}[\langle 0|A(x)|0\rangle\langle 0|B(y)|0\rangle], \end{aligned} \quad (9.45)$$

cioè il valor medio del T-prodotto di due operatori è uguale al T-prodotto del prodotto dei valori medi quando i medesimi operatori sono separati da una distanza spaziale infinita.

Avendo spiegato la proprietà di clustering, possiamo ora riderivare l'identità di Ward. Consideriamo una corrente $J_\mu^a(z)$ che sia conservata, i.e. $\partial^\mu J_\mu^a = 0$. Consideriamo poi la funzione di Schwinger, definita come: $\langle 0|\mathcal{T}[J_\mu^a(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle$ e calcoliamone la derivata (precisamente la quadri-divergenza) rispetto a z . Il risultato che otteniamo è il seguente

$$\begin{aligned} \partial_z^\mu \langle 0|\mathcal{T}[J_\mu^a(z)\phi_i(x)\phi_j(y)]|0\rangle &= \delta(z^0 - x^0) \langle 0|\mathcal{T}\{[J_0^a(z), \phi_i(x)]\phi_j(y)\}|0\rangle + \\ &+ \delta(z^0 - y^0) \langle 0|\mathcal{T}\{[J_0^a(z), \phi_j(y)]\phi_i(x)\}|0\rangle. \end{aligned} \quad (9.46)$$

Per valutare il commutatore tra la componente temporale della corrente e il campo è sufficiente conoscere il commutatore tra la carica e il campo, i.e.

$$\begin{aligned} [Q_a, \phi_i(\vec{x}, x^0)] &= -i\lambda_{ik}^a \phi_k(\vec{x}, x^0) = \left[\int d^3z J_0^a(\vec{z}, z^0), \phi_i(\vec{x}, x^0) \right] = \\ &= \int d^3z [J_0^a(\vec{z}, z^0), \phi_i(\vec{x}, x^0)] = -i\lambda_{ik}^a \int d^3z \delta^3(\vec{z} - \vec{x}) \phi_k(\vec{z}, x^0), \end{aligned} \quad (9.47)$$

da cui ricaviamo che

$$[J_0^a(\vec{z}, z^0), \phi_i(\vec{x}, x^0)] = -i\lambda_{ik}^a \delta^3(\vec{z} - \vec{x}) \phi_k(\vec{z}, x^0). \quad (9.48)$$

Utilizzando il risultato precedente nell'Eq (9.46) otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_z^\mu \langle 0 | \mathcal{T} [J_\mu^a(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle &= \delta(z^0 - x^0) \langle 0 | \mathcal{T} \left\{ -i\lambda_{ik}^a \delta^3(\vec{z} - \vec{x}) \phi_k(\vec{x}, x^0) \phi_j(y) \right\} | 0 \rangle + \\ &+ \delta(z^0 - y^0) \langle 0 | \mathcal{T} \left\{ -i\lambda_{jk}^a \delta^3(\vec{z} - \vec{y}) \phi_k(\vec{y}, y^0) \phi_i(x) \right\} | 0 \rangle = \\ &= -i\lambda_{ik}^a \delta^4(z - x) \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_k(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle + \\ &+ (-i)\lambda_{jk}^a \delta^4(z - y) \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_k(y) \phi_i(x)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Riassumendo, abbiamo trovato che la quadri-divergenza della funzione di Schwinger è data da

$$\boxed{\partial_z^\mu \langle 0 | \mathcal{T} [J_\mu^a(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle = -i\lambda_{ik}^a \delta^4(z - x) \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_k(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle - i\lambda_{jk}^a \delta^4(z - y) \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_k(y) \phi_i(x)] | 0 \rangle}. \quad (9.50)$$

Integrando la quadri-divergenza sul quadrispazio d^4z otteniamo

$$\begin{aligned} \int d^4z \partial_z^\mu \langle 0 | \mathcal{T} [J_\mu^a(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle &= \int d^4z \partial_z^0 \langle 0 | \mathcal{T} [J_0^a(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle + \\ &+ \int d^4z \partial_z^i \langle 0 | \mathcal{T} [J_i^a(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Consideriamo il secondo integrale nell'Eq. (9.51), i.e.

$$\begin{aligned} \int d^4z \partial_z^i \langle 0 | \mathcal{T} [J_i^a(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle &= \int dz^0 \int d^3z \partial_z^i \langle 0 | \mathcal{T} [J_i^a(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle = \\ &= \int dz^0 \int d\sigma n^i \langle 0 | \mathcal{T} [J_i^a(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Nell'integrale

$$\int d\sigma n^i \langle 0 | \mathcal{T} [J_i^a(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle, \quad (9.53)$$

la superficie d'integrazione è all'infinito spaziale, per cui per la proprietà di clustering l'elemento di matrice si fattorizza in

$$\mathcal{T} [\langle 0 | J_i^a(z) | 0 \rangle \langle 0 | \phi_i(x) \phi_j(y) | 0 \rangle], \quad (9.54)$$

e per l'invarianza di Lorentz:

$$\langle 0 | J_i^a(z) | 0 \rangle = 0. \quad (9.55)$$

Consideriamo il primo integrale nell'Eq. (9.51), i.e.

$$\begin{aligned}
 & \int d^4 z \partial_0^z \langle 0 | \mathcal{T} [J_0^a(z^0, \vec{z}) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle = \\
 & = \int d^3 z \langle 0 | J_0^a(\infty, \vec{z}) \mathcal{T} [\phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle - \int d^3 z \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_i(x) \phi_j(y)] J_0^a(-\infty, \vec{z}) | 0 \rangle = \quad (9.56) \\
 & = \langle 0 | Q^a \mathcal{T} [\phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle - \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_i(x) \phi_j(y)] Q^a | 0 \rangle = 0 ,
 \end{aligned}$$

perché il vuoto è annichilato dalla carica. Abbiamo quindi dimostrato che

$$\boxed{\int d^4 z \partial_\mu^z \langle 0 | \mathcal{T} [J_a^\mu(z) \phi_i(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle = 0} . \quad (9.57)$$

Ma allora

$$\lambda_{ik}^a \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_k(x) \phi_j(y)] | 0 \rangle = -\lambda_{jk}^a \langle 0 | \mathcal{T} [\phi_k(y) \phi_i(x)] | 0 \rangle , \quad (9.58)$$

e, prendendo $x^0 > y^0$, avremo

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ik}^a \langle 0 | \phi_k(x) \phi_j(y) | 0 \rangle &= -\lambda_{jk}^a \langle 0 | \phi_i(x) \phi_k(y) | 0 \rangle , \\
 \lambda_{ik}^a \Delta_{kj}(x-y) &= -\lambda_{jk}^a \Delta_{ik}(x-y) , \\
 \lambda_{ik}^a \Delta_{kj}(x-y) - \lambda_{kj}^a \Delta_{ik}(x-y) &= 0 , \\
 \lambda_{ik}^a \Delta_{kj}(x-y) - \Delta_{ik}(x-y) \lambda_{kj}^a &= 0 , \\
 [\lambda^a, \Delta(x-y)] &= 0 ,
 \end{aligned} \quad (9.59)$$

cioè l'identità di Ward (9.38) ottenuta precedentemente.

9.3 Terzo metodo

È possibile ricavare l'identità di Ward direttamente dall'integrale funzionale. Consideriamo come sempre la teoria descritta dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi_i \phi_i + \frac{g_0}{4!} (\phi_i \phi_i)^2 . \quad (9.60)$$

Regolarizziamo la teoria in modo tale che la simmetria $SO(N)$ sia conservata anche dopo la regolarizzazione. Consideriamo il funzionale generatore euclideo

$$Z[\eta] = \int \delta\phi \exp \left[-S(\phi) + \int \eta_k(x) \phi_k(x) \right] d^4x \quad (9.61)$$

e facciamo un cambiamento di variabili

$$\phi_i(x) = \phi'_i(x) + g^a(x) \lambda_{ij}^a \phi'_j(x) , \quad (9.62)$$

che, punto per punto, è una trasformazione ortogonale sui campi. A seguito del cambio di variabili il funzionale generatore diventa

$$Z[J] = \int \delta\phi' \exp \left[-S(\phi' + g^a \lambda^a \phi') + \int \eta_k(x) \left(\phi'_k(x) + g^a(x) \lambda_{kl}^a \phi'_l(x) \right) \right] d^4x , \quad (9.63)$$

dove il determinante jacobiano della trasformazione vale 1, infatti

$$\frac{\delta\phi}{\delta\phi'} = \det(1 + g^a \lambda^a) = 1 + g^a \text{tr}(\lambda^a) + O(g^2) = 1 + O(g^2) , \quad (9.64)$$

perché $\text{tr}\lambda^a = 0$. Sviluppando i prodotti otteniamo

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \delta\phi' \exp \left\{ -S(\phi') - \int \partial_\mu g^a(x) J_a^\mu(x) + \int \eta_k(x) \left[\phi'_k(x) + g^a(x) \lambda_{kl}^a \phi'_l(x) \right] d^4x \right\} = \\ &= \int \delta\phi e^{-S(\phi) + \int \eta_k(x) \phi_k(x)} \left[1 - \int \partial_\mu g^a(x) J_a^\mu(x) + \int \eta_k(x) g^a(x) \lambda_{kl}^a \phi_l(x) + O(g^2) \right] = \\ &= Z[J] - \int \delta\phi \int \partial_\mu g^a(x) J_a^\mu(x) e^{-S(\phi) + \int \eta\phi} + \int \delta\phi \int \eta_k(x) g^a(x) \lambda_{kl}^a \phi_l(x) e^{-S(\phi) + \int \eta\phi} + O(g^2) , \end{aligned} \quad (9.65)$$

da cui deduciamo che

$$\int \delta\phi \int \partial_\mu g^a(x) J_a^\mu(x) e^{-S(\phi) + \int \eta\phi} = \int \delta\phi \int \eta_k(x) g^a(x) \lambda_{kl}^a \phi_l(x) e^{-S(\phi) + \int \eta\phi} . \quad (9.66)$$

L'espressione precedente può essere riscritta come

$$\boxed{\int \partial_\mu g^a(x) \langle J_a^\mu(x) \rangle_\eta d^4x = \int g^a(x) \eta_k(x) \lambda_{kl}^a \langle \phi_l(x) \rangle_\eta d^4x} , \quad (9.67)$$

e contiene **tutte le identità di Ward**. Integrando per parti il lato sinistro dell'Eq. (9.67) otteniamo

$$- \int g^a(x) \partial_\mu \langle J_a^\mu(x) \rangle_\eta d^4x = \int g^a(x) \eta_k(x) \lambda_{kl}^a \langle \phi_l(x) \rangle_\eta d^4x , \quad (9.68)$$

ed essendo $g^a(x)$ arbitrarie, per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, troviamo il seguente risultato importante:

$$\boxed{\partial_\mu \langle J_a^\mu(x) \rangle_\eta + \eta_k(x) \lambda_{kl}^a \langle \phi_l(x) \rangle_\eta = 0} . \quad (9.69)$$

A questo punto basta prendere le derivate funzionali rispetto a η . Ad esempio, prendendo la derivata prima otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\eta_i(y)} \left[\partial_\mu^x \langle J_a^\mu(x) \rangle_\eta + \eta_k(x) \lambda_{kl}^a \langle \phi_l(x) \rangle_\eta \right] &= 0 , \\ \frac{\delta}{\delta\eta_i(y)} \left[\partial_\mu^x \int \delta\phi J_a^\mu(x) e^{-S(\phi) + \int \eta\phi} + \eta_k(x) \lambda_{kl}^a \int \delta\phi \phi_l(x) e^{-S(\phi) + \int \eta\phi} \right] &= \\ = \partial_\mu^x \int \delta\phi J_a^\mu(x) \phi_i(y) e^{-S(\phi) + \int \eta\phi} + \delta_{ik} \delta^4(x-y) \lambda_{kl}^a \int \delta\phi \phi_l(x) e^{-S(\phi) + \int \eta\phi} + \\ + \eta_k(x) \lambda_{kl}^a \int \delta\phi \phi_l(x) \phi_i(y) e^{-S(\phi) + \int \eta\phi} &= 0 , \end{aligned} \quad (9.70)$$

da cui, mettendo $\eta = 0$, otteniamo la 1^a **identità di Ward**, i.e.

$$\boxed{\partial_\mu \langle J_a^\mu(x) \phi_i(y) \rangle + \delta^4(x-y) \lambda_{il}^a \langle \phi_l(x) \rangle = 0} . \quad (9.71)$$

Prendendo le derivate funzionali successive

$$\frac{\delta}{\delta\eta_m(z)} \frac{\delta}{\delta\eta_i(y)} \cdots \Big|_{\eta=0} , \quad (9.72)$$

otteniamo tutte le possibili identità di Ward.

In particolare, consideriamo la seconda identità di Ward

$$\begin{aligned} \partial_\mu^a \langle J_a^\mu(z) \phi_i(x) \phi_j(y) \rangle + \delta^4(z-x) \lambda_{ii}^a \langle \phi_l(x) \phi_j(y) \rangle + \\ + \delta^4(z-y) \lambda_{jj}^a \langle \phi_i(x) \phi_l(y) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (9.73)$$

e affrontiamo il problema della rinormalizzazione. Per rendere finita la funzione a 2-punti dobbiamo riscalar i campi ponendo $\phi = Z^{-1/2} \phi_0$ cosicché la funzione di Green $\Delta_R = \langle \phi \phi \rangle = Z^{-1} \Delta_B$ è finita quando il cut-off viene rimosso se aggiustiamo opportunamente m_0 e g_0 . Di conseguenza anche il termine

$$\partial_\mu \left\langle J_a^\mu(z) \frac{\phi_i(x)}{\sqrt{Z}} \frac{\phi_j(x)}{\sqrt{Z}} \right\rangle, \quad (9.74)$$

è finito. Da questo fatto si può poi dimostrare che anche il termine

$$\langle J_a^\mu(z) \frac{\phi_i(x)}{\sqrt{Z}} \frac{\phi_j(x)}{\sqrt{Z}} \rangle, \quad (9.75)$$

è finito.

9.4 Parametro d'ordine

Vediamo cosa succede quando il **vuoto non è invariante** sotto una trasformazione del gruppo di simmetria.

Ritorniamo allo spazio di Minkowski ordinario. Supponiamo che la teoria abbia un gruppo continuo di simmetria con le correnti conservate $\partial_\mu J_a^\mu(x) = 0$, ma che

$$Q_a |0\rangle \neq 0. \quad (9.76)$$

Possiamo subito vedere che lo stato $Q_a |0\rangle$ ha norma infinita. Infatti avremo

$$\begin{aligned} \langle 0 | Q_a Q_a | 0 \rangle &= \int d^3x d^3y \langle 0 | J_a^0(\vec{x}, x^0) J_a^0(\vec{y}, y^0) | 0 \rangle = \\ &= \int d^3x d^3y \langle 0 | e^{-i\vec{P}\cdot\vec{y}} J_a^0(\vec{x} - \vec{y}, x^0) e^{i\vec{P}\cdot\vec{y}} e^{-i\vec{P}\cdot\vec{y}} J_a^0(0, y^0) e^{i\vec{P}\cdot\vec{y}} | 0 \rangle = \\ &= \int d^3x d^3y \langle 0 | J_a^0(\vec{x} - \vec{y}, x^0) J_a^0(0, y^0) | 0 \rangle \propto \text{Volume} = \infty. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Di conseguenza l'operatore di carica Q_a è mal definito nel nostro spazio di Hilbert.

Introduciamo ora il concetto di **parametro d'ordine**. Consideriamo un campo locale $O_i(x)$ che può essere un campo fondamentale (ad esempio $\phi_i(x)$) o un qualsiasi prodotto di campi locali. Il campo $O_i(x)$ trasforma come trasforma una rappresentazione irriducibile non banale del gruppo di simmetria, cioè

$$[Q_a, O_i(x)] = i R_{aik} O_k(x). \quad (9.78)$$

Se la simmetria è rotta allora esiste qualche combinazione O di campi locali tale che

$$\langle 0 | [Q_a, O_i(x)] | 0 \rangle = i R_{aik} \langle 0 | O_k(x) | 0 \rangle \neq 0, \quad (9.79)$$

perché se così non fosse tutte le funzioni di correlazione sarebbero invarianti sotto la simmetria.

Consideriamo il valore di aspettazione sul vuoto $\langle 0|J_a^\mu(x)O_i(0)|0\rangle$ e inseriamo un insieme completo di stati intermedi, i.e.

$$\begin{aligned}
 \langle 0|J_a^\mu(x)O_i(0)|0\rangle &= \sum_n \langle 0|J_a^\mu(x)|\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|O_i(0)|0\rangle = \\
 &= \sum_n \langle 0|e^{iPx} J_a^\mu(0)e^{-iPx}|\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|O_i(0)|0\rangle = \\
 &= \sum_n \langle 0|J_a^\mu(0)|\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|O_i(0)|0\rangle e^{-ip_n x} = \\
 &= \int \sum_n \langle 0|J_a^\mu(0)|\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|O_i(0)|0\rangle e^{-ip_n x} \delta^4(p_n - q) d^4q = \\
 &= \int d^4q e^{-iqx} \sum_n \langle 0|J_a^\mu(0)|\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|O_i(0)|0\rangle \delta^4(p_n - q) d^4q = \\
 &= \int d^4q e^{-iqx} \tilde{\rho}_{a,i}^\mu(q) ,
 \end{aligned} \tag{9.80}$$

e, poiché q appartiene allo spettro degli stati fisici, devono valere le condizioni $q^2 \geq 0$, $q^0 \geq 0$. L'invarianza di Lorentz implica la seguente condizione su $\tilde{\rho}$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_{a,i}^\mu(\Lambda q) &= \sum_n \langle 0|J_a^\mu(0)|\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|O_i(0)|0\rangle \delta^4(p_n - \Lambda q) = \\
 &= \sum_n \langle 0|J_a^\mu(0)|\Lambda\tilde{n}\rangle \langle \Lambda\tilde{n}|O_i(0)|0\rangle \delta^4(\Lambda p_n - \Lambda q) = \\
 &= \sum_n \langle 0|U^\dagger(\Lambda)J_a^\mu(0)U(\Lambda)|\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|U^\dagger(\Lambda)O_i(0)U(\Lambda)|0\rangle \delta^4(\Lambda p_n - \Lambda q) = \\
 &= \sum_n \Lambda^\mu{}_\nu \langle 0|J_a^\nu(0)|\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|O_i(0)|0\rangle \delta^4(p_n - q) = \\
 &= \Lambda^\mu{}_\nu \tilde{\rho}_{a,i}^\nu(q) ,
 \end{aligned} \tag{9.81}$$

per cui $\tilde{\rho}^\mu(q)$ deve essere proporzionale a q^μ , i.e.

$$\tilde{\rho}^\mu(q) \propto q^\mu , \tag{9.82}$$

e precisamente

$$\boxed{\tilde{\rho}_{a,i}^\mu(q) = \rho_{a,i}(q^2) q^\mu \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3}} . \tag{9.83}$$

La $\theta(q^0)$ è necessaria ad assicurare che $\tilde{\rho}_{a,i}^\mu(q) = 0$ per $q^0 < 0$. Inoltre $\rho_{a,i}(q^2) = 0$ per $q^2 < 0$. Il fattore $(2\pi)^3$ appare, invece, solo per convenienza. Tornando al valore di aspettazione $\langle 0|J_a^\mu(x)O_i(0)|0\rangle$, possiamo quindi scrivere

$$\langle 0|J_a^\mu(x)O_i(0)|0\rangle = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-iqx} \rho_{a,i}(q^2) q^\mu \theta(q^0) . \tag{9.84}$$

Usando la conservazione della corrente $\partial_\mu J_a^\mu(x) = 0$ otteniamo

$$\partial_\mu \langle 0|J_a^\mu(x)O_i(0)|0\rangle = 0 = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{-iqx} -iq^2 \rho_{a,i}(q^2) \theta(q^0) , \tag{9.85}$$

da cui ricaviamo la relazione

$$q^2 \rho_{a,i}(q^2) = 0 . \quad (9.86)$$

A questo punto saremmo portati a concludere che $\rho_{a,i}(q^2) = 0$ per tutti i q^2 . Tuttavia $\rho_{a,i}(q^2)$ è una distribuzione e, nel campo delle distribuzioni, esistono altre soluzioni del tipo

$$\boxed{\rho_{a,i}(q^2) = C_{a,i} \delta(q^2)} . \quad (9.87)$$

Se qualcuno dei $C_{a,i} \neq 0$ allora deve esistere uno stato con $q^2 = 0$ e quindi la teoria deve avere particelle a massa nulla, perché, se così non fosse, lo spettro delle energie del centro di massa q^2 non si estenderebbe fino a zero.

Capitolo 10

Rottura di simmetria

10.1 Promemoria sul prodotto scalare nello spazio di Hilbert

Ricordiamo come è definito il prodotto scalare (ϕ, ψ) di due vettori ϕ e ψ nello spazio di Hilbert: (ϕ, ψ) è lineare in ψ e antilineare in ϕ , cioè

$$\begin{aligned}(\phi, c\psi) &= c(\phi, \psi) , \\(c\phi, \psi) &= c^*(\phi, \psi) , \\(\phi, \psi) &= (\psi, \phi)^* , \\(\phi, c_1\psi_1 + c_2\psi_2) &= c_1(\phi, \psi_1) + c_2(\phi, \psi_2) , \\(c_1\phi_1 + c_2\phi_2, \psi) &= c_1^*(\phi_1, \psi) + c_2^*(\phi_2, \psi) , \\(\psi, \psi) &\geq 0 ,\end{aligned}\tag{10.1}$$

con $(\psi, \psi) = 0$ se e solo se $\psi = 0$.

Un operatore A è lineare se soddisfa la seguente condizione di linearità

$$A(c\psi + d\phi) = cA\psi + dA\phi .\tag{10.2}$$

L'aggiunto hermitiano di un operatore lineare è definito dalle condizioni

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi, \psi) = (\psi, A\phi)^* .\tag{10.3}$$

Un operatore lineare e unitario è definito da

$$\begin{aligned}(U\phi, U\psi) &= (\phi, \psi) , \\U(\xi\phi + \eta\psi) &= \xi U\phi + \eta U\psi .\end{aligned}\tag{10.4}$$

Un operatore antilineare e antiunitario è definito da

$$\begin{aligned}(U\phi, U\psi) &= (\phi, \psi)^* , \\U(\xi\phi + \eta\psi) &= \xi^*U\phi + \eta^*U\psi .\end{aligned}\tag{10.5}$$

Se definiamo l'aggiunto hermitiano di un operatore antilineare come

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi, \psi) ,\tag{10.6}$$

avremmo che

$$\begin{aligned}(c\phi, A^\dagger\psi) &= c^*(\phi, A^\dagger\psi) = (Ac\phi, \psi) = (c^*A\phi, \psi) = \\&= c(A\phi, \psi) = c(\phi, A^\dagger\psi) ,\end{aligned}\tag{10.7}$$

cioè il lato sinistro è antilineare in ϕ , mentre il lato destro è lineare in ϕ , il che non è consistente. Definiamo quindi l'aggiunto hermitiano di un operatore antilineare come

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi, \psi)^* = (\psi, A\phi) , \quad (10.8)$$

cosicché avremo

$$\begin{aligned} (c\phi, A^\dagger\psi) &= c^*(\phi, A^\dagger\psi) = (Ac\phi, \psi)^* = (c^*A\phi, \psi)^* = \\ &= c^*(A\phi, \psi)^* = c^*(\phi, A^\dagger\psi) , \end{aligned} \quad (10.9)$$

che è consistente con la definizione del prodotto scalare. Ricapitolando avremo

$$\begin{aligned} \text{Op. lin. unitario } (U\phi, U\psi) &= (\phi, U^\dagger U\psi) = (\phi, \psi) , \\ \text{Op. ant. antiunitario } (U\phi, U\psi) &= (\phi, U^\dagger U\psi)^* = (\phi, \psi)^* , \end{aligned} \quad (10.10)$$

cosicché sia per un operatore lineare unitario che per un operatore antilineare e antiunitario avremo che vale la condizione

$$U^\dagger U = I . \quad (10.11)$$

10.2 CPT intermezzo

Consideriamo l'operatore $\Theta = \text{CPT}$. Θ è antilineare e antiunitario. Il teorema CPT stabilisce che qualsiasi teoria quantistica relativistica di campo locale deve essere invariante sotto trasformazioni che simultaneamente invertono la carica (C) di tutte le particelle, invertono l'orientazione dello spazio, o parità (P), e invertono la direzione del tempo (T). Per un campo scalare $O(x)$ e un campo 4-vettoriale J^μ la trasformazione CPT si esprime come

$$\boxed{\begin{aligned} \Theta O(x)\Theta^\dagger &= O(-x) , \\ \Theta J^\mu(x)\Theta^\dagger &= -J^\mu(-x) , \end{aligned}} . \quad (10.12)$$

Esaminiamo ora il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto $J^\mu O_i$:

$$\begin{aligned} \langle 0|J_a^\mu(x)O_i(0)|0\rangle &= (\psi_\Omega, J_a^\mu(x)O_i(0)\psi_\Omega) = (\psi_\Omega, \Theta^\dagger\Theta J_a^\mu(x)O_i(0)\psi_\Omega) = \\ &= (\Theta\psi_\Omega, \Theta J_a^\mu(x)O_i(0)\psi_\Omega)^* = (\Theta\psi_\Omega, \Theta J_a^\mu(x)\Theta^\dagger\Theta O_i(0)\psi_\Omega)^* = \\ &= (\Theta\psi_\Omega, \Theta J_a^\mu(x)\Theta^\dagger\Theta O_i(0)\Theta^\dagger\Theta\psi_\Omega)^* = \\ &= (\psi_\Omega, -J_a^\mu(-x)O_i(0)\psi_\Omega)^* = -(\psi_\Omega, J_a^\mu(-x)O_i(0)\psi_\Omega)^* = \\ &= -(J_a^\mu(-x)O_i(0)\psi_\Omega, \psi_\Omega) = -(O_i(0)\psi_\Omega, J_a^\mu(-x)\psi_\Omega) = \\ &= -(\psi_\Omega, O_i(0)J_a^\mu(-x)\psi_\Omega) = -\langle 0|O_i(0)J_a^\mu(-x)|0\rangle , \end{aligned} \quad (10.13)$$

cioè abbiamo trovato che

$$\boxed{\langle 0|J_a^\mu(x)O_i(0)|0\rangle = -\langle 0|O_i(0)J_a^\mu(-x)|0\rangle} . \quad (10.14)$$

Quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \langle 0|O_i(0)J_a^\mu(x)|0\rangle &= -\langle 0|J_a^\mu(-x)O_i(0)|0\rangle = -C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{iqx} \delta(q^2) q^\mu \theta(q^0) = \\ &= \langle 0|J_a^\mu(x)O_i(0)|0\rangle^* = C_{a,i}^* \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} e^{iqx} \delta(q^2) q^\mu \theta(q^0) , \end{aligned} \quad (10.15)$$

da cui deduciamo che

$$\boxed{C_{a,i}^* = -C_{a,i}} , \quad (10.16)$$

cioè $C_{a,i}$ è immaginario puro, come conseguenza **del teorema CPT**.

10.3 Bosoni di Goldstone

Consideriamo il valore di aspettazione sul vuoto del commutatore

$$\langle 0|[J_a^\mu(x), O_i(0)]|0\rangle = C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \delta(q^2) q^\mu \theta(q^0) (e^{-iqx} + e^{iqx}) . \quad (10.17)$$

Ponendo $\mu = 0$ e integrando in d^3x otteniamo

$$\begin{aligned} \int d^3x \langle 0|[J_a^0(\vec{x}, x^0), O_i(0)]|0\rangle &= \langle 0|[Q_a, O_i(0)]|0\rangle = \int d^3x \langle 0|[J_a^0(\vec{x}, 0), O_i(0)]|0\rangle = \\ &= \int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \delta(q^2) q^0 \theta(q^0) (e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = \\ &= \int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \delta(q_0^2 - |\vec{q}|^2) q^0 \theta(q^0) (e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = \\ &= \int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \delta[(q_0 - |\vec{q}|)(q_0 + |\vec{q}|)] q^0 \theta(q^0) (e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = \\ &= \int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \left[\frac{\delta(q_0 - |\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} + \frac{\delta(q_0 + |\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} \right] q^0 \theta(q^0) (e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = \\ &= \int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \frac{\delta(q_0 - |\vec{q}|)}{2|\vec{q}|} q^0 \theta(q^0) (e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = \\ &= \int d^3x C_{a,i} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} + e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = \\ &= \int d^3x C_{a,i} \delta^3(x) = \\ &= C_{a,i} . \end{aligned} \quad (10.18)$$

Ricapitolando, abbiamo trovato il seguente risultato

$$\boxed{C_{a,i} = \langle 0|[Q_a, O_i(0)]|0\rangle = iR_{ik}^a \langle 0|O_k(0)|0\rangle} . \quad (10.19)$$

Se la **simmetria è spontaneamente rotta** avremo che per qualche a :

$$C_{a,i} \neq 0 , \quad (10.20)$$

e quindi

$$\boxed{\rho_{a,i}(q^2) = i\delta(q^2) R_{ik}^a \langle O_k \rangle} . \quad (10.21)$$

Di conseguenza, finché la simmetria è rotta, $\rho_i^a(q^2)$ non può annullarsi, ma piuttosto consiste interamente di un termine proporzionale a $\delta(q^2)$. Tale termine può ovviamente nascere solo in una teoria che ha particella a massa nulla, perché, se così non accadesse, lo spettro delle energie (al quadrato) del centro di massa ρ_n^2 non potrebbe estendersi fino a zero.

Vediamo ora di che particelle si tratta. Lo stato $O_i(0)|0\rangle$ è invariante per rotazioni. Per dimostrarlo basta calcolare esplicitamente l'azione di $U(R)$, i.e.

$$U(R)O_i(0)|0\rangle = U(R)O_i(0)U^\dagger(R)U(R)|0\rangle = O_i(0)|0\rangle . \quad (10.22)$$

Sotto una rotazione lo stato non vuoto $|n, i\rangle$ trasforma come

$$U(R)|n, i\rangle = \sum_j d_{ij}|n, i\rangle . \quad (10.23)$$

Calcolando l'elemento di matrice dell'operatore O tra lo stato vuoto e lo stato $|n\rangle$ otteniamo

$$\begin{aligned} \langle n|O_k(0)|0\rangle &= \langle n|U^\dagger U O_k(0) U^\dagger U|0\rangle = \langle n|U^\dagger O_k(0)|0\rangle = \\ &= \sum_j d_{ij} \langle n|O_k(0)|0\rangle = \sum_j \delta_{ij} \langle n|O_k(0)|0\rangle , \end{aligned} \quad (10.24)$$

da cui deduciamo che $d_{ij} = \delta_{ij}$. Ma questo non può essere vero in generale, e sicuramente non è vero se lo stato $|n\rangle$ trasforma come una rappresentazione non banale del gruppo delle rotazioni. Di conseguenza $\langle n|O_k(0)|0\rangle$ deve annullarsi per qualsiasi stato $|n\rangle$ che abbia elicità (=proiezione dello spin sull'impulso) diversa da zero. Inoltre $\langle 0|J_0^a|n\rangle$ si annulla per ogni stato $|n\rangle$ che ha parità intrinseca o numeri quantici interni differenti da J_0^a . In definitiva, una **simmetria rotta** con $R_{ik}^a \langle O_k(0)\rangle \neq 0$ richiede l'esistenza di **particella a massa nulla di spin zero e stessa parità e numeri quantici interni di J^0** . Queste particelle sono chiamate **bosoni di Goldstone**.

È interessante vedere come il coefficiente della funzione δ in $\rho_{a,i}(q^2)$ è legato alle proprietà del bosone di Goldstone. Consideriamo l'elemento di matrice della corrente tra il bosone di Goldstone e il vuoto, i.e.

$$\langle 0|J_a^\mu(x)|\widetilde{\text{BG}}\rangle = F_a^\mu(p)e^{-ipx} , \quad (10.25)$$

ed effettuiamo una trasformazione di Lorentz

$$\begin{aligned} \langle 0|J_a^\mu(0)|\Lambda\widetilde{\text{BG}}\rangle &= F_a^\mu(\Lambda p) = \langle 0|U^\dagger(\Lambda)J_a^\mu(0)U(\Lambda)|\Lambda\widetilde{\text{BG}}\rangle = \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu \langle 0|J_a^\nu(0)|\widetilde{\text{BG}}\rangle = \Lambda^\mu{}_\nu F_a^\nu(p) , \end{aligned} \quad (10.26)$$

da cui deduciamo che

$$F_a^\mu(p) = p^\mu f_a(p^2) = p^\mu f_a , \quad (10.27)$$

con f_a costante. Quindi l'elemento di matrice (10.25) diventa

$$\langle 0|J_a^\mu(x)|\widetilde{\text{BG}}\rangle = f_a p^\mu e^{-ipx} . \quad (10.28)$$

L'elemento di matrice dell'operatore scalare O tra il vuoto e il bosone di Goldstone è invece dato da

$$\langle \widetilde{\text{BG}}|O_i(0)|0\rangle = G(p) . \quad (10.29)$$

Applicando una trasformazione di Lorentz otteniamo

$$\langle \Lambda\widetilde{\text{BG}}|O_i(0)|0\rangle = G(\Lambda p) = \langle \widetilde{\text{BG}}|U^\dagger(\Lambda)O_i(0)U(\Lambda)|0\rangle = \langle \widetilde{\text{BG}}|O_i(0)|0\rangle = G(p) , \quad (10.30)$$

e quindi $G(p) = G(p^2) = G = \text{cost.}$

Come conseguenza della conservazione della corrente avremo

$$\partial_\mu^x \langle 0|J_a^\mu(x)|\widetilde{\text{BG}}\rangle = -i f_a p^2 e^{-ipx} = 0 , \quad (10.31)$$

e siccome $p^2 = 0$, perché i BG sono a massa nulla, avremo che $f_a \neq 0$. Ricapitolando, abbiamo trovato che

$$\boxed{C_{a,i} \propto f_a G} , \quad (10.32)$$

da cui si vede che f_a è una misura dell'intensità della rottura della simmetria.

Concludiamo questo paragrafo analizzando l'effetto di rottura di simmetria sulle identità di Ward. A tal fine, ritorniamo nell'euclideo, dove l'invarianza di Lorentz diventa un'invarianza $SO(4)$, e consideriamo l'identità di Ward seguente

$$\partial_\mu^x \langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle + \delta^4(x) R_{a,ik} \langle O_k(0) \rangle = 0 , \quad (10.33)$$

dove

$$R_{a,ik} \langle O_k(0) \rangle \neq 0 . \quad (10.34)$$

Il valor medio $\langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle$ si può scrivere nella forma

$$\langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle = \partial_x^\mu F_{a,i}(x^2) = x^\mu G_{a,i}(x^2) , \quad (10.35)$$

da cui, prendendo la derivata, otteniamo

$$\partial_\mu \partial^\mu F_{a,i}(x^2) = -\delta^4(x) R_{a,ik} \langle O_k(0) \rangle , \quad (10.36)$$

che possiamo anche scrivere come

$$\Delta_4 F_{a,i}(x^2) = -\delta^4(x) R_{a,ik} \langle O_k(0) \rangle , \quad (10.37)$$

dove Δ_4 è il laplaciano in 4 dimensioni. La soluzione può essere scritta nella forma seguente

$$F_{a,i}(x^2) = R_{a,ik} \langle O_k(0) \rangle \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iqx}}{q^2} , \quad (10.38)$$

e quindi

$$\boxed{\langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle = i R_{a,ik} \langle O_k(0) \rangle \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu}{q^2} e^{iqx}} . \quad (10.39)$$

Se integriamo $\partial_\mu^x \langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle$ nel volume finito V otteniamo $\int_V d^4 x \partial_\mu^x \langle J_a^\mu(x) O_i(0) \rangle = 0$. Questo, però, non è più vero nel volume infinito.

10.4 Rottura esplicita

Supponiamo di avere una teoria con rottura spontanea di simmetria e bosoni di Goldstone corrispondenti. Se H_0 è l'hamiltoniano del sistema avremo

$$[H_0, Q_a] = 0 . \quad (10.40)$$

Nel seguito indicheremo i bosoni di Goldstone con $|\widetilde{\text{BG}}, p\rangle$.

Inseriamo un termine di **rottura esplicita della simmetria** nell'hamiltoniano nel modo seguente

$$H = H_0 + \epsilon_i \int O_i(x) d^3 x . \quad (10.41)$$

L'azione di H_0 sullo stato $|\widetilde{\text{BG}}, p\rangle$ dà

$$H_0 |\widetilde{\text{BG}}, p\rangle = |\vec{p}'| |\widetilde{\text{BG}}, p\rangle . \quad (10.42)$$

Normalizziamo gli stati con una δ , i.e.

$$\langle p|p'\rangle = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') . \quad (10.43)$$

Se consideriamo un volume finito V invece dello spazio infinito avremo che

$$\vec{p}_n = \frac{2\pi}{L} \vec{n} , \quad (10.44)$$

cosicché il prodotto scalare diventa

$$\begin{aligned} \langle p|p' \rangle &= \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V d^3x e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} = \\ &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{p}\vec{p}'} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V}{(2\pi)^3} \langle p|p' \rangle_V . \end{aligned} \quad (10.45)$$

Potremo scrivere $|p\rangle = \sqrt{\frac{V}{(2\pi)^3}} |p\rangle_V$ per $V \rightarrow \infty$. Lavoriamo nel volume finito e quindi con gli stati $|p\rangle_V$. Calcoliamo la variazione dell'energia dello stato $|p\rangle_V$ per effetto del termine di rottura in teoria delle perturbazioni al 1°-ordine:

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= \left\langle p \left| \epsilon_i \int_V d^3x O_i(x) \right| p \right\rangle_V = \epsilon_i \int_V d^3x {}_V \langle p | O_i(x) | p \rangle_V = \\ &= \epsilon_i \int_V d^3x {}_V \langle p | O_i(0) | p \rangle_V = \epsilon_i V {}_V \langle p | O_i(0) | p \rangle_V , \end{aligned} \quad (10.46)$$

dove il penultimo passaggio segue dall'invarianza per traslazioni (che vale se fissiamo condizioni periodiche al bordo). Avremo quindi che

$$\Delta E_p = |\vec{p}'| \sqrt{1 + \frac{m^2}{|\vec{p}'|^2}} - |\vec{p}| \sim |\vec{p}| \left(1 + \frac{m^2}{2|\vec{p}|^2} \right) - |\vec{p}| = \frac{m^2}{2|\vec{p}|} , \quad (10.47)$$

da cui ricaviamo che

$$\frac{m^2}{2|\vec{p}|} = V \epsilon_i {}_V \langle p | O_i(0) | p \rangle_V = \frac{V}{(2\pi)^3} \epsilon_i {}_V \langle p | O_i(0) | p \rangle_V (2\pi)^3 \xrightarrow{V \rightarrow \infty} (2\pi)^3 \epsilon_i \langle p | O_i(0) | p \rangle , \quad (10.48)$$

e quindi m^2

$$m^2 = (2\pi)^3 2|\vec{p}| \epsilon_i \langle p | O_i(0) | p \rangle = (2\pi)^3 \epsilon_i \langle \tilde{p} | O_i(0) | \tilde{p} \rangle . \quad (10.49)$$

Usando il fatto che $\langle \tilde{p} | O_i(0) | \tilde{p} \rangle$ non dipende da p , come si vede applicando una trasformazione di Lorentz:

$$\langle \tilde{p} | O_i(0) | \tilde{p} \rangle = \langle \tilde{p} | U^\dagger(\Lambda) O_i(0) U(\Lambda) | \tilde{p} \rangle = \langle \tilde{\Lambda} p | O_i(0) | \tilde{\Lambda} p \rangle , \quad (10.50)$$

possiamo scrivere

$$\langle \tilde{p} | O_i(0) | \tilde{p} \rangle = C_i = \text{cost} , \quad (10.51)$$

per cui m^2 vale

$$m^2 = (2\pi)^3 \epsilon_i C^i , \quad (10.52)$$

e quindi

$$\boxed{m \sim O(\sqrt{\epsilon})} , \quad (10.53)$$

cioè m^2 va a zero linearmente con ϵ .

Consideriamo l'effetto del termine di rottura esplicita sull'identità di Ward. Consideriamo quindi l'azione euclidea seguente

$$S_E = \int d^4x_E \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)^2 + \frac{1}{2}m_0^2 \phi_i^2 + g_0(\phi_i \phi_i)^2 + \epsilon_i O_i \right], \quad (10.54)$$

dove O_i trasforma come una rappresentazione non banale del gruppo di simmetria ed è un termine che rompe esplicitamente la simmetria. Ad esempio potremmo prendere $O_i \propto \phi_i$. Poniamo

$$S_E = S_0 + \epsilon_i \int d^4x O_i(x), \quad (10.55)$$

e consideriamo il funzionale generatore

$$Z[\mu] = \int \delta\phi \exp \left[-S_0 - \epsilon_i \int d^4x O_i(x) + \int d^4x \mu_i \phi^i \right]. \quad (10.56)$$

Effettuiamo il cambiamento di variabili seguente con g^a infinitesimo

$$\phi_i(x) = \phi'_i(x) + g^a(x) \lambda_{ij}^a \phi'_j(x), \quad (10.57)$$

dove

$$J = \left| \frac{\delta\phi}{\delta\phi'} \right| = \det(1 + g^a \lambda_a) = 1 + g_a \text{tr} \lambda^a + O(g^2) = 1 + O(g^2). \quad (10.58)$$

A seguito del cambio di variabili il funzionale generatore diventa

$$\begin{aligned} Z[\mu] &= \int \delta\phi' \exp \left[-S_0 - \int \partial_\mu g^a(x) J_a^\mu(x) d^4x - \epsilon_i \int d^4x O_i(x) + \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_i \int g^a(x) R_{ik}^a O_k(x) + \int d^4x \mu_i \phi^i + \int d^4x g^a(x) \lambda_{ij}^a \phi_j(x) \mu_i \right] = \\ &\sim \int \delta\phi' \exp \left[-S_0 - \epsilon_i \int d^4x O_i(x) + \int d^4x \mu_i \phi^i \right] \times \\ &\quad \times \left[1 - \int \partial_\mu g^a(x) J_a^\mu(x) + \epsilon_i \int g^a(x) R_{ik}^a O_k(x) + \int g^a(x) \lambda_{ij}^a \phi_j \mu_i \right] = \\ &= Z[\mu] + \int \delta\phi e^{-S_E + \int \mu_i \phi_i} \left(- \int \partial_\mu g^a J_a^\mu + \epsilon_i \int g^a R_{ik}^a O_k + \int g^a \mu_i \lambda_{ij}^a \phi_j \right), \end{aligned} \quad (10.59)$$

dove R^a è il generatore della trasformazione nella rappresentazione di O . Quindi avremo che

$$\int \delta\phi e^{-S_E + \int \mu_i \phi_i} \left\{ \int g_a \left[\partial_\mu J_a^\mu(x) + \epsilon_i R_{ik}^a O_k(x) + \mu_i(x) \lambda_{ij}^a \phi_j(x) \right] d^4x \right\} = 0, \quad (10.60)$$

ossia

$$\int g_a(x) \left[\partial_\mu \langle J_a^\mu(x) \rangle_\mu + \epsilon_i R_{ik}^a \langle O_k(x) \rangle_\mu + \mu_i(x) \lambda_{ij}^a \langle \phi_j(x) \rangle_\mu \right] = 0. \quad (10.61)$$

Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, essendo le $g_a(x)$ arbitrarie (sebbene infinitesime), otteniamo

$$\partial_\mu \langle J_a^\mu(x) \rangle_\mu + \epsilon_i R_{ik}^a \langle O_k(x) \rangle_\mu + \mu_i(x) \lambda_{ij}^a \langle \phi_j(x) \rangle_\mu = 0. \quad (10.62)$$

Prendendo la derivata funzionale $\frac{\delta}{\delta\mu_j(y)}$ e calcolando il risultato in $\mu = 0$ otteniamo la seguente identità di Ward modificata

$$\boxed{\partial_\mu \langle J_a^\mu(x) \phi_j(y) \rangle + \epsilon_i R_{ik}^a \langle O_k(x) \phi_j(y) \rangle + \delta^4(x-y) \lambda_{jk}^a \langle \phi_k(x) \rangle = 0}. \quad (10.63)$$

Ovviamente $J_a^\mu(x)$ non è conservata a causa del termine di rottura esplicita.

10.5 Rottura spontanea

Consideriamo il valor medio di un'osservabile O_i :

$$\langle O_i \rangle = \int \delta\phi e^{-S} O_i . \quad (10.64)$$

Supponiamo che la teoria abbia un gruppo di simmetria continuo ed effettuiamo un cambiamento di variabili $\phi = \phi' + g_a \lambda_{ik}^a \phi'_k$ infinitesimo. Come conseguenza di questo cambio di variabili avremo che $\delta S = 0$, mentre $\delta O_i = g_a R_{ik}^a O_k$, e quindi il valor medio (10.64) diventa

$$\langle O_i \rangle = \int \delta\phi e^{-S} (O_i + g_a R_{ik}^a O_k) = \langle O_i \rangle + g_a R_{ik}^a \langle O_k \rangle , \quad (10.65)$$

da cui concludiamo che

$$R_{ik}^a \langle O_k \rangle = 0 . \quad (10.66)$$

In questo calcolo il parametro d'ordine è sempre identicamente nullo e non potremmo mai capire se c'è rottura spontanea di simmetria o meno. Procediamo quindi diversamente: introduciamo prima un termine di rottura esplicito che dipende da un parametro piccolo ϵ , calcoliamo il parametro d'ordine, e poi mandiamo $\epsilon \rightarrow 0$. Se otteniamo un valore non nullo per il parametro d'ordine, allora questo ci segnalerà la presenza di una simmetria spontaneamente rotta. Sostituiamo quindi $S \rightarrow S + \int \epsilon_k \phi_k$ e calcoliamo di nuovo il parametro d'ordine

$$\langle O_i \rangle = \int \delta\phi \exp \left[-S - \int \epsilon_k \phi_k(x) d^4x \right] O_i . \quad (10.67)$$

Come prima facciamo la trasformazione

$$\phi = \phi' + g_a \lambda_{ij}^a \phi'_j , \quad (10.68)$$

ottenendo così

$$\begin{aligned} \langle O_i \rangle &= \int \delta\phi \exp \left[-S - \int \epsilon_i \phi^i + \epsilon_i g_a \lambda_{ij}^a \phi_j \right] (O_i + g_a R_{ij}^a O_j) \sim \\ &\sim \int \delta\phi \exp \left[-S - \int \epsilon_i \phi^i \right] \left(1 - \int \epsilon_i g_a \lambda_{ij}^a \phi_j \right) (O_i + g_a R_{ij}^a O_j) \sim \\ &\sim \int \delta\phi \exp \left[-S - \int \epsilon_i \phi^i \right] \left[O_i + g_a R_{ij}^a O_j - \epsilon_i g_a \lambda_{lm}^a \int \phi_m(x) O_i \right] = \\ &= \langle O_i \rangle + g_a R_{ij}^a \langle O_j \rangle - \epsilon_l g_a \lambda_{lm}^a \int \langle \phi_m(x) O_i \rangle d^4x , \\ &\rightarrow g_a R_{ij}^a \langle O_j \rangle = \epsilon_l g_a \lambda_{lm}^a \int \langle \phi_m(x) O_i \rangle d^4x , \end{aligned} \quad (10.69)$$

da cui ricaviamo l'equazione seguente

$$\boxed{R_{ij}^a \langle O_j \rangle = \epsilon_l \lambda_{lm}^a \int \langle \phi_m(x) O_i \rangle d^4x} . \quad (10.70)$$

Valutiamo $\langle \phi_m(x) O_i \rangle$. Prendiamo $x^0 > 0$ e inseriamo un insieme completo di stati

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \phi_m(x) O_i(0) | 0 \rangle &= \sum_n \langle 0 | \phi_m(x) | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | \phi_m(0) | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle e^{-ip_n x} = \\
 &= \int d^4 q \sum_n \langle 0 | \phi_m(0) | \tilde{n} \rangle \langle \tilde{n} | O_i(0) | 0 \rangle e^{-ip_n x} \delta^4(p_n - q) = \\
 &= \int d^4 q e^{-iqx} \tilde{\rho}_{mi}(q) .
 \end{aligned} \tag{10.71}$$

Per l'invarianza di Lorentz: $\tilde{\rho}_{mi}(q) = \rho_{mi}(q^2) \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3}$, per cui avremo che

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \phi_m(x) O_i(0) | 0 \rangle &= \int d^4 q e^{-iqx} \rho_{mi}(q^2) \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3} = \int d^4 q d\mu^2 e^{-iqx} \rho_{mi}(q^2) \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3} \delta(\mu^2 - q^2) = \\
 &= \int \frac{d\mu^2}{(2\pi)^3} \rho_{mi}(\mu^2) \int d^4 q \theta(q^0) \delta(\mu^2 - q^2) e^{-iqx} = \\
 &= \int \frac{d\mu^2}{(2\pi)^3} \rho_{mi}(\mu^2) \int \frac{d^3 q}{2\epsilon_q} e^{-iqx} = \int d\mu^2 \rho_{mi}(\mu^2) \Delta_+(x; \mu^2) ,
 \end{aligned} \tag{10.72}$$

dove

$$\Delta_+(x; \mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{2\epsilon_q} e^{-iqx} . \tag{10.73}$$

Prendendo il \mathcal{T} -prodotto otteniamo

$$\langle \phi_m(x) O_i(0) \rangle = \int d\mu^2 \rho_{mi}(\mu^2) \Delta_F(x; \mu^2) = \int d\mu^2 \rho_{mi}(\mu^2) \int d^4 q \frac{e^{-iqx}}{q^2 + \mu^2} , \tag{10.74}$$

cosicchè

$$\begin{aligned}
 \int d^4 x \langle \phi_m(x) O_i(0) \rangle &= \int d^4 x d\mu^2 d^4 q \rho_{mi}(\mu^2) \frac{e^{-iqx}}{q^2 + \mu^2} = \int d\mu^2 d^4 q \delta^4(q) \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{q^2 + \mu^2} = \\
 &= \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} .
 \end{aligned} \tag{10.75}$$

Abbiamo quindi trovato il seguente risultato

$$\boxed{\int d^4 x \langle \phi_m(x) O_i(0) \rangle = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{\mu^2}} . \tag{10.76}$$

Se c'è rottura spontanea avremo i bosoni di Goldstone con massa m^2 data da

$$m^2 = (2\pi)^3 \epsilon_i \langle \widetilde{\text{BG}} | \phi_i(0) | \widetilde{\text{BG}} \rangle . \tag{10.77}$$

Isolando questi stati nella funzione spettrale otteniamo

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_{mi}^{\text{BG}}(q) &= \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \langle 0 | \phi_m(0) | \widetilde{\text{BG}}, p \rangle \langle \widetilde{\text{BG}}, p | O_i(0) | 0 \rangle \delta^4(p - q) = \\
 &= \frac{\sqrt{Z_{\phi_m} Z_{O_i}}}{(2\pi)^3} \theta(q^0) \delta(q^2 - m^2) = \rho_m^{\text{BG}}(q^2) \frac{\theta(q^0)}{(2\pi)^3} ,
 \end{aligned} \tag{10.78}$$

da cui ricaviamo che

$$\rho_m^{\text{BG}} i(q^2) = \sqrt{Z_{\phi_m} Z_{O_i}} \delta(q^2 - m^2) . \quad (10.79)$$

Inserendo questo risultato nell'Eq. (10.76) otteniamo

$$\int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} = \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_m^{\text{BG}} i(\mu^2)}{\mu^2} + \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\sigma_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} , \quad (10.80)$$

da cui, inserendo l'espressione trovata per $\rho_m^{\text{BG}} i(q^2)$, troviamo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\mu^2 \frac{\rho_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} &= \int_0^\infty \sqrt{Z_\phi Z_O} \frac{\delta(\mu^2 - m^2)}{\mu^2} d\mu^2 + \int_M^\infty \frac{\sigma_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} d\mu^2 = \\ &= \frac{\sqrt{Z_\phi Z_O}}{m^2} + \int_M^\infty \frac{\sigma_{mi}(\mu^2)}{\mu^2} d\mu^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{Z_\phi Z_O}}{m^2} . \end{aligned} \quad (10.81)$$

Quindi, quando $\epsilon \rightarrow 0$ avremo

$$R_{ij}^a \langle O_j \rangle = \frac{\epsilon_l \lambda_{lm}^a \sqrt{Z_{\phi_m} Z_{O_i}}}{(2\pi)^3 \epsilon_i \langle \text{BG} | \phi_i | \text{BG} \rangle} = \frac{\epsilon_l \lambda_{lm}^a \tilde{Z}_{mi}}{\epsilon_i c^i} = \frac{\epsilon_l \bar{Z}_{li}^a}{\epsilon_k c^k} . \quad (10.82)$$

Ovviamente il limite $\epsilon \rightarrow 0$ va preso lungo la direzione fissata dal termine di rottura. In tal caso il limite esiste ed il parametro d'ordine è diverso da zero, i.e.

$$R_{ij}^a \langle O_j \rangle \neq 0 . \quad (10.83)$$

10.6 Meccanismo di Higgs

Consideriamo la lagrangiana (minkowskiana) seguente

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - m^2 \bar{\phi} \phi - g(\bar{\phi} \phi)^2 , \quad (10.84)$$

e l'hamiltoniano corrispondente

$$H = \dot{\bar{\phi}} \dot{\phi} + \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \phi + m^2 \bar{\phi} \phi + g(\bar{\phi} \phi)^2 , \quad (10.85)$$

con $g > 0$, perché l'energia deve essere limitata inferiormente.

La teoria ha la seguente simmetria

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{i\alpha} \phi , \\ \bar{\phi} &\rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\phi} . \end{aligned} \quad (10.86)$$

Se $m^2 > 0$, H è definita positiva e il minimo si ha per $\phi = 0$. Se $m^2 < 0$ avremo $V(\bar{\phi} \phi) = -|m^2| \bar{\phi} \phi + g(\bar{\phi} \phi)^2$. I punti stazionari sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= -|m|^2 \bar{\phi} + 2g \bar{\phi} \phi \bar{\phi} = (-|m|^2 + 2g \bar{\phi} \phi) \bar{\phi} = 0 , \\ \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} &= -|m|^2 \phi + 2g \bar{\phi} \phi \phi = (-|m|^2 + 2g \bar{\phi} \phi) \phi = 0 , \end{aligned} \quad (10.87)$$

con

$$\begin{aligned} \phi = \bar{\phi} = 0 &\quad \text{instabile} , \\ \bar{\phi} \phi = \frac{|m^2|}{2g} &\quad \text{stabile} . \end{aligned} \quad (10.88)$$

Ponendo $\phi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$ avremo che

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi &= e^{i\theta}(\partial_\mu\rho + i\rho\partial_\mu\theta) , \\ \partial_\mu\bar{\phi} &= e^{-i\theta}(\partial_\mu\rho - i\rho\partial_\mu\theta) ,\end{aligned}\tag{10.89}$$

e quindi la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \rho^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + |m|^2\rho^2 - g\rho^4 .\tag{10.90}$$

Sotto la trasformazione di fase globale $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$ avremo che

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta + \alpha , \\ \rho &\rightarrow \rho .\end{aligned}\tag{10.91}$$

Aggiungiamo l'interazione con un campo elettromagnetico, cioè richiediamo una simmetria locale piuttosto che globale. Quindi la derivata semplice va sostituita con la derivata covariante

$$\begin{aligned}\partial_\mu\phi &\rightarrow D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\rho e^{i\theta} = \\ &= e^{i\theta}(\partial_\mu\rho + i\rho\partial_\mu\theta - ie\rho A_\mu) ,\end{aligned}\tag{10.92}$$

$$\partial_\mu\bar{\phi} \rightarrow D_\mu\bar{\phi} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\bar{\phi} ,\tag{10.93}$$

che, nelle variabili ρ e θ , equivale alla sostituzione

$$\begin{aligned}\partial_\mu\rho &\rightarrow \partial_\mu\rho , \\ \partial_\mu\theta &\rightarrow \partial_\mu\theta - eA_\mu ,\end{aligned}\tag{10.94}$$

e la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \rho^2(\partial_\mu\theta - eA_\mu)(\partial^\mu\theta - eA^\mu) + |m|^2\rho^2 - g\rho^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} .\tag{10.95}$$

Questa lagrangiana è invariante sotto la trasformazione seguente

$$\begin{aligned}A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda , \\ \theta &\rightarrow \theta + e\Lambda , \\ \rho &\rightarrow \rho .\end{aligned}\tag{10.96}$$

Chiamiamo $-eB_\mu = \partial_\mu\theta - eA_\mu$. Avremo che

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu .\tag{10.97}$$

Poniamo

$$\rho(x) = \frac{|m|}{\sqrt{2g}} + \eta(x) ,\tag{10.98}$$

per perturbare intorno al minimo. Con questa posizione però il termine $\rho^2 B_\mu B^\mu$ contiene ora un termine di massa per B_μ che viene dalla parte costante in $\rho(x)$. Consideriamo l'integrale funzionale per calcolare il valore di aspettazione dell'osservabile O :

$$\langle O \rangle = \int \prod_x \rho(x)\delta\rho(x)\delta\theta(x)\delta A_\mu(x) e^{i\int d^4x \mathcal{L}} O(\rho, \partial_\mu\theta - eA_\mu, F_{\mu\nu}) ,\tag{10.99}$$

dove ρ e $F_{\mu\nu}$ sono gauge invarianti. Applichiamo ora il metodo di Faddeev-Popov. Fissiamo il funzionale di gauge-fixing $f(A) = 0$ e scriviamo il corrispondente determinante $\Delta_f(A)$

$$\Delta_f(A) \int \delta\Lambda \delta[f(A^\Lambda)] = \Delta_f(A) \int \delta\Lambda \delta[f(A + \partial\Lambda)] = 1 . \quad (10.100)$$

Inserendo l'unità così scritta nell'integrale funzionale precedente otteniamo

$$\langle O \rangle = \int \prod_x \rho(x) \delta\rho(x) \delta\theta(x) \delta A_\mu(x) e^{i \int d^4x \mathcal{L}} O(\rho, \partial_\mu\theta - eA_\mu, F_{\mu\nu}) \Delta_f(A) \delta[f(A)] . \quad (10.101)$$

Ovviamente $\langle O \rangle$ è gauge-invariante, quindi non dipende dal gauge-fixing. Dalla definizione di $B_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta$ avremo che $A_\mu = B_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta$. Inoltre valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} O &= O(\rho, B_\mu, \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu) \equiv O(\rho, B, \partial B) , \\ \delta A &= \delta B \quad \text{misura invariante} , \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\rho, B, \partial B) , \\ \Delta(A) &= \Delta\left(B + \frac{1}{e}\partial\theta\right) = \Delta(B) \quad \text{det di F.P. gauge inv.} , \\ \delta[f(A)] &= \delta\left[f\left(B_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right)\right] , \end{aligned} \quad (10.102)$$

per cui avremo che

$$\langle O \rangle = \int \prod_x \rho(x) \delta\rho(x) \delta\theta(x) \delta B_\mu(x) e^{i \int \mathcal{L}(\rho, B, \partial B) d^4x} O(\rho, B, \partial B) \Delta(B) \delta\left[f\left(B + \frac{1}{e}\partial\theta\right)\right] . \quad (10.103)$$

Notando che

$$\Delta(B) \int \delta\theta \delta\left[f\left(B + \frac{1}{e}\partial\theta\right)\right] = \Delta(B) \int \delta\theta \delta[f(B^\theta)] = 1 , \quad (10.104)$$

per definizione, otteniamo infine che

$$\boxed{\langle O \rangle = \int \prod_x \rho(x) \delta\rho(x) \delta B_\mu(x) e^{iS(B, \rho)} O(\rho, B)} , \quad (10.105)$$

cioè il termine di gauge-fixing scompare del tutto.